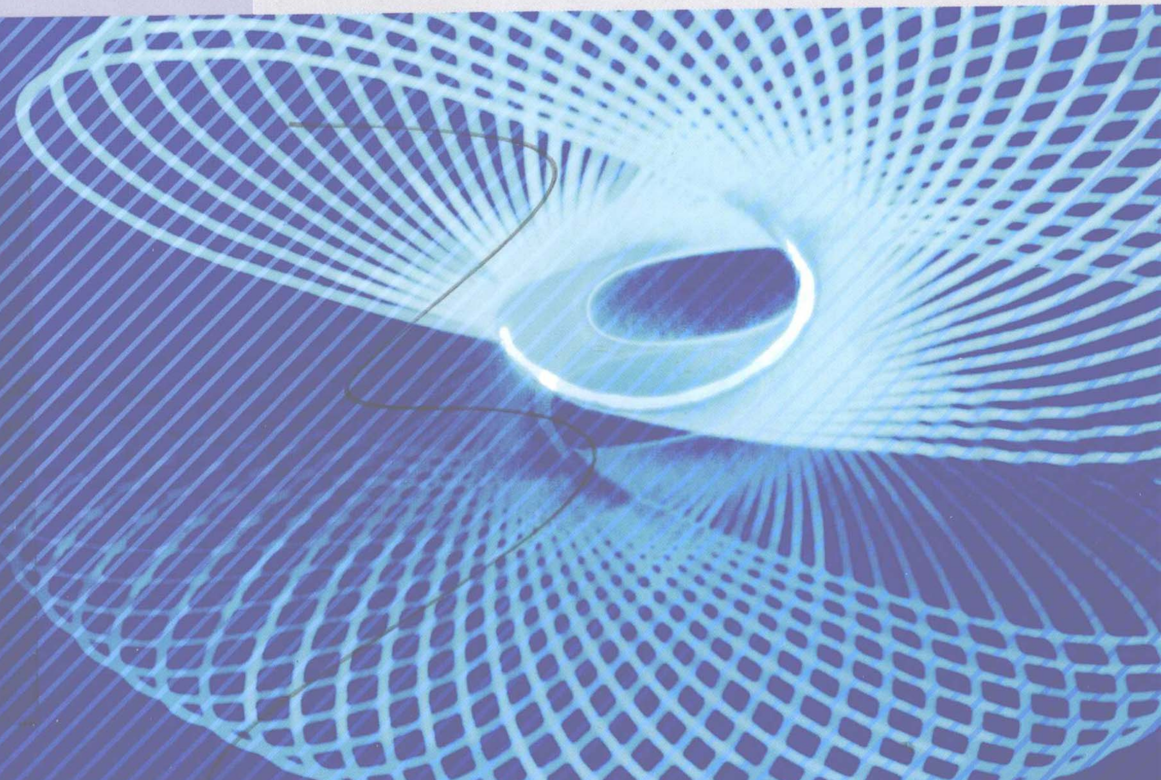
高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

线性代数

◎ 姚　立　王树华　主编



高等教育出版社

高等学校经济管理类数学基础课程系列教材

线 性 代 数

姚 立 王树华 主编

高等教育出版社

内容提要

本书内容包括行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型。教材内容处理上在不影响线性代数学科系统性、科学性前提下，简化和略去了某些结论冗长的推导而仅给出直观解释，力求概念、理论与方法的表述简单、直观、通俗易懂，易于学生接受，既可以培养学生的收敛性思维，又能够培养学生的发散性、创造性思维。本教材可供经济管理类本科各专业使用。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/姚立，王树华主编．—北京：高等教育出版社，2008.5

ISBN 978-7-04-023912-6

Ⅰ．线…　Ⅱ．①姚…②王…　Ⅲ．线性代数-高等数学-教材　Ⅳ．O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 042065 号

策划编辑 马　丽　**责任编辑** 张耀明　**封面设计** 张申申　**责任绘图** 吴文信
版式设计 余　杨　**责任校对** 金　辉　**责任印制** 尤　静

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街 4 号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京铭成印刷有限公司	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2008 年 5 月第 1 版
印　　张	10.25	**印　　次**	2008 年 5 月第 1 次印刷
字　　数	190 000	**定　　价**	13.40 元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23912-00

前　言

随着高等教育规模快速发展，为全面贯彻落实科学发展观，切实把高等教育重点放在提高质量上，教育部、财政部实施了“高等学校本科教学质量与教学改革工程”，其中教材建设是这一教学质量工程的重要内容。在这样的背景下，编写一套适合高等学校经济管理类各专业便于教、便于学的基础数学教材是我们多年的心愿，也是我们教学一线从事多年教学的老师们义不容辞的责任。在高等教育出版社大力支持下，我们组织了有三十余年教学经验的老师，在省级精品课教案的基础上，编写了这套教材。这套教材包括《微积分》、《线性代数》、《概率论与数理统计》。该套教材内容框架是根据教育部数学与统计教学指导委员会2007年制订的“经济管理类本科数学基础课程教学基本要求”，针对经济管理类各专业编写的。

《微积分》内容包括：函数、极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用，不定积分、定积分、向量代数与空间解析几何、多元函数微积分、无穷级数、微分方程和差分方程简介。

《线性代数》内容包括：行列式、矩阵、线性方程组、向量组的线性相关性、相似矩阵与二次型。

《概率论与数理统计》内容包括概率论与数理统计两部分。概率论部分有：随机事件及其概率、随机变量及其概率分布、随机变量的数字特征、多维随机变量、大数定律与中心极限定理。数理统计部分有：数理统计的基本概念、抽样分布定理、参数的点估计和区间估计、假设检验及回归分析。

本教材在内容处理上注意到了经济管理类专业和地方高校生源的特点，尽量使数学概念、理论与方法易于学生接受。在不影响本学科的系统性、科学性的前提下，简化和略去了某些结论冗繁的推导或仅给出直观解释，尤其重视知识的来龙去脉，概念的产生背景，有意识地融入数学文化的教育。

在例题与习题的配置上注意到了学习难度的循序渐进，选择了一些经典例子或历年研究生入学考试试题。习题中的 **A** 组题是根据教学基本内容和要求编制的，学生通过本组习题的训练能够达到教学目的要求；而 **B** 组题属于综

合应用能力训练题，多是结合全国硕士研究生入学统一考试“数学考试大纲”内容和历年考试真题配置的综合训练题。

教材中“*”号标出的内容为选学内容，可根据课时决定是否讲授。

由于编者水平有限，本书难免会有欠妥和错误之处，我们衷心希望得到专家、学者和读者的批评指正，使这套教材在教学实践中不断完善和改进。

编者

2007.07

目　　录

第一章　行列式……………………………………………………………… 1

§1.1　二阶与三阶行列式 ………………………………………………… 1
§1.2　n 级排列与逆序数 ………………………………………………… 4
§1.3　n 阶行列式的定义 ………………………………………………… 5
§1.4　n 阶行列式的性质 ………………………………………………… 9
§1.5　行列式按行(列)展开 ……………………………………………… 14
§1.6　克拉默法则…………………………………………………………… 20
习题一 ………………………………………………………………………… 24

第二章　矩阵及其运算 ……………………………………………………… 28

§2.1　矩阵………………………………………………………………… 28
§2.2　矩阵的运算………………………………………………………… 31
§2.3　逆矩阵……………………………………………………………… 38
§2.4　分块矩阵…………………………………………………………… 44
习题二 ………………………………………………………………………… 49

第三章　矩阵的初等变换与线性方程组 …………………………………… 54

§3.1　线性方程组的消元法与矩阵的初等变换………………………… 54
§3.2　初等矩阵与初等变换……………………………………………… 59
§3.3　矩阵的秩…………………………………………………………… 63
§3.4　线性方程组解的判定……………………………………………… 66
习题三 ………………………………………………………………………… 71

第四章　向量组的线性相关性 ……………………………………………… 75

§4.1　n 维向量及其线性运算 …………………………………………… 75
§4.2　向量组及其线性组合……………………………………………… 77
§4.3　向量组的线性相关性……………………………………………… 81
§4.4　向量组的秩………………………………………………………… 85
§4.5　线性方程组解的结构……………………………………………… 88

§4.6* 向量空间 …… 96
习题四 …… 100

第五章　相似矩阵与二次型 …… 106

§5.1 向量的内积、长度及正交性 …… 106
§5.2 方阵的特征值与特征向量 …… 112
§5.3 相似矩阵 …… 118
§5.4 实对称矩阵的对角化 …… 122
§5.5 二次型的基本概念 …… 127
§5.6 二次型的标准形和规范形 …… 130
§5.7 二次型和对称矩阵的有定性 …… 137
习题五 …… 142

习题参考答案 …… 145
参考文献 …… 156

第一章 行 列 式

行列式是研究线性方程组的一个重要工具，而线性方程组是线性代数中的一个重要组成部分. 本章在复习二阶、三阶行列式的基础上，把行列式的概念推广到 n 阶行列式，并介绍 n 阶行列式的性质、计算以及用行列式解线性方程组——克拉默法则.

§1.1 二阶与三阶行列式

一、二阶行列式

含有两个未知数两个方程的线性方程组的一般形式是

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2, \end{cases} \tag{1.1}$$

其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，b_1，b_2 是常数，x_1，x_2 是未知数. a_{ij}表示第 i 个方程第 j 个未知数的系数.

用消元法解此二元线性方程组可得

$$\begin{cases} (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2, \\ (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - a_{21}b_1, \end{cases}$$

当 $a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \neq 0$ 时，

$$x_1 = \frac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \quad x_2 = \frac{b_2a_{11} - a_{21}b_1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \tag{1.2}$$

为了便于记忆上述解的公式(1.2)，引入记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},$$

并将其定义为 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$，

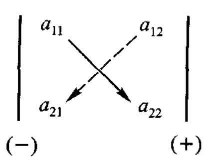


图 1－1

称之为**二阶行列式**. 二阶行列式的计算规则可根据图 1－1 来记忆，其称为二阶行列式的**对角线法则**.

利用二阶行列式的概念，(1.2)中的分母可记为 $D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，它是方程

组未知数的系数按它们在方程中的位置排列构成的行列式，称为**方程组的系数行列式**．(1.2)中的分子可记为 $D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22}\end{vmatrix}$，$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2\end{vmatrix}$，它是常数项 b_1、b_2 分别代替系数行列式中 x_1、x_2 的系数得到的行列式.

所以，当 $D\neq 0$ 时，方程组(1.1)的解可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\ x_2=\frac{D_2}{D}\quad (\text{其中 } D\neq 0).$$

可以看到，对于含有两个未知数两个方程的线性方程组的解，用二阶行列式表示既方便又容易记忆.

例 1.1　计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5\end{vmatrix}.$$

解　$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -5\end{vmatrix}=1\times(-5)-2\times 3=-11.$

例 1.2　解线性方程组

$$\begin{cases}\cos\theta\cdot x_1-\sin\theta\cdot x_2=a,\\ \sin\theta\cdot x_1+\cos\theta\cdot x_2=b.\end{cases}$$

解
$$D=\begin{vmatrix}\cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta\end{vmatrix}=1\neq 0,$$

而

$$D_1=\begin{vmatrix} a & -\sin\theta \\ b & \cos\theta\end{vmatrix}=a\cos\theta+b\sin\theta,$$

$$D_2=\begin{vmatrix}\cos\theta & a \\ \sin\theta & b\end{vmatrix}=b\cos\theta-a\sin\theta,$$

所以

$$x_1=\frac{D_1}{D}=a\cos\theta+b\sin\theta,\ x_2=\frac{D_2}{D}=b\cos\theta-a\sin\theta.$$

二、三阶行列式

将二阶行列式推广，可得三阶行列式.

定义 1.1　用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$$

来表示代数和 $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$，称其为**三阶行列式**，行列式中的横排、纵排分别称为它的行和列，数 $a_{ij}(i,j=1,2,3)$ 称为它的元素．三阶行列式的计算也可按其对角线法则如图(1－2)来记忆：

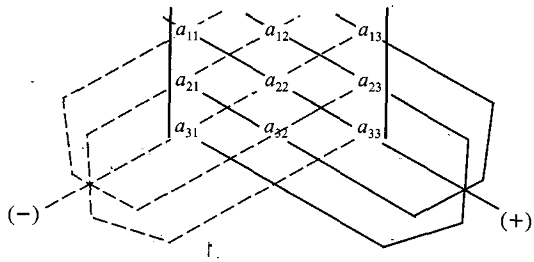


图 1－2

其中，主对角线(从左上角到右下角的实连线)上三个元素的积取正号，次对角线(从右上角到左下角的虚连线)上三个元素的积取负号，将这六项相加便得到该三阶行列式的值(注意这一方法只适用于二阶和三阶行列式)．

有了三阶行列式，含有三个未知数三个方程的线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2, \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3, \end{cases}$$

当系数行列式 $D\neq 0$ 时，它的解就可表示为

$$x_1=\frac{D_1}{D},\quad x_2=\frac{D_2}{D},\quad x_3=\frac{D_3}{D}\quad (\text{其中 } D\neq 0).$$

这里 D,D_1,D_2,D_3 构成的规律与二阶行列式中 D,D_1,D_2 的构成规律是一样的，即 D 是由方程组未知数 x_1,x_2,x_3 的系数按它们在方程组的位置构成的行列式；D_1,D_2,D_3 是用常数 b_1,b_2,b_3 分别代替 D 中的 x_1,x_2,x_3 的系数得到的行列式．

例 1.3 用对角线法则计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} 4 & -3 & 5 \\ 3 & -2 & 8 \\ 1 & -7 & -5 \end{vmatrix}.$$

解 $D=4\times(-2)\times(-5)+(-3)\times 8\times 1+5\times 3\times(-7)$

$-5\times(-2)\times 1-4\times 8\times(-7)-(-3)\times 3\times(-5)=100.$

例 1.4 解线性方程组

$$\begin{cases} 5x_1+2x_2+3x_3=-2, \\ 2x_1-2x_2+5x_3=0, \\ 3x_1+4x_2+2x_3=-10. \end{cases}$$

解　因为 $D=\begin{vmatrix}5&2&3\\2&-2&5\\3&4&2\end{vmatrix}=-56$，$D_1=\begin{vmatrix}-2&2&3\\0&-2&5\\-10&4&2\end{vmatrix}=-112$；

$$D_2=\begin{vmatrix}5&-2&3\\2&0&5\\3&-10&2\end{vmatrix}=168,\quad D_3=\begin{vmatrix}5&2&-2\\2&-2&0\\3&4&10\end{vmatrix}=112,$$

所以方程组的解为

$$x_1=\frac{D_1}{D}=2,\quad x_2=\frac{D_2}{D}=-3,\quad x_3=\frac{D_3}{D}=-2.$$

§1.2　n 级排列与逆序数

我们已经熟悉二、三阶行列式，利用它们可将二元、三元线性方程组的解简洁地表示出来．为研究 n 元线性方程组，须引进 n 阶行列式的概念．为了给出 n 阶行列式的概念，先介绍排列和逆序的知识．

定义 1.2　由 n 个不同的数 $1,2,\cdots,n$ 组成的一个有序数组 $i_1i_2\cdots i_n$，称为一个 n 级**排列**．

例如，由数 1，2，3 所组成的所有不同的 3 级排列共有 $3!=6$ 个．它们分别是

$$123,132,213,231,312,321.$$

定义 1.3　在一个 n 级排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 中，如果较大的数 i_s 排在较小的数 i_t 的前面，即 $i_s>i_t(t>s)$，称这一对数 i_s，i_t 构成一个**逆序**．一个排列中的所有逆序之和称为这个排列的**逆序数**．记为 $N(i_1i_2\cdots i_n)$．如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数是偶数，则称它为**偶排列**．逆序数是零的排列规定它是偶排列，如果排列 $i_1i_2\cdots i_n$ 的逆序数是奇数，则称它为**奇排列**．

逆序数的计算方法：分别计算出排列中每个数前面比它大的数的个数之和，即算出排列中从右到左的每个数的逆序数，这个排列各个数的逆序数总和即为该排列的逆序数．

例如，5 级排列 15432，25341，35412 的逆序数分别是

$$N(15432)=3+2+1+0=6,$$
$$N(25341)=4+1+1+0=6,$$
$$N(35412)=3+3+1+0=7.$$

可见，排列 15432 的逆序数为 6，它是偶排列．而排列 35412 的逆序数为 7，为奇排列．排列 $123\cdots n$ 的逆序数为零，是偶排列，也称自然排列．

排列 $n(n-1)\cdots321$ 的逆序数为

$$N(n(n-1)\cdots 21)=(n-1)+(n-2)+\cdots+2+1=\frac{n(n-1)}{2}.$$

在一个 n 级排列中，如果对调其中的两个数，而其余数字位置保持不变，就可得到另一个 n 级排列．对于排列所施行的这种变换称为**对换**.

定理 1.1　经过一次对换改变排列的奇偶性.

证明　(1) 先证明相邻对换的情形.

设排列为 $AijB$，其中 A，B 表示除 i，j 两个数外其余的数，经过对换 (i,j) 变换为排列 $AjiB$．比较上面两个排列中的逆序，显然，A，B 中数的次序没有改变，并且 i，j 与 A，B 中数的次序也没有改变．仅仅改变了 i 与 j 的次序，因此，新排列仅比原排列增加了一个逆序(当 $i<j$ 时)，或减少了一个逆序(当 $i>j$ 时)，所以它们的奇偶性相反.

(2) 再证一般对换的情形.

设原排列为 $Aij_1j_2\cdots j_tjB$，经过对换 (i,j) 变成新排列 $Ajj_1j_2\cdots j_tiB$，原排列中将数码 i 依次与 $j_1,j_2,\cdots,j_t,j$ 作 $t+1$ 次相邻对换，变成 $Aj_1j_2\cdots j_tjiB$，再将 j 依次与 $j_t,j_{t-1},\cdots,j_1$ 作 t 次相邻对换得到新排列，即新排列可以由原排列经过 $2t+1$ 次相邻对换得到．由(1)的结论可知它改变了奇数次原排列的奇偶性，所以它与原排列的奇偶性相反.　□

例如，32514 的逆序数为 5，对换 1 和 5 后变为 32154，逆序数为 4.

定理 1.2　在全部 n 级排列中($n\geqslant 2$)，奇排列与偶排列的个数相等，各为 $\frac{n!}{2}$ 个.

显然，所有的 n 级排列共有 $n!$ 个，将每个排列中的第 1，2 个数字对换，其余数字保持不变，这时得到的仍是原来的 $n!$ 个 n 级排列，然而每个排列的奇偶性都改变了．由此可见，在 n 级排列中，奇排列与偶排列的个数是相同的，且各占 $\frac{n!}{2}$.

§1.3　n 阶行列式的定义

一、概念的引入

利用二阶和三阶行列式，得到了二元和三元线性方程组的求解公式，那么对于 n 元线性方程组能否得到类似的求解公式呢？为此，先研究二阶和三阶行列式的结构规律，在此基础上定义 n 阶行列式.

下面分析三阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

它的展开式是 6 项，即 3!项的代数和；每项都是位于不同行不同列的三个元素的乘积. 其一般形式(除正负号外)可以写成

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}.$$

这里元素的行下标形成自然排列，列下标的排列 $j_1j_2j_3$ 是 1，2，3 的某一个排列；当该排列是偶排列时，则此项带正号；若为奇排列则带负号. 即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2j_3)} (-1)^{N(j_1j_2j_3)} a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3},$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2j_3)}$ 表示对所有的 3 级排列求和

二、n 阶行列式的定义

定义 1.4　n^2 个数 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$，组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1.3}$$

表示所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1.4}$$

的代数和，其中 $j_1j_2\cdots j_n$ 构成一个 n 级排列，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，项(1.4)取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，项(1.4)取负号，则称(1.3)为 **n 阶行列式**，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{(j_1j_2\cdots j_n)} (-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)} a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}, \tag{1.5}$$

其中 $\sum\limits_{(j_1j_2\cdots j_n)}$ 表示对所有的 n 级排列求和.

定义表明，一个 n 阶行列式是 n!项的代数和，而每项都是位于不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 所以为了计算 n 阶行列式，要先作所有位于不同行不同列的元素的乘积，并把构成这些乘积的元素按行标排成自然顺序，然后由

列标所构成的排列的奇偶性来确定这一项的符号.

例 1.5 利用定义计算行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

解 这是一个四阶行列式，展开式应有 $4!=24$ 项，但由于该行列式的元素中含有多个零，所以不等于零的项数大大减少了. 展开式中的一般形式是

$$a_{1j_1}a_{2j_2}a_{3j_3}a_{4j_4}.$$

显然，对于a_{1j_1}，如果 $j_1\neq 4$，那么 $a_{1j_1}=0$，只有 $j_1=4$ 时不为零；同理，对于 $a_{2j_2},a_{3j_3},a_{4j_4}$，只有 $j_2=3$，$j_3=2$，$j_4=1$ 时不为零. 所以该行列式中，不为零的项只有 $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$，而 4321 的逆序数为 6，这一项前面的符号是正的. 所以

$$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=1\times 2\times 3\times 4=24.$$

例 1.6 计算行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

解 行列式一般项的形式是

$$(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

因为行列式中第 n 行除 a_{nn} 以外全为零，故只有取 $j_n=n$ 时不为零；再考察第 $n-1$ 行j_{n-1}取值，因为它不能再取第 n 列，因此只有取 $j_{n-1}=n-1$ 时不为零，依次可知 $j_{n-2}=n-2,\cdots,j_1=1$. 不难看出，展开式中除 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 不为零外，其余项都是零. 而这一项的列标排列为偶排列，所以这一项前面的符号是正的，于是

$$D=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

该行列式称为上三角形行列式，即**上三角形行列式等于主对角线上元素的乘积**.

例如，$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ 0 & 2 & z \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}=1\times 2\times 3=6.$

除此以外，常见的特殊的行列式还有：

1. 主对角形行列式

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

2. 副对角形行列式

$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & \lambda_1 \\ 0 & \cdots & \lambda_2 & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ \lambda_n & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}}\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n.$$

3. 下三角形行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

下三角形行列式也等于主对角线上元素的乘积.

利用 n 阶行列式的定义(1.5)可得下面两个结论.

定理 1.3　n 阶行列式(1.3)可表示为

$$D = \sum_{(i_1i_2\cdots i_n)} (-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)} a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn},$$

其中$(i_1i_2\cdots i_n)$为 n 级排列.

***证明**　因为列标排列 $12\cdots n$ 的逆序数等于 0，所以逆序数可视为行标排列与列标排列的逆序数之和. 对于一般项$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$，如果交换两个元素 a_{i_ii}与 a_{i_jj}，则行标排列由 $i_1\cdots i_i\cdots i_j\cdots i_n$ 变为 $i_1\cdots i_j\cdots i_i\cdots i_n$，由定理 1.1 可知，其逆序数的奇偶性发生改变；列标排列由 $1\cdots i\cdots j\cdots n$ 变为 $1\cdots j\cdots i\cdots n$，其逆序数的奇偶性也发生改变. 而行标排列与列标排列的逆序数之和的奇偶性不改变.

经过若干次元素的对换，$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn}$总可变为

$$(-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

则有 $N(i_1i_2\cdots i_n)+0$ 与 $0+N(k_1k_2\cdots k_n)$的奇偶性相同，即$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)} = (-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}$.

所以

$$(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)}a_{i_11}a_{i_22}\cdots a_{i_nn} = (-1)^{N(k_1k_2\cdots k_n)}a_{1k_1}a_{2k_2}\cdots a_{nk_n}.$$

而后式即是行列式的原定义式. □

定理 1.4　n 阶行列式(1.3)可表示为

$$D=\sum_{\substack{(i_1i_2\cdots i_n)\\(j_1j_2\cdots j_n)}}(-1)^{N(i_1i_2\cdots i_n)+N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n},$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 与 $j_1j_2\cdots j_n$ 均为 n 级排列.

(该定理证明从略)

§1.4　n 阶行列式的性质

利用行列式的定义，计算某些特殊的行列式相对简单一些，对一般的行列式而言，随着行列式阶数的增大，用定义计算行列式相当复杂，为了简化行列式的计算，先来研究行列式的性质.

性质 1.1　将行列式的行、列互换，行列式的值不变. 即记

$$D=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&\cdots&a_{1n}\\a_{21}&a_{22}&\cdots&a_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{n1}&a_{n2}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},\quad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{21}&\cdots&a_{n1}\\a_{12}&a_{22}&\cdots&a_{n2}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\a_{1n}&a_{2n}&\cdots&a_{nn}\end{vmatrix},$$

则 $D=D^{\mathrm{T}}$.

其中，行列式 D^{T} 称为 D 的**转置行列式**.

证明　设

$$D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix}b_{11}&b_{12}&\cdots&b_{1n}\\b_{21}&b_{22}&\cdots&b_{2n}\\\vdots&\vdots&&\vdots\\b_{n1}&b_{n2}&\cdots&b_{nn}\end{vmatrix},$$

则 $b_{ij}=a_{ji}(i,j=1,2,\cdots,n)$.

按行列式的定义知

$$D^{\mathrm{T}}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}b_{1j_1}b_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=\sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{j_1}a_{j_22}\cdots a_{j_nn},$$

由定理 1.3 知 $D=D^{\mathrm{T}}$. □

这一性质表明，行列式中行、列地位是相同的，对行列式的行成立的每一个性质对于列也一定成立，反之也如此. 所以下面的性质仅对行进行讨论.

性质 1.2　互换行列式的两行(列)，行列式的值变号. 即设

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\quad D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{s1} & a_{s2} & \cdots & a_{sn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

则　$D=-D_1$.

证明　记 D 的一般项中 n 个元素的乘积为

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n},$$

它的元素在 D 中位于不同的行不同的列，因而在 D_1 中也位于不同的行不同的列，所以也是 D_1 的一般项. 因为 D_1 是交换 D 的第 i 行与第 s 行，各元素所在的列并没有改变，所以它在 D 中的符号为

$$(-1)^{N(1\cdots i\cdots s\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

而在 D_1 中的符号为

$$(-1)^{N(1\cdots s\cdots i\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)},$$

由于排列 $1\cdots i\cdots s\cdots n$ 与排列 $1\cdots s\cdots i\cdots n$ 的奇偶性相反，所以

$$(-1)^{N(1\cdots i\cdots s\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}=-(-1)^{N(1\cdots s\cdots i\cdots n)+N(j_1\cdots j_i\cdots j_s\cdots j_n)}.$$

因而 D_1 中的每一项都是 D 中的相应项的相反数，故 $D=-D_1$.　□

推论 1　若行列式的某两行(列)元素完全相同，则此行列式的值等于零.

证明　把这相同的两行互换得：$D=-D$，故 $D=0$.　□

规定：以 r_i 表示行列式的第 i 行，c_i 表示第 i 列；交换两 i，j 两行，记作 $r_i\leftrightarrow r_j$，交换 i，j 两列记作 $c_i\leftrightarrow c_j$.

性质 1.3　行列式的某一行(列)中所有元素都乘以同一个数，等于用此数乘以这个行列式. 即

$$D_1=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1} & ka_{i2} & \cdots & ka_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=kD.$$

上式为用数 k 乘以第 i 行的所有元素，记作 $(k\times r_i)$，如果用数 k 乘以第 i 列的所有元素，记作 $(k\times c_i)$.

证明　根据行列式的定义，有

$$D_1=\sum_{(j_1j_2\cdots j_n)}(-1)^{N(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots(ka_{ij_i})\cdots a_{nj_n}$$