面向21世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学学习指导与解题指南

梁保松　主编

中国农业出版社

高等数学学习指导与解题指南

面向 21 世纪课程教材

Textbook Series for 21st Century

高等数学
学习指导与解题指南

梁保松　主编

中国农业出版社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学学习指导与解题指南 / 梁保松主编. —北京：中国农业出版社，2005.8
面向21世纪课程教材
ISBN 7-109-10061-8

Ⅰ.高… Ⅱ.梁… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材
Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2005）第 096303 号

中国农业出版社出版
（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）
（邮政编码 100026）
出版人：傅玉祥
责任编辑 朱 雷

中国农业出版社印刷厂印刷 新华书店北京发行所发行
2005 年 8 月第 1 版 2005 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：850mm×1168mm 1/16 印张：18.75
字数：455 千字
定价：25.00 元
（凡本版图书出现印刷、装订错误，请向出版社发行部调换）

内 容 提 要

本书是与面向 21 世纪课程教材《高等数学》(梁保松、陈涛主编)配套使用的学习指导书、教师参考书和考研复习书．其内容有:函数的极限与连续、导数与微分、微分中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、多元函数微分学、二重积分、无穷级数、微分方程与差分方程．

本书内容按章编写,每章分四部分:一、内容提要;二、范例解析;三、自测题;四、考研题解析．

本书可作为学习指导书供学生使用,可作为教学参考书供教师使用,也可作为考研复习书供考研者使用．

此为试读,需要完整PDF请访问: www.ertongbook.com

主　编　梁保松

副主编　陈　涛　张玉峰

参　编　赵翠萍　吴瑞武　胡丽萍　李　晔
　　　　王建平　陈　振　翟振杰

前　　言

本书是梁保松、陈涛主编的普通高等学校面向21世纪课程教材《高等数学》配套使用教材．按照配套教材的要求，本书对总体框架进行了整合，内容按章编写，每章结构如下：

一、内容提要　此版块对每一章、节必须掌握的概念、性质和公式进行了归纳，供证明、计算时查阅．

二、范例解析　此版块对每章、节题型进行了分类解析，并对每种题型的解题思路、技巧进行了归纳总结，有些题给出了多种解法，对容易出错的地方还作了详尽注解．

三、自测题　此版块配置了适量难易程度适中的习题及参考答案，所选题型是编者多年教学实践中积累的成果，供读者自测本章内容掌握的程度．

四、考研题解析　此版块涵盖了1987年至2005年的考研试题，并作了详尽解答，供有志考研的读者选用．

本书在编写过程中注意专题讲述与范例解析相结合，注重数学思维与数学方法的论述，以求思想观点、方法上的融会贯通．并以“注意”的形式对相关专题加以分析和延拓，这是本书的特色．本书还具有概念清晰、内容全面、方法多样、综合性强等特点．

本书是编者在长期教学实践中积累的教学资料与经验之汇编，是在深入研究教学大纲与研究生数学考试大纲之后撰写而成的．我们期望本书不仅是广大学生学习数学的指导书，教师教学的参考书，而且也是报考硕士研究生者的一册广度与深度均较为合适的复习用书，更期望能使读者在思维方法与解决问题能力等方面都有相当程度的提高．

参加本书编写的有：梁保松、陈涛、张玉峰、赵翠萍、吴瑞武、胡丽萍、王建平、翟振杰、陈振、李晔，最后由梁保松教授统一定稿．

错漏之处，敬请各位同仁与朋友们扶正，我们不胜感激！

编　者

2005年7月10日

目　录

第一章　函数的极限与连续

内　容　提　要

一、函数的概念

1. 函数的定义　设 x 和 y 是两个变量，D 是一非空数集. 如果对于每个 $x \in D$，变量 y 按照一定法则 f 有惟一确定的数值与 x 对应，则称 y 是 x 的函数，记作 $y = f(x)$. 数集 D 叫做这个函数的定义域，f 叫做对应法则，x 叫做自变量，y 叫做因变量.

2. 分段函数　自变量在不同变化范围内，对应法则用不同式子表示的函数，称为分段函数.

3. 复合函数　设函数 $y = f(u)$ 的定义域为 E，函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域为 D，值域为 W. 若 $W \cap E$ 非空，则称函数 $y = f[\varphi(x)]$ 是由函数 $y = f(u)$ 和函数 $u = \varphi(x)$ 复合而成的复合函数，u 为中间变量.

二、极限的概念

1. 极限的定义

定义　设 $f(x)$ 在 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内有定义，A 是常数，若对 $\forall \varepsilon > 0$，$\exists \delta > 0$，使得当 $0 < |x - x_0| < \delta$ 时，有 $|f(x) - A| < \varepsilon$，则称 A 是函数 $f(x)$ 当 $x \to x_0$ 时的极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$.

$x < x_0$，$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限 A 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的左极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^-} f(x) = A$ 或 $f(x_0 - 0) = A$.

$x > x_0$，$x \to x_0$ 时函数 $f(x)$ 的极限 A 称为 $f(x)$ 在点 x_0 的右极限，记作 $\lim\limits_{x \to x_0^+} f(x) = A$ 或 $f(x_0 + 0) = A$.

定理　$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow f(x_0 - 0) = f(x_0 + 0) = A$.

2. 极限的性质

(1) 惟一性　　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$ 存在，则必惟一.

(2) 有界性　　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，则 $\exists \delta > 0$，使 $f(x)$ 在 $N(\hat{x}_0, \delta)$ 内有界.

(3) 单调性　　若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A$，$\lim\limits_{x \to x_0} g(x) = B$，且 $\exists \delta > 0$，当 $x \in N(\hat{x}_0, \delta)$ 时 $f(x) \leqslant g(x)$，则 $A \leqslant B$.

特别地，若 $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = A > 0$（或 $A < 0$），则 $\exists \delta > 0$，当 $x \in N(\hat{x}_0, \delta)$ 时 $f(x) > 0$（或 $f(x) < 0$）.

(4) 两边夹原理　若 $\exists\delta>0$，当 $x\in N(\hat{x}_0,\delta)$ 时，$f(x)\leqslant g(x)\leqslant h(x)$，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=A$.

(5) 单调有界原理　单调有界数列必有极限.

3. 无穷小量　若 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则称函数 $f(x)$ 为当 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

(1) 等价代换法则　设 $\alpha\sim\alpha',\beta\sim\beta'$，且 $\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$ 存在，则 $\lim\dfrac{\beta}{\alpha}=\lim\dfrac{\beta'}{\alpha'}$.

(2) 极限与无穷小量的关系　$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=A$（或 $\lim\limits_{(x\to\infty)}f(x)=A$）$\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha$，其中 A 为常数，α 为 $x\to x_0$（或 $x\to\infty$）时的无穷小量.

(3) 无穷小量的性质　有限个无穷小量的和仍是无穷小量；有限个无穷小量的积仍是无穷小量；有界变量与无穷小量之积仍是无穷小量.

4. 无穷大量　设 $f(x)$ 在 $N(\hat{x}_0,\delta)$ 内有定义，若 $\forall M>0,\exists\delta>0$，当 $0<|x-x_0|<\delta$ 时，总有 $|f(x)|>M$，则称 $f(x)$ 是当 $x\to x_0$ 时的无穷大量，记作 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=\infty$ 或 $f(x)\to\infty(x\to x_0)$.

定理　无穷大量与无穷小量的关系　在自变量的同一变化过程中，如果 $f(x)$ 为无穷大量，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷小量；如果 $f(x)$ 为无穷小量且 $f(x)\neq0$，则 $\dfrac{1}{f(x)}$ 为无穷大量.

5. 两个重要极限

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin x}{x}=1$. 一般地，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}\dfrac{\sin f(x)}{f(x)}=1$.

(2) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=\mathrm{e}$. 令 $z=\dfrac{1}{x}$，$x\to\infty$ 时，$z\to0$，于是有 $\lim\limits_{z\to0}(1+z)^{\frac{1}{z}}=\mathrm{e}$.

一般地，如果 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}f(x)=0$，则 $\lim\limits_{\substack{x\to x_0\\(x\to\infty)}}[1+f(x)]^{\frac{1}{f(x)}}=\mathrm{e}$.

三、函数的连续

1. 函数连续的定义

(1) 设函数 $y=f(x)$ 在 $N(x_0,\delta)$ 内有定义，且 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续，x_0 称为函数 $f(x)$ 的连续点.

(2) 设函数 $y=f(x)$ 在 $N(x_0,\delta)$ 内有定义，如果当自变量的增量 Δx 趋于零时，相应地函数的增量 $\Delta y=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ 也趋于零，则称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 连续.

2. 左连续与右连续　设 $f(x)$ 在 $N(x_0,\delta)$ 内有定义，若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 左连续；若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $f(x)$ 在点 x_0 右连续.

定理　函数 $f(x)$ 在点 x_0 连续 $\Leftrightarrow\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$.

3. 函数的间断　若函数 $f(x)$ 在点 x_0 不连续，则称 $f(x)$ 在点 x_0 间断，x_0 称为 $f(x)$ 的间

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com

断点.

(1) 第一类间断点　$f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 都存在的间断点 x_0 称为第一类间断点. 第一类间断点包括可去间断点与跳跃间断点两种：

① 可去间断点　$f(x_0-0)=f(x_0+0)$ 的间断点 x_0 称为可去间断点；

② 跳跃间断点　$f(x_0-0)\neq f(x_0+0)$ 的间断点称为跳跃间断点.

(2) 第二类间断点　若 $f(x_0-0)$，$f(x_0+0)$ 至少有一个不存在，则称点 x_0 为第二类间断点.

4. 初等函数的连续性

(1) 基本初等函数在其定义域内是连续的.

(2) 初等函数在其定义区间内连续.

(3) 若 x_0 是初等函数 $f(x)$ 的连续点，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$.

5. 闭区间上连续函数的性质

(1) 有界性定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有界.

(2) 最值定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在该区间上有最大值和最小值.

(3) 介值定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则对介于 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的最大值 M 和最小值 m 之间的任一实数 C，至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使得 $f(\xi)=C$.

(4) 零点(根)存在定理　若 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，且 $f(a)\cdot f(b)<0$，则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$，使 $f(\xi)=0$.

范　例　解　析

例 1　设 $f(x)=\begin{cases}x^3+4x+1, & x\geqslant 1;\\ x+2, & x<1.\end{cases}$ 求 $f(x+4)$ 的定义域.

解　将 $f(x)$ 及定义域中的 x 分别用 $x+4$ 代换，得

$$f(x+4)=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, & x+4\geqslant 1;\\ (x+4)+2, & x+4<1.\end{cases}$$

$$=\begin{cases}(x+4)^3+4(x+4)+1, & x\geqslant -3;\\ x+6, & x<-3.\end{cases}$$

$f(x+4)$ 的定义域为 $(-\infty,-3)\cup[-3,+\infty)=(-\infty,+\infty)$.

注意　已知 $f(x)$ 的定义域，用代入法可求出 $f[\varphi(x)]$ 的定义域.

例 2　设 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2, 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 求 $g(x)=f(2x)+f(x-2)$ 的定义域.

解　因 $f(x)=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2, 1<x\leqslant 2,\end{cases}$　故 $f(2x)=\begin{cases}1, 0\leqslant 2x\leqslant 1\\ 2, 1<2x\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, 0\leqslant x\leqslant \dfrac{1}{2};\\ 2, \dfrac{1}{2}<x\leqslant 1.\end{cases}$

$$f(x-2)=\begin{cases}1, 0\leqslant x-2\leqslant 1\\ 2, 1<x-2\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}1, 2\leqslant x\leqslant 3;\\ 2, 3<x\leqslant 4.\end{cases}$$

因 $f(2x)$ 与 $f(x-2)$ 为分段函数,其定义域分别为

$$\left[0,\frac{1}{2}\right]\cup\left(\frac{1}{2},1\right]=[0,1];\quad [2,3]\cup(3,4]=[2,4],$$

其交为空集,即 $g(x)$ 的定义域为空集,故 $g(x)$ 无意义.

注意 分段函数的定义域是各段函数定义域的并集.

例 3 设 $f(x)=\begin{cases}1+x, & x<0;\\ 1, & x\geqslant 0.\end{cases}$ 求 $f[f(x)]$.

解 $$f[f(x)]=\begin{cases}1+f(x), & f(x)<0;\\ 1, & f(x)\geqslant 0.\end{cases}$$

当 $x<0$ 时,$f(x)=1+x\Rightarrow x<-1$ 时,$f(x)=1+x<0$, 即 $x<-1$ 时,$f[f(x)]=1+f(x)=1+(1+x)=2+x$;

当 $-1\leqslant x<0$ 时,$f(x)=1+x\geqslant 0$, 即 $-1\leqslant x<0$ 时,$f[f(x)]=1$;

当 $x\geqslant 0$ 时,$f(x)=1>0$, 即 $x\geqslant 0$ 时,$f[f(x)]=1$.

故 $$f[f(x)]=\begin{cases}2+x, & x<-1;\\ 1, & x\geqslant -1.\end{cases}$$

例 4 设 $f(x-1)=x(x-1)$, 求 $f(x)$.

解 令 $u=x-1$, 得 $x=u+1$, 且 $f(u)=(1+u)u$, 即 $f(x)=(1+x)x$.

例 5 设 $f(x+1)=\begin{cases}x^2, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ 2x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$ 求 $f(x)$.

解 令 $x+1=u$, 则 $x=u-1$,代入所给函数表示式,得

$$f(u)=\begin{cases}(u-1)^2, & 0\leqslant u-1\leqslant 1\\ 2(u-1), & 1<u-1\leqslant 2\end{cases}=\begin{cases}(u-1)^2, & 1\leqslant u\leqslant 2;\\ 2(u-1), & 2<u\leqslant 3.\end{cases}$$

故所求函数为 $$f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & 1\leqslant x\leqslant 2;\\ 2(x-1), & 2<x\leqslant 3.\end{cases}$$

例 6 已知 $f(x)=e^{x^2}$, $f[\varphi(x)]=1-x$, 且 $\varphi(x)>0$, 求 $\varphi(x)$, 并写出它的定义域.

解 由 $f(x)=e^{x^2}$, 得 $f[\varphi(x)]=e^{[\varphi(x)]^2}$, 又由题设 $f[\varphi(x)]=1-x$, 故 $e^{[\varphi(x)]^2}=1-x$, 即$[\varphi(x)]^2=\ln(1-x)$.

因 $\varphi(x)>0$, 故 $\varphi(x)=\sqrt{\ln(1-x)}$, φ 的定义域为$(-\infty,0)$.

例 7 已知 $af(x)+bf\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{c}{x}$, $|a|\neq|b|$,证明 $f(x)$ 是奇函数.

证 令 $u=\frac{1}{x}$ 代入原方程,得

$$af\left(\frac{1}{u}\right)+bf(u)=cu, \text{即 } af\left(\frac{1}{x}\right)+bf(x)=cx.$$

将原方程及上面方程的两端分别乘 a,b 然后相减得到

$$a^2f(x)-b^2f(x)=\frac{ac}{x}-bcx=\frac{ac-bcx^2}{x}.$$

因 $|a| \neq |b|$,故有 $f(x) = \dfrac{ac - bcx^2}{(a^2 - b^2)x}$,于是

$$f(-x) = -\frac{ac - bcx^2}{(a^2 - b^2)x} = -f(x).$$

例 8 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2} + \dfrac{2}{n^2} + \cdots + \dfrac{n-1}{n^2} + \dfrac{n}{n^2}\right)$.

解 原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}(1 + 2 + \cdots + n) = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{n^2}\cdot\dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{1}{2}\lim\limits_{n\to\infty}\left(1 + \dfrac{1}{n}\right) = \dfrac{1}{2}$.

例 9 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{1}{1\cdot 3} + \dfrac{1}{3\cdot 5} + \cdots + \dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)}\right]$.

解 因$\dfrac{1}{(2n-1)(2n+1)} = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2n-1} - \dfrac{1}{2n+1}\right)$,故

$$\text{原式} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left[\left(1 - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2n+1}\right) = \frac{1}{2}.$$

例 10 求$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{1 + 2 + \cdots + k}$.

解 原式$= \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{2}{k(k+1)} = 2\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)$$

$$= 2\lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = 2.$$

例 11 求$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}$.

解 $0 \leqslant \left|\dfrac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1}\right| \leqslant \dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1}$,$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^2}}{n+1} = 0$,由两边夹法则,得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt[3]{n^2}\sin(n!)}{n+1} = 0.$$

例 12 求$\lim\limits_{n\to\infty}\left[\dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} + \dfrac{2n^2}{(n^2+2)^2} + \cdots + \dfrac{n^3}{(n^2+n)^2}\right]$.

解 令 $x_n = \dfrac{n^2}{(n^2+1)^2} + \dfrac{2n^2}{(n^2+2)^2} + \cdots + \dfrac{n^3}{(n^2+n)^2}$

$$y_n = \frac{n^2}{(n^2+n)^2} + \frac{2n^2}{(n^2+n)^2} + \cdots + \frac{n^3}{(n^2+n)^2}$$

$$z_n = \frac{n^2}{(n^2+1)^2} + \frac{2n^2}{(n^2+1)^2} + \cdots + \frac{n^3}{(n^2+1)^2}$$

则 $y_n \leqslant x_n \leqslant z_n$. 而$\lim\limits_{n\to\infty} y_n = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2(1 + 2 + \cdots + n)}{(n^2+n)^2} = \lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^2\cdot n(n+1)}{2(n^2+n)^2} = \dfrac{1}{2}$.

同理 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = \dfrac{1}{2}$，故$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \dfrac{1}{2}$，即所求极限为$\dfrac{1}{2}$.

例 13 设 $a>0$，$a_1>0$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$，证明 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在，并求$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$.

$\dfrac{a_{n+1}}{a_n} =$

证 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{a}{a_n}}=\sqrt{a}>0\Rightarrow a_n\geqslant\sqrt{a}\ (n\geqslant 2)$，即$\{a_n\}$有下界.

又 $a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)-a_n=\dfrac{a-a_n^2}{2a_n}\leqslant 0\Rightarrow a_{n+1}\leqslant a_n$，即$\{a_n\}$单调递减. 由单调有界原理，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n$ 存在.

设$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=x$，由极限的单调性，有 $x\geqslant\sqrt{a}>0$. 在 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{a}{a_n}\right)$两边取极限$n\to\infty$，得

$$x=\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\Rightarrow x=\pm\sqrt{a}.$$

由于 $x>0$，舍去负值，所以$\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\sqrt{a}$.

例 14 设 $f(x)=\begin{cases}-x, & x\leqslant 1\\ 3+x, & x>1\end{cases}$ 及 $g(x)=\begin{cases}x^3, & x\leqslant 1;\\ 2x-1, & x>1.\end{cases}$ 讨论 $f[g(x)]$ 在 $x=1$ 处的极限.

解 首先求出 $f[g(x)]$ 的表达式.

$x\leqslant 1$ 时，$f(x)=-x$，$f[g(x)]=-g(x)=-x^3$；

$x>1$ 时，$f(x)=3+x$，$f[g(x)]=3+g(x)=3+(2x-1)=2x+2$.

故
$$f[g(x)]=\begin{cases}-x^3, & x\leqslant 1;\\ 2+2x, & x>1.\end{cases}$$

因 $f[g(1+0)]=\lim\limits_{x\to 1^+} f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^+}(2+2x)=4$,

$f[g(1-0)]=\lim\limits_{x\to 1^-} f[g(x)]=\lim\limits_{x\to 1^-}(-x^3)=-1$，$f[g(1+0)]\neq f[g(1-0)]$，

故 $\lim\limits_{x\to 1} f[g(x)]$不存在.

例 15 当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限为________.

(A) 等于 2； (B) 等于 0； (C) 为 ∞； (D) 不存在，但不为 ∞.

解 因 $\lim\limits_{x\to 1^+} e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-} e^{\frac{1}{x-1}}=0$，故 $\lim\limits_{x\to 1^+}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=\lim\limits_{x\to 1^+}(x+1)e^{\frac{1}{x-1}}=+\infty$，$\lim\limits_{x\to 1^-}\left(\dfrac{x^2-1}{x-1}\right)e^{\frac{1}{x-1}}=0$，所以 当 $x\to 1$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在，但不为 ∞. (D) 对.

例 16 求$\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^4+2x^2-3}{x^2-3x+2}$.

解 原式$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x^2-1)(x^2+3)}{(x-2)(x-1)}=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x-1)(x+1)(x^2+3)}{(x-2)(x-1)}$

$=\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{(x+1)(x^2+3)}{x-2}=-8.$

例 16 的特点是分子、分母的极限都是零，不能直接使用商的极限法则. 遇到这类问题，常先分解出公共的无穷小因子，约去后，再求极限.

例 17　求 $\lim\limits_{x\to-1}\dfrac{1+\sqrt[3]{x}}{1+\sqrt[5]{x}}$.　(高阶等价)

解　令 $x=y^{15}$，则 $x\to-1$ 时，$y\to-1$，于是

$$\text{原式}=\lim_{y\to-1}\frac{1+y^5}{1+y^3}=\lim_{y\to-1}\frac{(1+y)(y^4-y^3+y^2-y+1)}{(1+y)(y^2-y+1)}$$

$$=\lim_{y\to-1}\frac{y^4-y^3+y^2-y+1}{y^2-y+1}=\frac{5}{3}.$$

例 18　求 $\lim\limits_{x\to1}\left(\dfrac{3}{1-x^3}-\dfrac{1}{1-x}\right)$.

解　$\text{原式}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{3-(x^2+x+1)}{1-x^3}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{-(x+2)(x-1)}{(1-x)(x^2+x+1)}=\lim\limits_{x\to1}\dfrac{x+2}{x^2+x+1}=1.$

当 $x\to x_0$ 时，极限函数呈 $\infty-\infty$ 的形式，应先通分化成有理分式函数，然后分离出并约去无穷小因子.

例 19　求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x$；　1　　(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}$；

(3) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{x^3}$；　$\frac{1}{2}$　　(4) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}$；　9

(5) $\lim\limits_{x\to0}(\cos x)^{1/\sin^2\frac{x}{2}}$；　　(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

解　(1) $\lim\limits_{x\to0}x\cot x=\lim\limits_{x\to0}\left(\dfrac{x}{\sin x}\cdot\cos x\right)=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x}{\sin x}\cdot\lim\limits_{x\to0}\cos x=1.$

(2) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{1-\cos2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin^2x}{x\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2\sin x}{x}=2.$

(3) $$\lim_{x\to0}\frac{\tan x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x\left(\dfrac{1}{\cos x}-1\right)}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x(1-\cos x)}{x^3\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}\cdot\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2\cdot\cos x}=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2\dfrac{x}{2}}{x^2}=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}\left[\frac{\sin\dfrac{x}{2}}{\dfrac{x}{2}}\right]^2=\frac{1}{2}.$$

(4) $$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{-2}{x^2+1}\right)^{x^2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{2}{x^2+1}\right)^{\left(-\frac{x^2+1}{2}\right)\left(\frac{-2x^2}{x^2+1}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1-\frac{-2}{x^2+1}\right)^{-\frac{x^2+1}{2}\cdot\lim\limits_{x\to+\infty}\left(-\frac{2x^2}{x^2+1}\right)}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(5) $$\lim_{x\to0}(\cos x)^{\frac{1}{\sin^2x/2}}=\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{\sin^2x/2}}=\lim_{x\to0}\left(1-2\sin^2\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{-2\sin^2x/2}(-2)}=\mathrm{e}^{-2}.$$

(6) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{1}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^{2\cdot\frac{x}{2}}$

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{x}{2}}=\lim_{x\to\infty}\left(1+\sin\frac{2}{x}\right)^{\frac{1}{\sin2/x}\cdot\frac{\sin2/x}{2/x}}=\mathrm{e}.$$

无穷小代换是简化极限式最重要的方法，无穷小代换有下列 12 个公式：

(1) $\sin x\sim x$； (2) $\tan x\sim x$； (3) $\arcsin x\sim x$；

(4) $\arctan x\sim x$； (5) $1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$； (6) $\ln(1+x)\sim x$；

(7) $\mathrm{e}^x-1\sim x$； (8) $a^x-1\sim x\ln a$； (9) $(1+x)^{\lambda}-1\sim\lambda x$；

(10) $(1+x)^{\alpha}-1\sim\alpha x$（$\alpha$ 为实数）； (11) $\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$； (12) $x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{6}$.

三点注意：

(1) 必须 $x\to0$.

(2) 只能在乘除运算中使用无穷小代换，不能在加、减运算中使用. 例如，下列代换是错误的：

$$\lim_{x\to0}\frac{x-\sin x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{x-x}{x^3}=\lim_{x\to0}\frac{0}{x^3}=0.$$

(3) 在上述 12 个公式中的 x 位置可以是任意无穷小函数，例如，$\ln(1+3x^2)\sim3x^2\quad(x\to0)$.

例 20 求下列极限：

(1) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\sin^3x}$； (2) $\lim\limits_{x\to0}\cot x\left(\dfrac{1}{\sin x}-\dfrac{1}{x}\right)$；

(3) $\lim\limits_{n\to\infty}\{n[\ln(n+2)-\ln n]\}$； (4) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\tan x-\sin x}{\ln(1+x^3)}$；

(5) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(\mathrm{e}^{\sin x}-1)^4}{\sin^2x(1-\cos x)}$； (6) $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{1+x\sin x}-1}{1-\cos x}$.

解 (1) 当 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$，$\sin^3x\sim x^3$，故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3}{2x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(2) 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos x(x-\sin x)}{x\sin x\cdot\sin x}=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3/6}{x^3}=\dfrac{1}{6}$.

(3) 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\left[n\ln\left(1+\dfrac{2}{n}\right)\right]=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{2/n}{1/n}=2$.

(4) 当 $x\to0$ 时，$\tan x-\sin x\sim\dfrac{x^3}{2}$，$\ln(1+x^3)\sim x^3$，故原式 $=\lim\limits_{x\to0}\dfrac{x^3/2}{x^3}=\dfrac{1}{2}$.

(5) $x\to0$ 时，$\mathrm{e}^{\sin x}-1\sim\sin x$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，故 原式 $=\lim\limits_{x\to0}\cos x\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sin^4x}{x^2(x^2/2)}=2$.

(6) $x\to0$ 时，$x\sin x\to0$，故 $\sqrt{1+x\sin x}-1\sim\dfrac{x\sin x}{2}$，$1-\cos x\sim\dfrac{x^2}{2}$，因而

$$原式=\lim_{x\to0}\frac{1}{2}x\sin x/\frac{x^2}{2}=\lim_{x\to0}\frac{\sin x}{x}=1.$$

此为试读，需要完整PDF请访问：www.ertongbook.com