抽象分析基础

宋国柱　曹祥炎　编

南京大学出版社

内容提要

全书共有十二章，由三部分内容组成：第一篇复分析，介绍了复变函数的连续性，解析函数以及泰勒级数、罗朗级数，复变函数积分中的 Cauchy 积分定理及其应用，留数的计算和应用以及解析开拓等；第二篇实分析，主要介绍 R^1 中的点集和(L)测度，可测函数以及可测函数序列的收敛性，(L)积分理论，(L)积分序列极限定理及其应用，抽象测度和富比尼定理；第三篇泛函分析，主要介绍距离空间，赋范线性空间和内积空间，距离空间的完备性、可分性和紧性，Banach 不动点定理及其应用，Banach 空间中关于线性算子的基本定理及其应用，Hilbert 空间中有界线性泛函，有界自伴算子、正算子和酉算子．

本书可作为综合性大学和师范院校数学系基础数学、应用数学、计算数学专业的教材．

书　名　抽象分析基础
编　者　宋国柱　曹祥炎
责任编辑　新　平
封面设计　朱　蓝
责任校对　任玉清
出版者　南京大学出版社
　　(南京汉口路 22 号　南京大学校内　邮编 210093)
印刷　常熟市印刷八厂
经销　全国各地新华书店
开本　850×1168 毫米　1/32　印张 13.125　字数 339 千
1999 年 6 月第 1 版　1999 年 6 月第 1 次印刷
印数　2 000
定价　16.00 元
书号　ISBN　7-305-03223-9/O·226

前　言

本教材由三部分内容组成，第一部分是复分析，第二部分是实分析，这两部分内容是数学分析中微积分理论的发展和深化，也是现代分析数学的重要基础。第三部分是泛函分析。泛函分析是现代分析的一个重要分支，它主要研究无限维空间及其上的映射的一般性质，这三部分内容构成了现代分析的基础。本书将介绍复分析、实分析的基本内容和泛函分析的初步知识。

本书是在“加强基础，因材施教，淡化专业，分流培养”这一思想指导下，按照数学系新的教学计划，结合数学系原来的三门基础课（复变函数，实变函数和泛函分析）的教学大纲，把三个学期（216 学时）的课程压缩为两个学期（142—162 学时）的课程。在材料的取舍和安排上，我们力求抓住最基本的内容及主要线索，做到由浅入深，突出重点。书中带 * 号的章节以及有关的部分内容，可以根据各专业的需要和学时安排，自行取舍，为了帮助读者理解和掌握主要内容，提高解题能力，开阔思路，本书选用了一定数量与正文紧密配合的例题和习题（习题将另册出版），其中部分难度较大的习题给出了提示，读者应达到能独立解答书中大部分习题的要求。

本书的编写得到了数学系领导的大力支持。由于时间仓促，书中一定存在不少问题，敬请读者批评指出。

编　者

1998 年 12 月

目　　录

第一篇　复分析（40 学时）

引　言 ······ （1）

第一章　复数与复变函数 ······ （2）

§1　复数 ······ （2）
§2　复平面上的点集及区域 ······ （7）
§3　复变函数及其极限与连续性 ······ （10）

第二章　解析函数 ······ （14）

§1　解析函数概念 ······ （14）
§2　柯西-黎曼(Cauchy-Riemann)方程 ······ （17）
§3　导数的几何意义及保形变换概念 ······ （20）
§4　初等解析函数 ······ （23）

第三章　复变函数的积分 ······ （34）

§1　复变函数的积分概念与性质 ······ （34）
§2　柯西积分定理 ······ （39）
§3　柯西积分公式及其推论 ······ （47）

第四章　解析函数的级数 ······ （55）

§1　复函数项级数 ······ （55）
§2　幂级数 ······ （59）
§3　泰勒级数 ······ （63）

§4 罗朗级数 ………………………………………………………… (71)

第五章 留数理论及其应用………………………………………… (87)

§1 留数及其计算 ……………………………………………… (87)
§2 留数理论在定积分计算上的应用 ………………………… (95)
§3 幅角原理及其应用 ………………………………………… (107)

第六章 解析开拓…………………………………………………… (113)

§1 解析开拓的概念与方法 …………………………………… (113)
§2 多值函数的黎曼曲面 ……………………………………… (120)

第二篇 实分析(54学时)

第七章 集·直线上的点集………………………………………… (124)

§1 集合及其运算 ……………………………………………… (124)
§2 映射·集的对等·可列集 ………………………………… (128)
§3 集的势·半序集 …………………………………………… (132)
3.1 集的势…………………………………………………… (132)
*3.2 半序集和佐恩引理……………………………………… (136)
§4 数直线 R 中的点集 ……………………………………… (138)
4.1 一维开集,闭集及其性质 ……………………………… (138)
4.2 R 中开集的构造……………………………………… (141)
4.3 康托集…………………………………………………… (143)

第八章 勒贝格测度………………………………………………… (146)

§1 R 中点集的外测度、内测度………………………………… (146)
§2 勒贝格可测集及其性质 …………………………………… (151)
§3 勒贝格可测集类 …………………………………………… (159)

3.1 开集、闭集的可测性 …………………… (159)
3.2 波雷尔集…………………………… (161)
*3.3 勒贝格不可测集…………………… (162)

第九章 可测函数…………………………… (165)

§1 可测函数及其基本性质 ……………… (165)
1.1 可测函数的定义…………………… (165)
1.2 可测函数的基本性质……………… (168)
§2 可测函数列的收敛性 ………………… (171)
2.1 近一致收敛和叶果洛夫定理……… (172)
2.2 测度收敛和黎斯定理……………… (174)
§3 可测函数的结构(鲁金定理) ………… (178)

第十章 勒贝格积分………………………… (182)

§1 勒贝格积分的定义和性质 …………… (182)
1.1 勒贝格积分的定义………………… (182)
1.2 勒贝格积分的性质………………… (186)
§2 积分序列的极限定理 ………………… (198)
2.1 勒维定理、法杜定理和控制收敛定理 …… (199)
2.2 极限定理的应用…………………… (204)
§3 微分和积分 …………………………… (208)
3.1 单调函数和囿变函数……………… (209)
3.2 绝对连续函数和牛顿-莱布尼兹公式 …… (213)
*§4 抽象测度与积分·富比尼定理 ……… (220)
4.1 σ 代数上的测度及其初等性质 ……… (220)
4.2 外测度和勒贝格测度……………… (224)
4.3 可测函数与 μ 积分 ……………… (229)
4.4 乘积测度和富比尼定理…………… (231)

第三篇　泛函分析（66学时）

第十一章　距离空间·赋范线性空间……………………（240）

§1　距离空间 ……………………………………………（240）

1.1　距离空间的定义和实例……………………………（240）

1.2　距离空间的点集和映射……………………………（247）

1.3　稠密性和可分性……………………………………（252）

1.4　完备性………………………………………………（254）

§2　赋范线性空间 ………………………………………（258）

2.1　线性空间……………………………………………（259）

2.2　赋范线性空间………………………………………（261）

2.3　空间 $L^P[a,b]$（$1\leqslant P<\infty$）和 $L^\infty[a,b]$……（265）

2.4　空间 l^P（$1\leqslant P<\infty$）和 l^∞ ………………（273）

§3　紧性 …………………………………………………（277）

3.1　列紧集与全有界集…………………………………（278）

3.2　紧集…………………………………………………（281）

3.3　具体空间中集合列紧性的判别法…………………（283）

3.4　紧集上的连续映射…………………………………（286）

3.5　有限维赋范线性空间………………………………（287）

§4　压缩映射原理及其应用 ……………………………（293）

4.1　Banach 不动点定理 ………………………………（294）

4.2　压缩映射原理的应用………………………………（298）

*4.3　凸紧集上的不动点定理……………………………（305）

§5　内积空间 ……………………………………………（306）

5.1　内积空间的定义及其性质…………………………（307）

5.2　直交和直交分解定理………………………………（312）

5.3　内积空间中的标准直交系…………………………（317）

第十二章　线性算子和线性泛函…………………………… (329)

§1　有界线性算子 …………………………………… (329)

1.1　线性算子的有界性和连续性……………… (329)

1.2　线性算子空间………………………………… (336)

§2　Hahn-Banach 延拓定理 ……………………… (340)

2.1　Hahn-Banach 定理………………………… (340)

2.2　某些具体空间上的有界线性泛函………… (348)

2.3　共轭空间·共轭算子……………………… (356)

§3　Banach 逆算子定理·闭图象定理·共鸣定理

…………………………………………………… (362)

3.1　逆算子和 Banach 逆算子定理 …………… (362)

3.2　闭线性算子和闭图象定理………………… (369)

3.3　共鸣定理及其应用………………………… (372)

3.4　弱收敛……………………………………… (380)

§4　全连续算子及其初等性质 …………………… (386)

§5　Hilbert 空间上的线性泛函和线性算子 ………… (391)

5.1　Hilbert 空间上有界线性泛函的表示 …… (391)

5.2　共轭算子及其简单性质…………………… (392)

5.3　有界自伴算子,正算子和投影算子 ……… (397)

5.4　等距算子和酉算子………………………… (406)

参考书目………………………………………………… (408)

第一篇 复 分 析

引 言

复变函数论这门学科是由于客观实际的需要而产生和发展起来的. 到今天已成为一门内容非常丰富、应用极为广泛的重要数学分支.

在 18 世纪由欧拉(L. Euler)、高斯(C. F. Gauss)等数学家正式引入了复数及复变函数等概念,建立了一些基本定理. 而复变函数的系统理论基础是在 19 世纪奠定的,主要由柯西(A. Cauchy)建立了复变函数的积分理论,维尔斯特拉斯(K. weierstrass)建立了解析函数的级数理论,以及黎曼(B. riemann)建立了共形映射等几何理论,并逐步将复变函数的理论与方法渗入到代数学、数论、拓朴学、概率论、微分方程与积分方程等其它数学分支. 同时广泛应用到热力学、流体力学、空气动力学、电学、理论物理等其它学科. 随着自然科学的发展与解决实际问题的需要,近代,复变函数又开辟了一些新的方向,如多元复变函数论、广义解析函数论、拟保形变换、整函数与亚纯函数的值分布理论等. 本篇只讲述单复变函数的基本理论和有关方法,不涉及多复变函数方面问题,主要内容包括单复变函数的导数、积分、级数表示,留数理论以及解析开拓等.

由于复变函数论中的许多概念理论与方法是实变函数在复数域内的推广与发展，所以，它们之间有许多相似之处，但是也有许多不同之点．我们将重点放在它们之间的差异上，力求将内容写得简明扼要，减少学时，希望读者在学习这门课程时既要紧紧抓住复变函数与实变函数之间的联系，更要弄清它们间的不同点，要正确理解与牢固掌握解析函数论中的概念与方法，并逐步提高自己抽象思维能力与解决实际问题的能力．

第一章 复数与复变函数

复变函数是实变函数概念的推广．本章首先简单叙述复数有关内容，然后引入平面上的点集、区域概念，接着介绍复变函数概念，给出复变函数的极限与连续的定义及其性质．

§1 复 数

1.1 复数及其运算

我们把复数集 C 定义为所有有序数对 (x,y) 的集合，其中 x，y 为实数，复数 (x,y) 常用 z 表示，记作 $z=x+\mathrm{i}y$，其中 x 称为 z 的**实部**，记作 $\mathrm{Re}z$，y 为 z 的**虚部**，记作 $\mathrm{Im}z$.

两个复数相等，当且仅当它们的实部和虚部分别相等．

复数的四则运算定义如下：设 $z_1=x_1+\mathrm{i}y_1$，$z_2=x_2+\mathrm{i}y_2$，则

$$z_1\pm z_2=(x_1\pm x_2)+\mathrm{i}(y_1\pm y_2),$$

$$z_1\cdot z_2=(x_1x_2-y_1y_2)+\mathrm{i}(x_1y_2+x_2y_1),$$

$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{x_1x_2+y_1y_2}{x_2^2+y_2^2}+\mathrm{i}\,\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2^2+y_2^2}.$$

不难验证复数的四则运算满足加法与乘法的交换律、结合律以及乘法对加法的分配律．

我们定义 z 的共轭数为 $\bar{z}=x-\mathrm{i}y$，复数 z 的模为 $|z|=\sqrt{x^2+y^2}$，容易证得以下性质成立．

(1) $|z|^2=z\cdot\bar{z}$ 特别地若 $z\neq0$，则 $\dfrac{1}{z}=\dfrac{\bar{z}}{|z|^2}$，

(2) $\mathrm{Re}z=\dfrac{1}{2}(z+\bar{z})$，$\mathrm{Im}z=\dfrac{1}{2\mathrm{i}}(z-\bar{z})$，

(3) $\overline{z_1\pm z_2}=\bar{z}_1\pm\bar{z}_2$，

(4) $\overline{z_1z_2}=\bar{z}_1\cdot\bar{z}_2$，

(5) $\overline{\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)}=\dfrac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$，

(6) $|\bar{z}|=|z|$，

(7) $|z_1z_2|=|z_1|\,|z_2|$，

(8) $\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|=\dfrac{|z_1|}{|z_2|}$．

1.2 复数的表示法

从复数的定义可见，对任意一个复数 $z=x+\mathrm{i}y$ 都可以和平面上的点 (x,y) 一一对应，其中 x 为该点的横坐标，y 为该点的纵坐标，这样用点来代表复数的平面称为**复平面**．

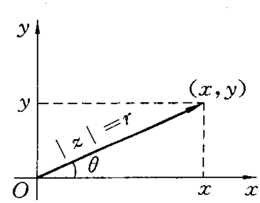

图 1.1

复数 z 也可看成从原点出发，终点在 z 的向量，向量的长度为 z 的**模**，表示 z 的向量与 x 轴正向的夹角 θ 称为 z 的**辐角**，记作 $\mathrm{Arg}z=\theta$(图 1.1)，这时有 $\mathrm{tg}(\mathrm{Arg}z)=\dfrac{y}{x}$. 根据图 1.1，我们有不等式

$$|x|\leqslant|z|,\quad |y|\leqslant|z|,\quad |z|\leqslant|x|+|y|.$$

$\mathrm{Arg}z$ 有无穷多个值,其中每两个值相差 2π 的整数倍.

当 $-\pi<\arg z\leqslant\pi$,称 $\arg z$ 为 z 的**主幅角**

$$\mathrm{Arg}z=\arg z+2k\pi,\ k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

当 $z=0$ 时,$|z|=0$ 而幅角不确定.

当 $\arg z\,(z\neq 0)$ 表示 z 的主幅角时,它与 $\mathrm{Arctg}\,\dfrac{y}{x}$ 的主值 $\mathrm{actg}\,\dfrac{y}{x}$ 有如下关系:

$$\arg z=\begin{cases}\mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x},\ \text{当 } z \text{ 在第一象限时}\\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}+\pi,\ \text{当 } z \text{ 在第二象限}\\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}-\pi,\ \text{当 } z \text{ 在第三象限}\\ \mathrm{arctg}\,\dfrac{y}{x}\quad \text{当 } z \text{ 在第四象限}\end{cases}\quad \text{其中} -\frac{\pi}{2}<\mathrm{arctg}\,\frac{y}{x}<\frac{\pi}{2}.$$

根据复数的运算法则可知,两个复数的加减运算和相应向量的加减法运算一致

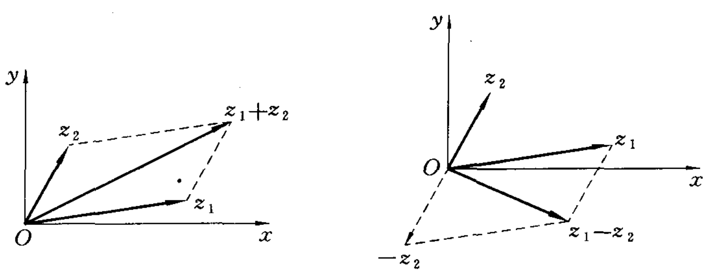

图 1.2

注意 $|z_2-z_1|$ 就是 z_1 与 z_2 之间的距离,因此有

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|,$$

$$|z_1-z_2|\geqslant\big||z_1|-|z_2|\big|.$$

利用直角坐标与极坐标的关系:$x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$.

还可得到 z 的三角表示:$z=r(\cos\theta+\mathrm{i}\sin\theta)$

以及 z 的指数表示：$z=re^{i\theta}$.

1.3 复数的乘幂与方根

设 $z_1=r_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)$，$z_2=r_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$则

$$\begin{aligned}z_1z_2 &=r_1r_2(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)\\ &=r_1r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2-\sin\theta_1\sin\theta_2)\\ &\quad+i(\sin\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_2\cos\theta_1)]\\ &=r_1r_2[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)].\end{aligned}$$

由上式可得 $|z_1z_2|=|z_1||z_2|$，$\mathrm{Arg}(z_1z_2)=\mathrm{Arg}z_1+\mathrm{Arg}z_2$，一般地，令 $z_k=r_k(\cos\theta_k+i\sin\theta_k)$ $(k=1,2,\cdots n)$则有

$$\begin{aligned}z_1z_2\cdots z_n= r_1r_2\cdots r_n[&\cos(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)\\ &+i\sin(\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n)].\end{aligned}$$

特别当 $z_1=z_2=\cdots\cdots=z_n=z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$时，有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)\quad(z\neq 0).$$

当 z 的模 $r=1$，即得棣莫佛(De Moivse)公式：

$$(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos n\theta+i\sin n\theta.$$

下面我们来求方程 $z^n=a$ 的根，其中 a 为已知复数，$n\geqslant 2$，设 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$，$a=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha)$，根据棣莫佛公式有

$$z^n=r^n(\cos n\theta+i\sin n\theta)=|a|(\cos\alpha+i\sin\alpha),$$

于是 $r^n=|a|$，　$\cos n\theta=\cos\alpha$，　$\sin n\theta=\sin\alpha$

由此得　$r=|a|^{\frac{1}{n}}$，　$\theta=\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}$ $(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$.

所以 $z=\sqrt[n]{a}=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}+i\sin\dfrac{\alpha+2k\pi}{n}\right)$

当 $k=0,1,2,\cdots,n-1$ 时，得到 n 个相异的根

$$z_0=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha}{n}+i\sin\frac{\alpha}{n}\right),$$

$$z_1=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2\pi}{n}+i\sin\frac{\alpha+2\pi}{n}\right)$$

…………，

$$z_{n-1}=\sqrt[n]{|a|}\left(\cos\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}+\mathrm{i}\sin\frac{\alpha+2(n-1)\pi}{n}\right).$$

当 k 以其它整数值代入时，这些根又重复出现，所以 a 的 n 次方根 $\sqrt[n]{a}$ 只有 n 个不同的复数，从几何意义来看，$\sqrt[n]{a}$ 的 n 个值可用一个内接于以原点为中心 $\sqrt[n]{|a|}$ 为半径的圆的正 n 边形的 n 个顶点来表示．

1.4 扩充复平面

在全部复数中不存在这样一个数，它是一个复数被零所除的商，在复分析中我们亦常常涉及到一些函数，当自变量趋于给定点时，它们趋于无穷，因此有必要将复数系统加以扩充引入一个数 ∞，叫做无穷大，在复平面上没有一点和 ∞ 相对应，但我们可设想平面上有一个理想点和它相对应，这个理想点称它为**无穷远点**，这样我们就引进了扩充复平面 $C_\infty=C\cup\{\infty\}$. 为了给出 C_∞ 的直观图象，黎曼 (B. Riemann)引入了复数球面表示法．

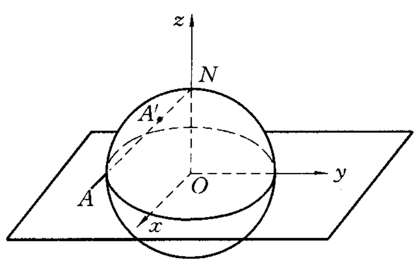

图 1.3

以复平面的原点为球心作半径为 1 的球：$S=\{(x,y,z)\in R^3/x^2+y^2+z^2=1\}$，取定球面上一点 $N(0,0,1)$，即 N 是球面 S 上的北极，设 $A(x,y,0)$是复平面上任一点，作连接 N 与 A 的直线，这直线与球面交点为 A'，那么 A' 称为 A 在球面上的**球极射影**，这样每一复数 z 对应于球面上不是 N 的唯一的点，若 $|z|<1$，则此对应点在下半球面上，若 $|z|>1$，对应点在上半球面上，若 $|z|$

$=1$，则对应点为本身，反之球面上除去 N 以外的每一点对应于唯一复数，若一点 z 的模愈大，则它的球极射影就愈接近于球极 N，于是约定球面上的点 N 对应于复平面上的无穷远点．因此全部复数（构成扩充复平面）可以用这个球面上的点来表示，这样规定的球面叫 **Riemann 球面**，而这样的变换叫做**球极平面射影**．

§2　复平面上的点集及区域

今后我们所研究的变量都是复变量，每一复变量有它变化的范围，下面先简单介绍有关平面点集的一些基本概念．

定义 2.1　平面上任意一点 z_0 的**邻域**定义为以 z_0 为中心，以某个正数 δ 为半径的圆内部所有的点构成的集合，记作 $N(z_0,\delta)$ 或 $N(z_0)$ 即 $N(z_0)=\{z: |z-z_0|<\delta\}$

我们称 $0<|z-z_0|<\delta$ 为 z_0 的**去心邻域**．

无穷远点的领域是以 $z=0$ 为中心，R 为半径的圆的外部，记作 $N(\infty,R)$，即 $N(\infty,R)=\{z: |z|>R\ (R \text{ 是常数})\}$.

定义 2.2　设 E 为平面上一点集，z_0 为 E 中任意一点，若存在 z_0 的一个邻域 $N(z_0)\subset E$，则称 z_0 为集合 E 的**内点**．

若对于某一点 z_0，存在一个领域 $N(z_0)$，使得 $N(z_0)$ 中的任何点都不属于集合 E，则称点 z_0 为集合 E 的**外点**．

若对于某一点 z_0，在 z_0 的任意小的领域内既含有 E 的点也含有不属于 E 的点，则称点 z_0 为集合 E 的**边界点**．

定义 2.3　若对于某一点 z_0（它不一定属于集合 E），它的任何领域 $N(z_0)$ 中总有属于 E 而异于 z_0 的点，则称点 z_0 为集合 E 的**极限点或聚点**．

定义 2.4　集合 E 的所有内点组成的集合称为 E 的**内部**记作 E^0，若 $E=E^0$，则称集合 E 为**开集**．

集合 E 的所有聚点组成的集合称为 E 的**导集**，记为 E'，属于 E 而不属于 E' 的点称为 E 的**孤立点**．

若 $E'\subset E$，则称集合 E 为**闭集**，集合 E 与 E' 的并集，称为集合 E 的**闭包**，记作 $\overline{E}$，即 $\overline{E}=E\cup E'$，显然 $\overline{E}$ 是闭集．

定义 2.5 集合 E 的所有边界点组成的集合称为 E 的**边界**，记作 ∂E，显然 $\partial E=\overline{E}-E^0$.

所有不属于 E 的点组成的集合称为 E 的**补集**，记作 CE.

我们可证得 E 是闭集的充要条件是它的补集为开集．事实上，若 E 为闭集，对任一点 $z\in CE$，即 $z\overline{\in}E$，按闭集的定义可知 $z\overline{\in}E'$ 即 z 不是 E 的聚点．因此存在一领域 $N(z,\varepsilon)$ 不含有 E 的点，即 $N(z,\varepsilon)\subset CE$，故 CE 为开集．

反之，若 CE 是开集，对任一点 $z\in CE$，则存在一邻域 $N(z,\varepsilon)\subset CE$，所以 $N(z,\varepsilon)$ 不包含 E 的点，即 $z\overline{\in}E'$，从而 $z\in CE'$ 由此可得 $CE\subset CE'$，因而 $E'\subset E$，故 E 为闭集．

我们还可证得下列结论（证明留作习题）

1° $z_0\in\overline{E}$ 的充要条件是对任一 $\varepsilon>0$，有 $N(z_0,\varepsilon)\cap E\neq\varphi$

2° $C\overline{E}=(CE)^0$，$\overline{CE}=CE^0$

定义 2.6 若集合 E 总可包含在原点的某一个邻域内，则称集合 E 为**有界集**，否则集合 E 称为**无界集**．

定义 2.7 平面上满足下列两个条件的点集 D 称为**区域**：

(1) D 是一个开集.

(2) D 是连通的，即 D 中任何两点都可用完全属于 D 的一条折线连接起来．

区域 D 与它的边界一起构成闭区域记作 $\overline{D}$

即
$$\overline{D}=D+\partial D.$$

注意 区域都是开的，不包含边界

例如 z 平面上以 z_0 为心，R 为半径的圆：$|z-z_0|<R$ 为圆形区域，z 平面上以 z_0 为心，R 为半径的闭圆：$|z-z_0|\leqslant R$ 为圆形闭区域．

为了给出单连通域与多连通域的定义，先介绍有关平面曲线的几个概念．设实连续函数 $x=x(t)$ 与 $y=y(t)$ 在 $a\leqslant t\leqslant b$ 上连

续，则它在平面上确定了一条**连续曲线**，如果令 $z(t)=x(t)+\mathrm{i}y(t)$，则这条曲线方程可写为 $z=z(t)$，$a\leqslant t\leqslant b$.

若 $x(t)$ 及 $y(t)$ 在 $[a,b]$ 上还有连续导数，且 $z'(t)=x'(t)+\mathrm{i}y'(t)\neq 0$（$z'(a)$ 及 $z'(b)$ 分别为右、左导数），则称 $z=z(t)$ 为一条**光滑曲线**，有限条光滑曲线依次相接构成一条**分段光滑曲线**.

一条连续曲线 $C: z=z(t)$（$a\leqslant t\leqslant b$），$z(a)$ 与 $z(b)$ 分别称为 C 的起点与终点，对于满足 $a<t_1<b$，$a\leqslant t_2\leqslant b$ 的 t_1 与 t_2，当 $t_1\neq t_2$ 而有 $z(t_1)=z(t_2)$ 时，点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的**重点**，没有重点的连续曲线 C 称为**简单曲线**，若简单曲线 C 的起点与终点相重合，则称曲线 C 为**简单闭曲线**，显然圆是一条简单闭曲线，它把平面分成两个没有公共点的区域，其中一个有界，另一个无界，且这两区域都以已给的圆作为边界.

一般地有下面的 Jordan 定理（证明略）

任一条简单闭曲线把整个平面分成两个没有公共点的区域，一个有界的称它为内区域，另一个无界的称它为外区域，这两个区域都以已给的简单闭曲线作为边界.

现在我们可把区域加以分类.

定义 2.8 设 D 是平面上一个区域，若 D 内任何简单闭曲线的内区域中每一点都属于 D，则称 D 为**单连通区域**，不是单连通的区域称为**多连通区域**.

例 1 圆 $|z|<r$ 是一个单连通区域，而圆环 $0<r_1<|z|<r_2$ 就是多连通区域.

例 2 满足 $(1-\mathrm{i})z+(1+\mathrm{i})\bar{z}>0$ 的所有点 z 组成的集合是一个半平面，它是单连通无界区域，其边界为直线

$$(1-\mathrm{i})z+(1+\mathrm{i})\bar{z}=0 \quad 即 \quad x+y=0.$$

例 3 满足 $0<\arg(z-1)<\dfrac{\pi}{4}$ 及 $2<\mathrm{Re}z<3$ 的所有点 z 所组成的集合是以直线 $\mathrm{Re}z=2$ 与 $\mathrm{Re}z=3$ 为左、右底，以直线 $\arg(z-1)=\dfrac{\pi}{4}$ 和实轴为上下腰的一个梯形（不包括周界）它是单