高等职业教育数学系列教材

GAODENG ZHIYE JIAOYU SHUXUE XILIE JIAOCAI

主 编 赵佳因 副主编 彭明珠

编著者 何 玲 吕 为 崔宝金 刘 旭 胡方富

高等数学

工科类

北京大学出版社

PEKING UNIVERSITY PRESS

高等职业教育数学系列教材

高 等 数 学

（工 科 类）

主　编　赵佳因
副主编　彭明珠
编著者　何　玲　吕　为　崔宝金
　　　　刘　旭　胡方富

北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

高等数学:工科类/赵佳因主编. —北京:北京大学出版社,2004.9
(高等职业教育数学系列教材)
ISBN 7-301-07654-1

Ⅰ.高… Ⅱ.赵… Ⅲ.高等数学-高等学校:技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2004)第 071442 号

书　　　名:高等数学(工科类)
著作责任者:赵佳因　主编
责 任 编 辑:王　艳
标 准 书 号:ISBN 7-301-07654-1/O·0603
出 版 发 行:北京大学出版社
地　　　址:北京市海淀区中关村北京大学校内　100871
网　　　址:http://cbs.pku.edu.cn　电子信箱:zpup@pup.pku.edu.cn
电　　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672　理科编辑部 62752021
排　版　者:北京高新特打字服务社　51736661
印　刷　者:北京大学印刷厂
经　销　者:新华书店
787mm×1092mm　16 开本　22 印张　549 千字
2004 年 9 月第 1 版　2004 年 9 月第 1 次印刷
印　　　数:0001—6000 册
定　　　价:29.00 元

内容简介

本书是《高等职业教育数学系列教材》之一的工科类“高等数学”课程的教材. 本书按照教育部制定的工科类“高等数学课程教学基本要求”编写，反映了当前高等职业教育培养高素质实用型人材数学课程设置的发展趋势及教学理念. 全书共分九章. 内容包括：函数、极限与连续，导数与微分，中值定理与导数的应用，不定积分，定积分，常微分方程，向量代数与空间解析几何，多元函数微积分学，无穷级数等. 每节配有适量习题，每章有综合练习题及自测题，书末附有习题答案和提示，供读者参考.

本书突出体现了作者在教学第一线积累的丰富教学经验，注重对学生基础知识的传授和基本能力的培养. 对数学概念的引入强调几何背景和物理意义，对基础训练既强调对概念的理解又兼顾计算的基本技能. 为此，对重点内容作者设计了“想一想”、“试一试”、“注意”等小标题，以启发读者思考. 每小节的习题分为(A)、(B)两组，(A)组是基础题，(B)组是提高题. (B)组题主要选自专升本的试题，书后附有题解，可供专升本的读者选用. 每章后作者设计了有关本章内容的试卷(100分)，读者可用它自测学习效果.

本书可作为高等职业教育工科类大学生“高等数学”课程的教材或教学参考书，也可供成人教育相关专业的学生学习参考.

高等职业教育系列教材编写委员会

序　言

为了适应我国高等职业教育迅速发展的需要，适应高等职业教育多层次办学的需要，我们编委会应北京大学出版社之邀规划、编写了《高等职业教育系列教材》.

我国高等职业教育兴起于20世纪90年代中期，至今已得到迅速发展，受到人们的广泛关注.为了培养出具有一定科学素质和职业技能的优秀人才，无论是在专科教育还是在本科教育方面，我们都一直在进行艰辛的探索.高等职业教育的教材担负着教改的重任，在教学实践中，直接关系教学质量，在引导教学教法、理论联系实际、指导实践等方面具有重要作用，为此我们始终将教材建设作为教学工作的重要组成部分.

从高等职业教育培养技术型应用人才这一目标来看，高等职业教育的基础课教材应当体现积极的创造性思维的训练，以提高学生的科学素质和工作能力；内容不仅要体现该知识系统的精华，而且应具有系统的伸缩性和可选性，以适应不同层次教学的实际需要；教学内容与课后的训练应具有方便学生的自修性，以发挥学生作为学习主体的积极作用.专业课教材的内容应当具有工作实践的应用性，体现实际工作的规律性，理论印证性的推导内容在不影响今后实践需要的情况下，应代之以翻阅技术资料、查阅工程手册的实际应用能力的培养，只有这样，高等职业教育教材才能走出传统本科教材和专科压缩本科教材的编写模式.

教材归根结底是为学生服务的，是为学生今后从事工作打基础的，因此教材内容还需要体现该学科或该专业的科学性和先进性，以适应未来工作的实际需要；内容安排上必须循序渐进，由浅入深，把握好学生知识水平的可接受性；在陈述上必须通俗易懂，简练明了，注重化抽象为具体再由具体到抽象的过程，这样才能确保学生在学习中真正掌握知识.

编委会组织编写的教材力图体现上述编写原则，集优秀教师的教学经验认真编好每一部教材，为高等职业教育教改做出自己应有的贡献是我们的宗旨.

编委会

2004年7月于北京

编者前言

为了适应我国高等职业教育迅速发展及多层次办学的需要，我们以教育部制定的高等职业教育工科类“高等数学课程教学基本要求”为依据；以提高学生的科学素质为前提，以服务于后续专业课为目的，结合我们在教改中的经验编写了本教材。

本教材在保证科学性的基础上，注意讲清概念，力图使学生理解基本数学思想、掌握其思维方法。根据我们多年教学的实践，要达到这一教学目的，就必须在授课的基础上，强化学生对数学概念的思考与基本训练。因此，在许多章节中，我们对重点概念，以“**想一想**”的方式提示学生进行思考；对重点解题方法采取边讲解边让学生“**试一试**”的方法；对学生容易混淆的概念，用黑体字“**注意**”予以提醒。各节后的习题采用阶梯式分程度设计，(A)组题为基础内容，突出基本概念和基本解题方法的训练，力图通过这些训练使学生掌握教材的基本内容；(B)组题是提高题，选自近年来专升本的考题(并在各题后附有年号)，以适应不同层次的教学需要。每章之后还配有自测题和综合练习题，以便于学生自学。

本教材共分九章。第一章讲述函数与极限。虽然函数的基本内容在中学数学课中已经学过，但考虑高职教育具有不同层次学生入学的特点，因此这一章在简要复习的基础上，着重讲授中学没有重点学习的分段函数和后面各章要用到的复合函数。对于极限概念，本教材没有用精确的数学定义，而特地采用描述性定义，从最简单的数列极限引入、类比地给出当 $x \to +\infty$ 时函数的极限，从具体到抽象，最终使学生自然地接受函数在一点处的极限的概念。

第二、三、四、五章讲述一元函数微积分。在讲述导数及积分时，以讲解数学方法为主，尽可能选择简单的载体，略去了一些繁杂的公式，在例题和习题的选取上分类归纳，便于读者接受。考虑到大多数学生还将学习概率论，在此还编入了无穷区间上的广义积分。积分应用强调包含面积和体积计算在内的几何应用。

在第六章微分方程中，首先突出“可分离变量的微分方程”、“一阶线性微分方程”、“二阶常系数线性微分方程”这三种最基本的微分方程的解法，在此基础上把“齐次微分方程”、“伯努利方程”和“几种特殊的高阶微分方程”等可利用代数方法转化为以上三种类型的微分方程放到了一节，供有余力的学生学习。为方便工科类学生后继课的学习，还增加了“微分方程的应用”一节。

第七章通过建立空间直角坐标系讲述一些简单的曲面与曲线的方程，旨在培养空间概念，为多元函数的学习做准备。

第八章讲述多元微积分。对于多元微积分，着重体现它是一元函数微积分在几何空间上的推广，讲清思想和基本概念，使学生掌握基本方法。

在第九章级数中充分体现了实用性，给出了正项级数敛散性比值判别法的极限形式，避开了对幂级数在收敛区间端点的敛散性的讨论，为便于电类的学生后续课程学习的需要，还编写了“傅里叶级数”一节。

本教材主要供高等职业教育工科类、管理类一年级学生使用，也适合成人教育或学生自学使用。建议学时为 100 至 140 学时，标 * 号部分，供教师根据教学的需要及可利用学时数进行选讲。

本教材由赵佳因副教授担任主编，彭明珠副教授担任副主编。全书由赵佳因统稿，由彭明珠提供授课实践材料及大部分习题。参加本书编写的有：第一章：赵佳因，第二章：胡方富，第三章：何玲，第四、五章：吕为，第六、九章：崔宝金，第七章：刘旭，第八章：彭明珠。有关院校专家和教授为本教材的编写提出了不少宝贵意见，在此表示衷心的感谢！

本书不当之处，敬请读者批评指正，以便再版时加以改进。

编 者

2004 年 3 月

目　录

第一章　函数·极限·连续

“高等数学”课是以函数为主要研究对象的一门课程．在这门课程中，极限是一条主线，它是贯穿始终的一个重要概念，是深入研究函数和解决各种实际问题的基本思想方法．连续则是与极限紧密联系的另一个主要概念，用来刻画函数的性态，连续函数是高等数学研究的主要对象．

§1.1　函　数

高等数学的主要研究对象是函数，而函数的概念及其性质，在中学里已作了比较详细的讨论，在此，为了今后学习的需要，仅对相关内容做一个简要的回顾．

一、函数概念及其表示法

我们在观察某一个现象或讨论某一个问题时，经常会遇到同时出现几个变量的情况．这些变量之间往往是相互联系、相互依赖的．请看下面几个例子．

引例 1　物体作自由落体运动时，物体下落的距离 s 与时间 t 的关系如下：

$$s=\frac{1}{2}gt^2\quad(t>0).$$

引例 2　我国现行个人所得税缴税额 y 元与个人月收入 x 元之间有如下对应关系：

$$y=\begin{cases}0, & x\leqslant 1200,\\ (x-1200)\cdot 5\%, & 1200<x\leqslant 1700,\\ 25+(x-1700)\cdot 10\%, & 1700<x\leqslant 3200,\\ 175+(x-3200)\cdot 15\%, & 3200<x\leqslant 6200,\\ 625+(x-6200)\cdot 20\%, & x>6200.\end{cases}$$

引例 3　1750 年至 2000 年美国人口（单位以百万计）与年份的对应关系由图 1-1 所示的曲线来确定．

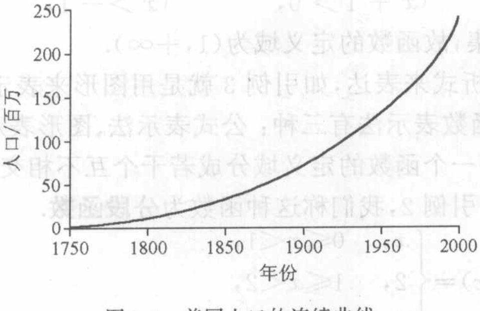

图 1-1　美国人口的连续曲线

上述各例，虽然各自所包含的实际意义不同，表现的形式也不同，但其共同的本质是：当一个变量在某一范围内取定了一个数值时，按照某种确定的对应关系，就可以求得另一个变量的一个相应值. 由此我们引入函数的概念.

定义 1.1　设有两个变量 x 和 y，如果变量 x 在其变化范围 $D\subseteq \boldsymbol{R}$（$\boldsymbol{R}$ 为全体实数）内任意取一个数值时，变量 y 按照某一种对应规则 f，有惟一确定的实数与之相对应，则称变量 y 是变量 x 的函数，记为

$$y=f(x),\quad x\in D,$$

其中，x 称为**自变量**，y 称为**因变量**或 x 的**函数**，D 称为函数的**定义域**.

当 $x=x_0\in D$ 时，与之对应的 y 值，记为 y_0 或 $f(x_0)$ 或 $y\Big|_{x=x_0}$，称为函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处的**函数值**. 全体函数值组成的集合称为函数的**值域**. 本书中我们通常用大写字母 M 表示函数的值域.

当 $x_0\notin D$ 时，我们称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 无定义，或称 $f(x_0)$ 无意义.

注意　决定函数的关键因素是定义域和对应规则.

例 1　下列式子中，y 是 x 的函数吗？如果是，指出它的定义域 D.

(1) $y=\sqrt{-x}$；(2) $y=c$（c 为常数）；(3) $y=\arcsin(3+x^2)$；(4) $y=\ln(x^2+x-2)$.

解　(1) 对于 $(-\infty,0]$ 中的每一个 x 值，都有惟一的一个实数 y 与它对应，所以 $y=\sqrt{-x}$ 是 x 的函数. 定义域为 $D=(-\infty,0]$.

(2) 表面看，$y=c$ 没有包含 x，但不论 x 取 $(-\infty,+\infty)$ 内的什么实数，y 总有惟一确定的值 c 与之对应，故 $y=c$ 是 x 的函数. 定义域为 $D=(-\infty,+\infty)$.

(3) 因为 $3+x^2\geqslant 3$，$\arcsin(3+x^2)$ 无意义，所以，无论 x 取何值，在实数范围内找不到一个 y 与之相对应，因此 $y=\arcsin(3+x^2)$ 不是 x 的函数. 此时，我们不再谈函数的定义域，或者说定义域为空集.

(4) 由对数函数定义，要求 $x^2+x-2=(x+2)(x-1)>0$，因此，对于 $(-\infty,-2)$ 或 $(1,+\infty)$ 内的每一个 x 值，都有惟一的一个实数 y 与它对应，所以 $y=\ln(x^2+x-2)$ 是 x 的函数. 定义域为 $D=(-\infty,-2)\cup(1,+\infty)$.

当我们知道 y 是 x 的函数时，有时需要明确地求出函数的定义域. 求定义域就是找能使解析式有意义的所有点的集合. 对于应用问题还应结合问题的实际意义来确定.

例 2　求函数 $y=\lg(x-1)+\dfrac{1}{\sqrt{x+1}}$ 的定义域 D.

解　使上式有意义的 x 必须满足：

$$\begin{cases}x-1>0,\\ x+1>0,\end{cases}\quad 即\quad \begin{cases}x>1,\\ x>-1,\end{cases}$$

取上述两个不等式解的交集，故函数的定义域为 $(1,+\infty)$.

函数不一定都能用解析式来表达，如引例 3 就是用图形来表示的. 函数还可以用表格来表示（如函数表）. 常用的函数表示法有三种：公式表示法、图形表示法和表格表示法.

在实际问题中，有时将一个函数的定义域分成若干个互不相交子区间的并集，它在每个子区间上有不同的表达式，如引例 2，我们称这种函数为**分段函数**.

例 3　设分段函数 $f(x)=\begin{cases}x, & 0\leqslant x<1,\\ 2, & 1\leqslant x<2,\\ x^2, & 2\leqslant x<3.\end{cases}$

(1) 指出分段点；(2) 求函数的定义域；

(3) 求函数值 $f\left(\frac{1}{2}\right)$，$f[f(1)]$；

(4) 作函数的图形.

解 (1) 分段点是 $x=1$，$x=2$；

(2) 定义域是 $D=[0,1)\cup[1,2)\cup[2,3)=[0,3)$；

(3) $f\left(\frac{1}{2}\right)=x\big|_{x=1/2}=\frac{1}{2}$，$f(1)=2$，

$f[f(1)]=f(2)=x^2\big|_{x=2}=4$；

(4) 函数图形如图 1-2 所示.

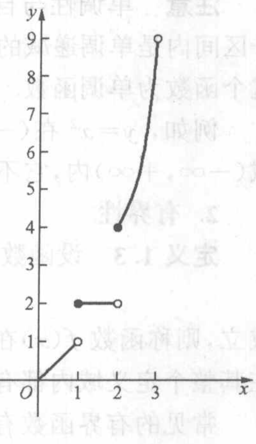

图 1-2

想一想 ① 如何理解函数 $y=f(x)$ 在点 $x=x_0$ 有定义？

② $y=x$ 与 $y=\sqrt{x^2}$ 表示的是同一个函数吗？$y=x$ 与 $y=\frac{x^2}{x}$ 呢？$y=x$ 与 $y=t$ 呢？应该从哪几个方面判断两个不同的解析式所表示的函数是否为同一函数？

二、函数的几种性态

1. 单调性

定义 1.2 设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于 I 中的任意两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)\leqslant f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)\geqslant f(x_2))$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**单调递增**(或**单调递减**). 区间 I 就称为函数 $f(x)$ 的**单调递增区间**(或**单调递减区间**).

若对于 I 中的任意两点 $x_1<x_2$，都有

$$f(x_1)<f(x_2)\quad(\text{或 } f(x_1)>f(x_2))$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在区间 I 上**严格单调递增**(或**严格单调递减**). 区间 I 就称为函数 $f(x)$ 的**严格单调递增区间**(或**严格单调递减区间**).

例如，如图 1-3(a)，函数

$$f(x)=\begin{cases}x, & x\leqslant 0,\\ 0, & 0<x<1,\\ x-1, & x\geqslant 1\end{cases}$$

为单调递增函数，函数 $f(x)=x$ 为严格单调递增函数(图 1-3(b)).

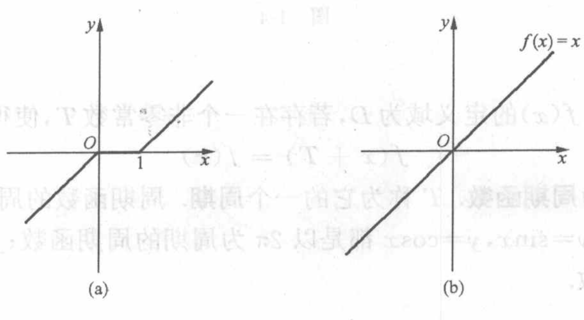

图 1-3