

# 线性代数辅导 及习题精解

(与同济四版教材配套)

同济大学 胡一鸣 主编

联系考研, 渗透精讲历年考研真题

- 知识图表 清晰梳理考点重点难点
- 典型例题 深入讲解思路方法技巧
- 习题答案 权威提供详尽准确解析
- 同步自测 快速升华应用应试能力

最新修订  
第2版

中国 社会 出版 社

高等院校数学教材同步辅导及考研复

TB11/7=3C10

星火书业

2006

# 线性代数辅导 及习题精解

(与同济大学第四版《线性代数》配套)

主 编 胡一鸣

副主编 邢建民 刘红星

最新修订  
第2版

中国 社会 出版 社

## 图书在版编目(CIP)数据

线性代数辅导及习题精解 / 胡一鸣主编. —北京: 中国  
社会出版社, 2005. 8

ISBN 7-5087-0722-2

I. 线... II. 胡... III. 线性代数—高等学校—教  
学参考资料 IV. 0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 090009 号

**线性代数辅导及习题精解: 同济第四版**

胡一鸣 主编

中国社会出版社出版发行

(北京市西城区阜成门内大街 33 号新龙大厦) 邮编: 100032

总发行店经销

山东省文登市印刷厂有限公司印刷

\*

880×1230 毫米 32 开本 12 印张 310 千字

2006 年 9 月第 2 版 2006 年 9 月第 2 次印刷

ISBN 7-5087-0722-2/O·14 定价: 13.80 元



## 前言

线性代数是高等院校理工科专业和部分文科专业一门重要的基础课程,也是历年硕士研究生入学考试的重点科目。

同济大学应用数学系编写的《工程数学——线性代数》是一套深受广大教师和学生欢迎的、被全国很多高校普遍采用的优秀教材。经过历次修订后的第四版,更是结构严谨、逻辑清晰、层次分明、行文流畅,在讲授基础知识的同时又注意提炼和渗透数学思想方法,质量、体例臻于炉火纯青。

为了帮助广大高校在校上和正在准备考研的学子学好、复习好线性代数这门课程,我们本着“选好教材、做好辅导”的宗旨,以上述的同济大学应用数学系编写的《工程数学——线性代数》(第四版)为针对教材,编写了这本与之章节、内容完全同步的《线性代数辅导及习题精解》配套辅导用书,给您系统梳理教材知识结构、清晰提炼教材重点考点、深入讲解题型例题方法、权威提供课后习题答案,让您学深、吃透教材知识,打好基础,同时,又注意紧密联系考研、精讲历年真题,设计同步自测、提供高效练习,让您学好教材的同时积极准备考研。

全书内容章、节设置基本上与教材完全同步,共分六章,每一章又分为若干节,循着教材顺序对每一章每一节内容清晰梳理、深入讲解,每一章内容讲完后,再对整章内容重点做一回顾和加深,然后给出该章教材上的习题答案详解,设计该章同步自测题。六章教材内容辅导完毕以后,书的最后附上了2006年考研数学真题,供您演练自测。

**每一章中每节内容讲解** 这部分由三块组成:该节知识结构图表、该节重点考点提炼、该节题型例题方法。

**一、知识结构图表** 这一部分用直观、形象的图表形式,将该节知识结构、相互联系、逻辑关系清晰地展示给读者,让读者一节内容了然于胸。

**二、重点考点提炼** 这一部分将该节一些重要的知识点、考点清晰、准确地提炼出来,并用简洁的语言对这些重点、考点需要注意的问题一一指明,让读者一下子抓住重点、针对复习。

**三、题型例题方法** 这一部分是每一节讲解中的核心内容,也是全书的核心内容。作者基于多年的教学经验和研究生入学考试试题研究经验,将该节教材内容中学生需要掌握的、考研中经常考到的重点、难点、考点,归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题

型,举出大量的精选例题、考研真题,举一反三、深入讲解,务必使您对每一个考查点扎实掌握、悟透吃透,并能熟练运用在具体解题中,可谓基础知识梳理、重点考点深讲、联系考试解题三重互动、一举突破,获得实际应用应试能力的全面提升。

每一例题讲解中穿插出现的“思路探索”、“方法点击”、“提醒贴士”,更是巧妙点拨处处呵护,让您举一反三、触类旁通。

**每一章后教材习题答案** 这一部分对该章教材上的全部习题给出详细、准确的答案解析,解析中同时给出思路点拨、知识链接,让您做好习题的同时,回顾、巩固、深化前面的内容讲解。

**每一章后同步自测练习** 这一部分是作者基于自己多年的教学经验并结合历年考研数学试题特点科学设计的,目的是给读者提供进一步的练习机会,让读者进一步消化知识、夯实考点、提高能力。这部分紧跟着练习答案详解。

**2006年考研数学试题解析** 书的最后,附上了2006年考研数学试题及解析,是为了让那些将来准备或正在准备考研的读者感受最新考研试题、自我检测能力水平,找出差距、调整复习。

全书内容编写系统、新颖、清晰、独到,充分体现了如下三大特色:

**一、知识梳理清晰、简洁** 直观、形象的图表总结,精炼、准确的考点提炼,权威、独到的题型归纳,将教材内容三下五除二、简明扼要的一下子梳理得一清二白,便于读者快速复习、高效掌握、形成稳固、扎实的知识结构,是后面提高解题能力和数学思维水平的基础。

**二、能力提升迅速、互动** 所有重点、难点、考点,统统归纳为一个一个的在考试中可能出现的基本题型,然后针对每一个基本题型,举出大量的精选例题、考研真题,举一反三、深入讲解,真正将知识掌握和解题能力高效结合,浑然一体,一举完成。

**三、联系考研密切、实用** 本书是一本教材同步辅导,也是一本考研复习用书,书中处处联系考研,例题中有考研试题,同步自测中也有考研试题,最后还附上了2006年考研数学试题及解析,更不用说讲解中处处渗透考研经常考到的考点、重点等,为的就是让同学们同步完成考研备考,达到考研要求的能力。

本书注意博采众家之长,参考了多本同类书籍,吸取了不少养分,在此向这些书籍的作者表示感谢。同时,由于作者水平所限,不足之处,在所难免,诚恳希望读者提出宝贵意见,以便再版时改进、修正。



## 目 录

前 言 .....	(1)
<b>第一章 行列式</b> .....	(1)
第一节 二阶与三阶行列式 .....	(1)
第二节 全排列及其逆序数 .....	(5)
第三节 $n$ 阶行列式的定义 .....	(7)
第四节 对换 .....	(11)
第五节 行列式的性质 .....	(13)
第六节 行列式按行(列)展开 .....	(21)
第七节 克拉默法则 .....	(34)
本章知识结构及内容小结 .....	(40)
本章教材习题全解 .....	(41)
同步自测题及参考答案 .....	(51)
<b>第二章 矩阵及其运算</b> .....	(57)
第一节 矩阵 .....	(57)
第二节 矩阵的运算 .....	(58)
第三节 逆矩阵 .....	(73)
第四节 矩阵分块法 .....	(87)
本章知识结构及内容小结 .....	(102)
本章教材习题全解 .....	(103)
同步自测题及参考答案 .....	(118)
<b>第三章 矩阵的初等变换与线性方程组</b> .....	(122)
第一节 矩阵的初等变换 .....	(122)
第二节 初等矩阵 .....	(131)
第三节 矩阵的秩 .....	(140)
第四节 线性方程组的解 .....	(151)
本章知识结构及内容小结 .....	(161)
本章教材习题全解 .....	(162)
同步自测题及参考答案 .....	(178)

<b>第四章 向量组的线性相关性</b> .....	(185)
第一节 向量组及其线性组合 .....	(185)
第二节 向量组的线性相关性 .....	(190)
第三节 向量组的秩 .....	(202)
第四节 线性方程组的解的结构 .....	(212)
第五节 向量空间 .....	(230)
本章知识结构及内容小结 .....	(233)
本章教材习题全解 .....	(235)
同步自测题及参考答案 .....	(254)
<b>第五章 相似矩阵及二次型</b> .....	(259)
第一节 向量的内积、长度及正交性 .....	(259)
第二节 方阵的特征值与特征向量 .....	(265)
第三节 相似矩阵 .....	(275)
第四节 对称矩阵的对角化 .....	(287)
第五节 二次型及其标准形 .....	(293)
第六节 用配方法化二次型成标准形 .....	(301)
第七节 正定二次型 .....	(304)
本章知识结构及内容小结 .....	(311)
本章教材习题全解 .....	(312)
同步自测题及参考答案 .....	(335)
<b>第六章 线性空间与线性变换</b> .....	(340)
第一节 线性空间的定义与性质 .....	(340)
第二节 维数、基与坐标 .....	(343)
第三节 基变换与坐标变换 .....	(349)
第四节 线性变换 .....	(357)
第五节 线性变换的矩阵表示式 .....	(359)
本章知识结构及内容小结 .....	(363)
本章教材习题全解 .....	(364)
同步自测题及参考答案 .....	(369)
<b>2006 年考研数学真题及参考答案</b> .....	(371)

# 第一章 行列式

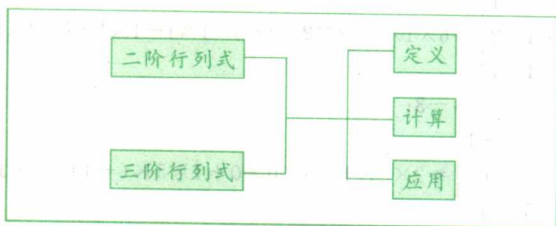
本章首先介绍了二阶与三阶行列式的概念,接着介绍了全排列及逆序数的概念,然后把二阶与三阶行列式的定义作了推广,给出了 $n$ 阶行列式的定义,讨论了 $n$ 阶行列式的性质和计算,并讨论了对换的一些性质,最后介绍了克拉默法则及其应用.

## 第一节

## 二阶与三阶行列式

### 一、内容简析

#### 【知识结构】



#### 【重要知识点和考点分析】

1. 把  $a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$  称为排成二行二列的数表  $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix}$  的二阶行列式,并记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

2. 把  $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} a_{33} + a_{12} a_{23} a_{31} + a_{13} a_{21} a_{32} - a_{11} a_{23} a_{32} - a_{12} a_{21} a_{33} - a_{13} a_{22} a_{31}$

称为数表  $\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{matrix}$  的三阶行列式.

3. 本节重点是二阶与三阶行列式的计算,特别注意的是在行列式展开过程中各项的正负号是否正确.

### 二、题型、例题、方法

#### 基本题型 I: 二阶行列式的计算

##### 例 1 计算下列行列式



(1)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix}$

解: (1)  $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 2 \times 2 - 1 \times (-1) = 5;$

(2)  $\begin{vmatrix} a & b \\ a^2 & b^2 \end{vmatrix} = a \times b^2 - b \times a^2 = ab(b-a).$

**【方法点击】** 二阶行列式的计算可由定义直接计算.**基本题型 II: 三阶行列式的计算****例 2** 计算下列行列式

(1)  $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

(2)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix}$

(3)  $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix}$

解: (1)  $\begin{vmatrix} 6 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 6 \times 1 \times 1 + 2 \times 2 \times 2 + 3 \times 1 \times 1 - 1 \times 1 \times 2 - 2 \times 1 \times 6 - 2 \times 3 \times 1$   
 $= -3;$

(2)  $\begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2 \times 3 \times 1 + 0 \times 0 \times 0 + 1 \times 5 \times (-1) - (-1) \times 3 \times 0 - 0 \times$   
 $5 \times 2 - 0 \times 1 \times 1 = 1;$

(3)  $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 1 \\ \sin\beta & \cos\beta & 1 \\ \sin\gamma & \cos\gamma & 1 \end{vmatrix} = \sin\alpha\cos\beta + \sin\beta\cos\gamma + \sin\gamma\cos\alpha - \sin\gamma\cos\beta - \sin\alpha\cos\gamma -$   
 $\sin\beta\cos\alpha = \sin(\alpha-\beta) + \sin(\beta-\gamma) + \sin(\gamma-\alpha).$

**【方法点击】** 本题利用对角线法则直接计算.**基本题型 III: 行列式的应用****例 3** 设  $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = 0$ , 求  $x$  的值.

解:  $\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x \end{vmatrix} = x \times x \times x + 1 \times 1 \times 1 + 1 \times 1 \times 1 - 1 \times x \times 1 - 1 \times 1 \times x - 1 \times 1 \times x$   
 $= x^3 - 3x + 2 = (x-1)^2(x+2) = 0,$

解方程可得:  $x=1$  或  $x=-2$ .**【方法点击】** 本题先通过行列式计算将等式化成一元三次方程形式, 然后解方程即可求得  $x$  的值.

求函数  $f(x) = \begin{vmatrix} 2x & 1 & -1 \\ -x & -x & x \\ 1 & 2 & x \end{vmatrix}$  中  $x^3$  的系数.

行列式展开后只有主对角线上三元素的乘积才出现  $x^3$  项, 其系数为  $2 \times (-1) \times 1 = -2$ .

【方法点击】 此类型题目只考虑行列式的不同行不同列乘积中出现  $x^n$  的项, 然后将它们的系数相加即可.

**例 5** 用行列式解下列方程

$$(1) \begin{cases} 6x_1 - 4x_2 = 10 \\ 5x_1 + 7x_2 = 29 \end{cases} \quad (2) \begin{cases} 4x_1 + 5x_2 = 0 \\ 3x_1 - 7x_2 = 0 \end{cases}$$

$$(3) \begin{cases} bx - ay + 2ab = 0 \\ -2cy + 3bz - bc = 0 \\ cx + az = 0 \end{cases} \quad (4) \begin{cases} x_1 = 0, 5x_1 + 0.3x_2 + 0.4x_3 + 10 \\ x_2 = 0, 4x_1 + 0.5x_3 + 20 \\ x_3 = 0, 2x_1 + 0.1x_2 + 12 \end{cases}$$

解: (1)  $D = \begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 6 \times 7 - (-4) \times 5 = 62,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -4 \\ 29 & 7 \end{vmatrix} = 10 \times 7 - (-4) \times 29 = 186,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 6 & 10 \\ 5 & 29 \end{vmatrix} = 6 \times 29 - 5 \times 10 = 124,$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{186}{62} = 3, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{124}{62} = 2.$$

(2)  $D = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 4 \times (-7) - 5 \times 3 = -43,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 0 & -7 \end{vmatrix} = 0 \times (-7) - 0 \times 5 = 0, \quad D_2 = \begin{vmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = 0 \times 4 - 0 \times 3 = 0,$$

$$\text{所以 } x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{0}{-43} = 0, \quad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{0}{-43} = 0.$$

(3) 原方程组变为

$$\begin{cases} bx - ay = -2ab \\ -2cy + 3bz = bc \\ cx + az = 0 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} b & -a & 0 \\ 0 & -2c & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = b \times (-2c) \times a + (-a) \times 3b \times c + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= -5abc,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} -2ab & -a & 0 \\ bc & -2c & 3b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = -2ab \times (-2c) \times a + 0 + 0 - 0 - (-a) \times bc \times a - 0$$

$$= 5a^2bc,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} b & -2ab & 0 \\ 0 & bc & 3b \\ c & 0 & a \end{vmatrix} = b \times bc \times a + (-2ab) \times 3b \times c + 0 - 0 - 0 - 0$$

$$= -5ab^2c,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} b & -a & -2ab \\ 0 & -2c & bc \\ c & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 + (-a) \times bc \times c + 0 - (-2ab) \times (-2c) \times c$$

$$= -5abc^2,$$

$$\text{所以 } x = \frac{D_1}{D} = -a, y = \frac{D_2}{D} = b, z = \frac{D_3}{D} = c.$$

(4) 原方程组变为

$$\begin{cases} 0.5x_1 - 0.3x_2 - 0.4x_3 = 10 \\ -0.4x_1 + x_2 - 0.5x_3 = 20 \\ -0.2x_1 - 0.1x_2 + x_3 = 12 \end{cases}$$

$$D = \begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & -0.4 \\ -0.4 & 1 & -0.5 \\ -0.2 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0.5 \times 1 \times 1 + (-0.3) \times (-0.5) \times (-0.2) + (-0.4) \times (-0.4) \times (-0.1) - (-0.4) \times 1 \times (-0.2) - (-0.3) \times (-0.4) \times 1 - 0.5 \times (-0.5) \times (-0.1) = 0.229,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 10 & -0.3 & -0.4 \\ 20 & 1 & -0.5 \\ 12 & -0.1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 10 \times 1 \times 1 + 20 \times (-0.1) \times (-0.4) + (-0.3) \times (-0.5) \times 12 - (-0.4) \times 1 \times 12 - 10 \times (-0.1) \times (-0.5) - 1 \times (-0.3) \times 20 = 22.9,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0.5 & 10 & -0.4 \\ -0.4 & 20 & -0.5 \\ -0.2 & 12 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= 0.5 \times 20 \times 1 + (-0.4) \times 12 \times (-0.4) + (-0.2) \times 10 \times (-0.5) - (-0.4) \times 20 \times (-0.2) - 0.5 \times 12 \times (-0.5) - 1 \times 10 \times (-0.4) = 18.32,$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0.5 & -0.3 & 10 \\ -0.4 & 1 & 20 \\ -0.2 & -0.1 & 12 \end{vmatrix}$$

$$= 0.5 \times 1 \times 12 + 10 \times (-0.4) \times (-0.1) + (-0.3) \times 20 \times (-0.2) - 10 \times 1 \times (-0.2) - 0.5 \times (-0.1) \times 20 - 12 \times (-0.3) \times (-0.4) = 9.16,$$



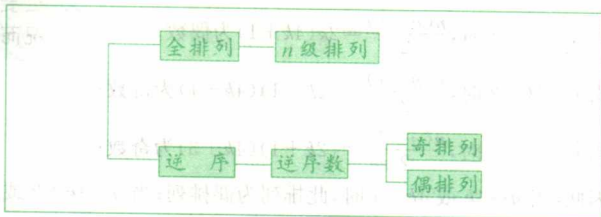
$$\text{所以 } x_1 = \frac{D_1}{D} = 100, x_2 = \frac{D_2}{D} = 80, x_3 = \frac{D_3}{D} = 40.$$

**【方法点击】** 利用方程组与行列式的关系.

## 第二节 全排列及其逆序数

### 一、内容简析

#### 【知识结构】



#### 【重要知识点和考点分析】

1.  $n$  个不同元素排成一列称为  $n$  个元素的全排列. 我们通常考虑  $n$  个自然数的排列, 也称为  $n$  级排列.

2.  $n$  个元素的所有排列的种数用  $P_n$  表示,  $P_n = n \cdot (n-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1 = n!$ .

3.  $n$  个元素的任一排列中, 一个排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  中所有逆序的总和称为这个排列的逆序数, 记为  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n)$ . 若为奇数称此排列为奇排列; 若为偶数, 则称之为偶排列.

4. 本节的重点是求一个排列的逆序数, 难点是求含有字母的排列的逆序数也是考研经常侧重的. 任一排列  $i_1 i_2 \cdots i_n$  的逆序数可如下计算:  $\tau(i_1 i_2 \cdots i_n) = i_1$  后面比  $i_1$  小的数的个数 +  $i_2$  的后面比  $i_2$  小的数的个数 +  $\cdots$  +  $i_{n-1}$  后面比  $i_{n-1}$  小的数的个数.

### 二、题型、例题、方法

#### 基本题型: 逆序数的求法

**例 1** 求下列排列的逆序数

(1) 134782695      (2) 217986354      (3) 987654321

$$\text{解: (1) } \tau(134782695) = \begin{array}{cccccccc} 1 & 3 & 4 & 7 & 8 & 2 & 6 & 9 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & +1 & +1 & +3 & +3 & +0 & +1 & +1 = 10; \end{array}$$

$$(2) \tau(217986354) = \begin{array}{cccccccc} 2 & 1 & 7 & 9 & 8 & 6 & 3 & 5 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & +0 & +4 & +5 & +4 & +3 & +0 & +1 = 18; \end{array}$$

$$(3) \tau(987654321) = \begin{array}{cccccccc} 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 8 & +7 & +6 & +5 & +4 & +3 & +2 & +1 = 36. \end{array}$$

套用上述公式

**【方法点击】** 求逆序数一般按上面给出的公式依次来算, 对初学者来说, 可按本例给出的虚线对应, 可避免出错.

**例 2** 求下列排列的逆序数,并确定它们的奇偶性.

(1)  $n(n-1)\cdots 21$       (2)  $13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$

(3)  $135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42$

解: (1)  $\tau(n(n-1)\cdots 2 \cdot 1) = (n-1) + (n-2) + \cdots + 2 + 1 = \frac{n(n-1)}{2}$ .

对  $\frac{n(n-1)}{2}$  的奇偶性判断,需按以下情况进行讨论:

当  $n=4k$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k-1)$  为偶数;

当  $n=4k+1$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = 2k(4k+1)$  为偶数;

当  $n=4k+2$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+1)$  为奇数;

当  $n=4k+3$  时,  $\frac{n(n-1)}{2} = (2k+1)(4k+3)$  为奇数;

因此,当  $n=4k$  或  $4k+1$  时,此排列为偶排列;当  $n=4k+2$  或  $4k+3$  时,此排列为奇排列, ( $k \in \mathbf{Z}^+ \cup \{0\}$ ).

(2) 排列中前  $n$  个数  $1, 3, 5, \dots, (2n-1)$  之间不构成逆序,后  $n$  个数  $2, 4, 6, \dots, (2n)$  之间也不构成逆序,只有前  $n$  个数与后  $n$  个数之间才构成逆序,因此

$$\tau(135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)) = 0 + 1 + 2 + \cdots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

(3)  $\tau(135\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots 42) = 0 + 2 + 4 + \cdots + (2n-2) = n(n-1)$ .

**【方法点击】** 对含字母的排列求逆序数,一定要对字母进行讨论来确定其与前后数的大小关系及其奇偶性.

**例 3** 设排列  $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$  的逆序数为  $k$ , 则  $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$  的逆序数是多少?

解:若排列  $x_1 x_2 \cdots x_n$  中关于  $x_1$  有  $a_1$  个逆序,则有  $(n-1) - a_1$  个顺序,即在排列  $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$  中关于  $x_1$  有  $(n-1) - a_1$  个逆序;若关于  $x_2$  有  $a_2$  个逆序,则有  $(n-2) - a_2$  个顺序;……,依此类推,关于  $x_n$  有  $a_n$  个逆序,则有  $(n-n) - a_n$  个顺序,而  $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = k$ ,故  $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$  的逆序数为

$$\begin{aligned} \tau(x_n x_{n-1} \cdots x_1) &= [(n-n) - a_n] + \cdots + [(n-2) - a_2] + [(n-1) - a_1] \\ &= (n-1) + (n-2) + \cdots + 1 + 0 - k \\ &= \frac{1}{2} n(n-1) - k. \end{aligned}$$

**【方法点击】** 本例重点考查了  $x_1 x_2 \cdots x_{n-1} x_n$  中逆序与  $x_n x_{n-1} \cdots x_2 x_1$  顺序之间有类似互补的性质.

**例 4** 选择  $i$  与  $k$  使

(1)  $1274i56k9$  成偶排列.

(2)  $1i25k4897$  成奇排列.

解:(1) 由题意知,  $i$  和  $k$  只能取 3 和 8.

请注意:为什么要分四种情况而不是两种

若  $i=3, k=8$ , 则  $\tau(127435689)=4+1=5$

若  $i=8, k=3$ , 则  $\tau(127485639)=4+1+3+1+1=10$

所以当  $i=8, k=3$  时成偶排列.

(2) 由题意知,  $i$  和  $k$  只能取 3 或 6.

若  $i=3, k=6$ , 则  $\tau(132564897)=1+1+1+1+1=5$

若  $i=6, k=3$ , 则  $\tau(162534897)=4+2+1+1=8$

所以当  $i=3, k=6$  时, 成奇排列.

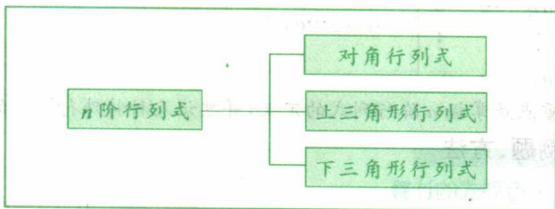
**【方法点击】** 此类题往往采用列举所有情况一一讨论.

### 第三节

## $n$ 阶行列式的定义

### 一、内容简析

**【知识结构】**



**【重要知识点和考点分析】**

1. 排成  $n$  行  $n$  列的  $n^2$  个数

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix}$$

的行列式定义为

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}.$$

这里  $\sum_{j_1 j_2 \cdots j_n}$  表示对所有  $n$  级排列求和, 故  $n$  级行列式等于所有取自不同行不同列的  $n$  个元素的乘积  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的代数和, 每一项的符号取决于组成该项的  $n$  个元素的列下标排列的逆序数 (行下标按自然顺序排列), 即当  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是偶排列时取正号, 当  $j_1 j_2 \cdots j_n$  是奇排列时取负号.

2. 几种特殊行列式的结果



$$(1) \begin{vmatrix} \lambda_1 & & & \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \lambda_n \end{vmatrix} = \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$(2) \begin{vmatrix} & & & \lambda_1 \\ & & & \\ & & \lambda_2 & \\ & & & \ddots \\ \lambda_n & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} \lambda_1 \lambda_2 \cdots \lambda_n;$$

$$(3) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn};$$

$$(4) \begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}.$$

3. 本节的重点是掌握  $n$  阶行列式的定义, 并熟记几种特殊行列式的结果.

## 二. 题型、例题、方法

基本题型 I: 行列式的计算

### 例 1 计算行列式

$$D = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 2002 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 2003 \end{vmatrix}.$$

【思路探索】因行列式的项中有一元素为零时, 该项值为零, 故只需求出所有非零项即可, 要求出非零项  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的列下标  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的所有  $n$  级排列. 先由第 1 行的非零元素, 写出  $j_1$  可能取的数码, 再由第 2, 3,  $\cdots$ ,  $n$  行的非零元素分别写出  $j_2, j_3, \cdots, j_n$  可能取的数码, 进而求出  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的所有  $n$  级排列, 非零项  $a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}$  的列下标  $j_1 j_2 \cdots j_n$  的  $n$  级排列有多少个, 相应地该行列式就含多少个非零项; 如果一个也没有, 则不含非零项, 行列式的值为零.

解:  $D$  中的第 1 行的非零元素只有  $a_{12002}$ , 因而  $j_1$  只能取 2002, 同理由第 2, 3,  $\cdots$ , 2003 行知,  $j_2 = 2001, j_3 = 2000, \cdots, j_{2002} = 1, j_{2003} = 2003$ . 于是  $j_1, j_2, \cdots, j_{2003}$  只能组成一个 2003 级排列

$$(2002)(2001)\cdots 21(2003),$$

即  $D$  中非零项只有一项, 所以

$$\begin{aligned} D &= (-1)^{\tau(2002 \cdots 2 \ 1 \ 2003)} a_{1 \ 2002} \cdots a_{2002 \ 1} a_{2003 \ 2003} \\ &= (-1)^{2001 + \cdots + 2 + 1} 1 \times 2 \times \cdots \times 2002 \times 2003 \\ &= -2003!. \end{aligned}$$

**【方法点击】** 本题中行列式含零元素较多,只需计算非零项即可.

**例 2** 计算行列式

$$D_4 = \begin{vmatrix} x_1 & 0 & y_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 & y_2 \\ y_3 & 0 & x_3 & 0 \\ 0 & y_4 & 0 & x_4 \end{vmatrix}.$$

**解:** 设  $D_4 = |x_{ij}|_{4 \times 4}$ , 则  $D_4$  中第 1 行的非零元素为  $x_{11} = x_1, x_{13} = y_1$ , 故  $j_1 = 1, 3$ ; 同理由第 2, 3, 4 行可求  $j_2 = 2, 4; j_3 = 1, 3; j_4 = 2, 4$ . 因而  $j_1, j_2, j_3, j_4$  能组成四个 4 级排列: 1234; 1432; 3214; 3412. 于是有

$$\begin{aligned} D &= x_1 x_2 x_3 x_4 - x_1 y_2 x_3 y_1 - y_1 x_2 y_3 x_4 + y_1 y_2 y_3 y_4 \\ &= (x_1 x_3 - y_1 y_3)(x_2 x_4 - y_2 y_4). \end{aligned}$$

**【方法点击】** 本题中行列式含零元素较多,从而只找出非零项再求和.

**例 3** 用  $n$  阶行列式的定义直接计算

$$D_n = \begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & a_1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_2 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{n-2} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{n-1} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & a_n \end{vmatrix} \quad (\text{其中 } a_i \neq 0, i=1, 2, \cdots, n).$$

**解:** 因为该行列式中每一行及每一列只有一个非零元素,由  $n$  阶行列式定义知,  $D_n$  只含一项  $a_1 \cdot a_2 \cdots a_{n-1} \cdot a_n$ ; 其中元素的下标正好是它们所在行的下标,恰好是一个标准排列,而它们所在列的下标构成的排列为  $(n-1)(n-2) \cdots 2 \cdot 1 \cdot n$ , 这个排列的逆序数为  $\tau = \frac{(n-1)(n-2)}{2}$ .

$$\text{所以, } D_n = (-1)^{\frac{(n-1)(n-2)}{2}} a_1 a_2 \cdots a_{n-1} a_n.$$

**【方法点击】** 本题每行只有一个非零元素,所以只需找出行列式的非零项即可.

**基本题型 II:  $n$  阶行列式的证明**

**例 4** 证明: (1)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = 0;$$

$$(2) \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}.$$

证 (1) 由行列式定义知,

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} & a_{35} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} & a_{45} \\ 0 & 0 & 0 & a_{54} & a_{55} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4 j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$$

若  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} \neq 0$ , 由题设知  $j_3, j_4, j_5$  只能等于 4 或 5, 从而  $j_3, j_4, j_5$  中至少有两个相等, 这与  $j_1 j_2 j_3 j_4 j_5$  是 1, 2, 3, 4, 5 的一个全排列矛盾, 故  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5} = 0$ , 于是  $D=0$ .

$$(2) D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{\tau(j_1 j_2 j_3 j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$$

由题设, 要使  $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} \neq 0$ , 必须  $j_1, j_2$  取 1 或 2, 而  $j_1 j_2 j_3 j_4$  是 1, 2, 3, 4 的一个全排列, 故  $j_3, j_4$  取 3 或 4, 于是

$$D = (-1)^{\tau(1234)} a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} + (-1)^{\tau(1243)} a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} + (-1)^{\tau(2134)} a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} + (-1)^{\tau(2143)} a_{12} a_{21} a_{34} a_{43} = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} - a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} + a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}.$$

$$\text{而 } \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} a_{33} & a_{34} \\ a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})(a_{33} a_{44} - a_{43} a_{34}) = a_{11} a_{22} a_{33} a_{44} - a_{11} a_{22} a_{34} a_{43} - a_{12} a_{21} a_{33} a_{44} + a_{12} a_{21} a_{34} a_{43}$$

所以等式成立.

【方法点击】 利用行列式定义展开后, 行列式的项中有一元素为零时, 该项值为零, 便可简化结果.

例 5

证明: 
$$\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & a_{1n} \\ 0 & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{vmatrix} = (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}.$$

证明: 根据行列式的定义, 项的一般形式为

$$(-1)^{\tau(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n},$$

行列式的第 1 行只有  $a_{1n}$  为非零元, 第 2 行除  $a_{2,n-1}$  和  $a_{2n}$  外全为零,  $\cdots$ , 则行列式只有  $a_{1n} a_{2,n-1} \cdots a_{n1}$  这一项为非零元, 而这一项的列下标所成的排列的