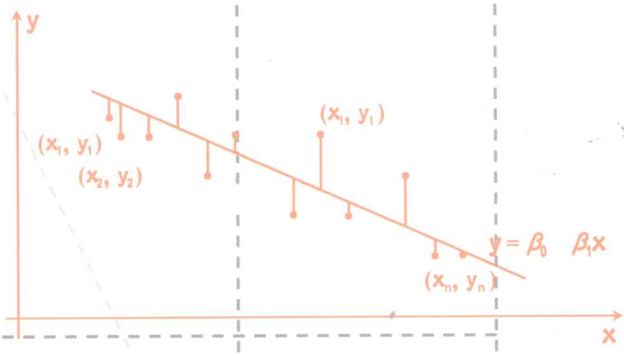
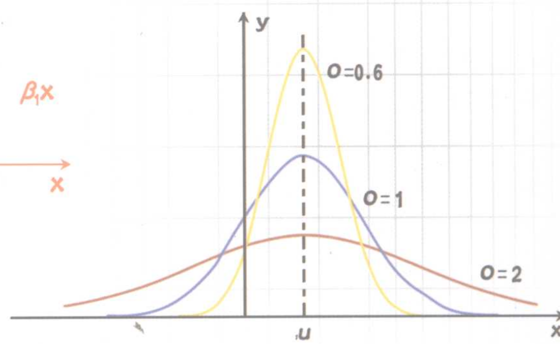
高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材

总 主 编　赵新泉
副总主编　徐冬林
主　　审　葛翔宇





概率论与数理统计

GAILÜLUN YU SHULITONGJI

王明华 ◎主　编
汪家义 ◎副主编

中国财政经济出版社

概率论与数理统计

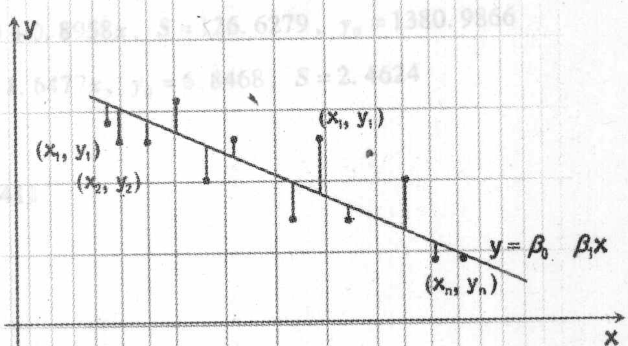
高等院校经济管理类专业
经济数学基础系列教材

总 主 编　赵新泉
副总主编　徐冬林
主　　审　葛翔宇

概率论与数理统计

GAILüLUN YU SHULǏTONGJI

王明华 ◎主　编
汪家义 ◎副主编



中国财政经济出版社

图书在版编目(CIP)数据

概率论与数理统计/王明华主编．—北京：中国财政经济出版社，2008.1
(高等院校经济管理类专业经济数学基础系列教材/赵新泉主编)
ISBN 978-7-5095-0432-1

Ⅰ.概… Ⅱ.王… Ⅲ.①概率论-高等学校-教材②数理统计-高等学校-教材
Ⅳ.021

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 007950 号

中国财政经济出版社出版
URL:http://www.cfeph.cn
E-mail:cfeph@cfeph.cn

社址:北京市海淀区阜成路甲 28 号　邮政编码:100036
发行处电话:88190406　财经书店电话:64033436
北京中兴印刷有限公司印刷　各地新华书店经销
787×1092 毫米　16 开　13.75 印张　335 000 字
2008 年 1 月第 1 版　2008 年 1 月北京第 1 次印刷
印数:1—4 000　定价:22.00 元
ISBN 978-7-5095-0432-1/O·0012
(图书出现印装问题,本社负责调换)

序

—— Preface ——

数学作为自然科学的重要分支在经济学与管理学领域得到日益广泛的应用．判断现代学科成熟与否在很大程度上要考察其对数学知识的应用程度．经济学与管理学学科的成熟发展，得益于数学工具、数学模型在这两门学科上的深入应用，因此，培养经济学、管理学与数学相结合的复合型人才已成为经济全球化和知识经济时代的一种趋势．为了探索和建立我国高等院校经济管理类数学课程教学内容和课程体系，在中国财政经济出版社大力支持下，我们承担了湖北省教育厅和中国财政经济出版社的教学研究课题《经济管理类数学实践课教学创新研究》和《经济管理类数学课程教材改革探索与建设》．该课题的建设目标是：紧密配合《高等学校教学质量与教学改革工程精品课程建设工作》，深入研究探索在现代教育技术的平台上，建成适应经济管理类专业创新人才培养需要的数学课程体系和立体化教材体系．

在教学研究课题的研究过程中，我们始终围绕着以上建设目标，从我国财经类院校经济管理数学教学现状的调查研究与分析入手，不断拓宽专业视野、加强应用和实践环节，使得课题成果之一的经济数学基础系列教材具有以下特点：

1. 教材在现有经济管理类数学教学基本要求的基础上，略有拓宽与加深，以满足近年来高校部分新增专业对数学更高要求的需要．

2. 教材内容叙述深入浅出，言简意赅，可读性强，便于学生自学，能够启发和培养学生的自学能力．

3. 考虑到经济管理类专业数学教学的目标与特点，在保证数学的严谨性、逻辑性的前提下，教材删除了一些不必要的推理论证过程，突出了理论的应用，强化了理论与实际的结合．

4. 教材由主、辅两部分组成：主教材由《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》三个分册组成；辅教材为上述三个分册的同步辅导书，它们将以释疑解惑并帮助理解概念和理论，掌握典型例题解法和技巧为目标编写，并将在主教材出版后出版，便于不同的读者选用．

5. 将本套教材中有应用部分的内容置于书末，以方便教师根据不同专业的需要选用．

6. 为了使读者更好地理解和掌握教材中介绍的基本原理和方法，教材中除选编相当数量的典型例题外，还选配了一定数量的习题，并附有习题参考答案．

本套教材既考虑到了教学内容的深度与广度以及经济、管理类各专业对数学课程的教学

基本要求，又考虑到了与教育部最新颁布的研究生入学考试数学三和数学四的考试大纲中的内容相衔接，符合经济、管理类各专业对数学要求越来越高的趋势．全套教材的编写注重适当渗透现代数学思想，加强对学生应用数学方法解决经济问题的能力的培养，以适应新时代对经济、管理人才的培养要求．本套教材既保持了数学学科本身的系统性、逻辑性、严密性和科学性，又有利于培养学生的逻辑思维及解决实际问题的能力，而且适当降低了一些纯数学的理论要求，加强了一些经济学、管理学后继课程中的应用内容，以便能较好地满足经济管理学科对数学的要求．

本套高等院校经济管理专业经济数学基础系列教材由赵新泉任总主编，徐冬林任副总主编，葛翔宇任主审．全套教材分为《微积分》、《线性代数》和《概率论与数理统计》三个分册．《微积分》分册由杨皓主编，罗捍东副主编，编写分工为：李玲侠编写第一、二、三章；杨皓编写第四章；罗捍东编写第五章；阎国光编写第六、七章；熊波编写第八章；贺胜柏编写第九、十章．《线性代数》分册由刘康泽主编，李政兴副主编，编写分工为：姚毅编写第一、六章；高潮编写第二章；李政兴编写第三、四章；刘康泽编写第五、七章．《概率论与数理统计》分册由王明华主编，汪家义副主编，编写分工为：汪家义编写第一章；常金华编写第二、三章；陈幸龄编写第四、五章；贾希辉编写第六章；吴唯实编写第七章；王明华编写第八、九章以及本书的附表．朱霞等老师在教材编写过程中做了大量的工作．本套教材的出版得到了中南财经政法大学、中国财政经济出版社各方领导的大力支持，中国财政经济出版社伍景华编辑及其他工作人员在整个组稿过程中做了大量的工作，我们在此对他们表示衷心的感谢！

虽然我们尽了很大的努力，但由于水平有限和时间仓促，教材中一定会存在错误和问题．恳请使用本教材的师生多提宝贵意见，以便我们再版时改进．

编　者

2007 年 7 月

目　录

Contents

第 1 章

Chapter 1

随机事件及其概率

概率论是研究随机现象的数量规律的一门数学学科．由于随机现象广泛地存在于自然界和人类社会中，使得概率论成为广泛应用的一门学科．概率论与其它数学学科一样，有其自身的一套严格的概念体系和严密的逻辑结构．本章将介绍概率论的一些基本概念，如样本空间、随机事件及其概率等，还将介绍概率的性质、古典概型、条件概率、乘法公式、全概率公式与贝叶斯公式及事件的独立性等．

§1.1 随 机 事 件

1.1.1 随机现象

在对自然界和人类社会进行考察时，人们经常会遇到各种各样的现象．这些现象可分为不同性质的两类：一类是在一定条件下必然发生的现象，称为确定性现象，例如：

（1）在标准大气压下，水加热到 100℃ 就会沸腾；

（2）边长为 a 的正方形，其面积必为 a^2；

（3）太阳从东方升起．

另一类是在一定条件下可能出现这样的结果，也可能出现那样的结果，且我们事先不能准确判断会出现哪一个结果的现象，称为偶然现象或随机现象，例如：

（1）掷一颗骰子，观察出现的点数；

（2）新生婴儿的性别；

（3）某天上午电话总机接到的呼叫次数．

在实际生活中，人们经常会遇到和处理随机现象，比如，明天是否会下雨？某股票明天价格是上升，还是下降？这些问题往往事先不能得到明确的答案，却是我们十分关心的问题．这种偶然发生的现象正是概率论的研究对象．当我们进一步更仔细地观察和研究这些偶然现象时，发现它们并不是杂乱无章的．人们经过长期的观察，发现虽然个别随机现象没有

规律，但性质相同的随机现象在大量试验中却呈现出明显的规律性．这种规律性称为随机现象的统计规律性．

1.1.2 随机试验和样本空间

为了对随机现象的统计规律性进行研究，人们往往要对随机现象进行观察或实验，我们把对随机现象进行的观察或实验统称为随机试验，简称为试验，记为 E. 一般地，一个随机试验要求具备如下特点：

（1）试验可在相同的条件下重复进行；

（2）每次试验出现的结果是不确定的，试验前不能预先断言；

（3）实验的所有可能结果是明确的，并且在一次试验中有且仅有其中一个结果出现．

随机试验中的每一个可能的结果称为样本点，通常用 ω 表示．样本点的特点是每次试验必出现一个且只能出现一个，任何两个样本点都不可能同时出现．一个随机试验的所有可能的结果（样本点）是明确的，通常把一个随机试验的所有样本点组成的集合称为样本空间，通常用 Ω 表示．对于一个具体的随机试验来说，样本空间可以根据试验的内容来决定．

例 1.1 在掷一颗骰子观察其出现的点数的试验中，试验的所有的可能结果有 6 种：1 点，2 点，…，6 点，样本空间为 $\Omega=\{1$ 点$,2$ 点$,\cdots,6$ 点$\}$，记 $\omega_i=\{$出现 i 点$\},i=1,2,\cdots,6$，则样本空间也可表示为 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$，或将样本空间简记为 $\Omega=\{1,2,\cdots,6\}$.

例 1.2 试验 E：某射手向一目标射击，直到击中目标为止，记录射手所需射击次数，样本空间可表示为 $\Omega=\{1,2,\cdots\}$.

例 1.3 试验 E：观察一个新灯泡的寿命．用 t 表示"灯泡的寿命为 t 小时"，样本空间可表示为 $\Omega=\{t\mid 0\leqslant t<+\infty\}$.

通过上面的例子，我们看到，随机试验的样本空间中可能有有限个样本点，可能有可列无穷多个样本点，也可能有不可列无穷多个样本点．只有有限个样本点的样本空间称为有限样本空间．包含无穷多个样本点的样本空间称为无限样本空间．

1.1.3 随机事件

在一个随机试验中，可能发生也可能不发生的结果称为随机事件，简称为事件．通常用大写字母 A,B,C 等表示．例如在例 1.1 中，$A=$"出现 6 点"，$B=$"出现偶数点"，$C=$"出现的点数大于 3"等都是随机事件．

对于一个随机试验来说，它的每一个结果（样本点）是一个最简单的随机事件，称为基本事件，如上述事件 A. 所以，样本空间也称为基本事件空间．除基本事件外，还有由若干个可能结果（样本点）组成的事件，相对于基本事件，称这种事件为复合事件．如上述事件 B、C 等．

每次试验中一定发生的事件称为必然事件，用 Ω 表示．例如在例 1.1 中，事件"点数小于 7"是必然事件．每次试验中一定不发生的事件称为不可能事件，用 $\varnothing$ 表示．例如在例 1.1 中，事件"点数大于 6"是不可能事件．必然事件和不可能事件本质上不是随机事件，但为了今后研究问题的方便，通常把必然事件和不可能事件视为随机事件的两种极端情形．

1.1.4　事件的集合表示

根据样本空间的定义，样本空间是随机试验的所有可能结果（样本点）构成的集合，每一个样本点即为该集合中的一个元素．一个随机事件则是由该事件所要求的特征的那些可能结果所构成，所以随机事件是样本空间中具有相同特征的样本点构成的集合，它可以看成是样本空间的一个子集合．对于基本事件来说，可以用以样本空间中样本点为元素的单点集来表示．对于复合事件来说，可以用以样本空间中若干个样本点为元素的集合来表示．当且仅当随机事件 A 中某一个样本点出现时，称事件 A 发生．由于样本空间 Ω 包含所有可能结果（样本点），所以样本空间作为一个事件是必然发生的，即为必然事件．空集 $\varnothing$ 作为样本空间的子集不含任何样本点，作为一个事件总是不可能发生，即是不可能事件．这也是我们用 Ω 表示必然事件，用 $\varnothing$ 表示不可能事件的原因．

1.1.5　事件的关系及其运算

在一个随机试验中，一般有很多随机事件，有的随机事件可能很复杂，为了利用简单事件来研究复杂事件，我们需要研究同一试验中的各种事件之间的关系和运算．由于事件是样本空间的某一个子集，因此，事件之间的关系与运算和集合论中集合之间的关系与运算是一致的．定义事件的关系与运算如下：

（1）事件的包含．如果事件 A 的发生必然导致事件 B 的发生，即属于 A 的每个样本点也都属于 B，则称事件 B 包含事件 A，或称事件 A 包含于事件 B，记作 $B\supset A$ 或 $A\subset B$. 显然，对于任意随机事件 A 有 $\varnothing\subset A\subset\Omega$.

（2）事件的相等．如果事件 A 包含事件 B，且事件 B 也包含事件 A，则称事件 A 与事件 B 相等．即事件 A 与事件 B 的样本点完全相同，记作 $A=B$．

（3）事件的并（或和）．“事件 A 和 B 至少有一个发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 与 B 的并（或和），记作 $A\cup B$ 或 $A+B$.

（4）事件的交（或积）．“事件 A 和 B 都发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 与 B 的交（或积），记作 $A\cap B$ 或 AB.

类似地，可定义 n 个事件的并 $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n=\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$ 和 n 个事件的交 $\bigcap\limits_{i=1}^{n}A_i$ 的运算.

（5）事件的差．“事件 A 发生而事件 B 不发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 与 B 的差．它是由属于 A 但不属于 B 的那些样本点构成的集合．记作 $A-B$．

（6）互不相容事件．如果事件 A 与 B 不能同时发生，也就是说，AB 是不可能事件，即 $AB=\varnothing$，则称事件 A 与 B 是互不相容的（或称事件 A 与 B 是互斥的）．显然，任意两个基本事件是互不相容的．

（7）对立事件．“事件 A 不发生”是一个随机事件，这一事件称作事件 A 的对立事件（或 A 的逆事件）．记作 $\overline{A}$. 由于 A 也是 $\overline{A}$ 的对立事件，因此，称 A 与 $\overline{A}$ 互为对立事件．对立事件满足下面关系式：

$$\overline{A}=\Omega-A,\ \overline{\overline{A}}=A,\ A\,\overline{A}=\varnothing,\ A+\overline{A}=\Omega.$$

（8）完备事件组．若 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，满足以下两个条件：

① $A_iA_j=\varnothing\quad i\neq j(i,j=1,2,\cdots,n)$；

② $\sum_{i=1}^{n} A_i = \Omega$,

则称事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 构成一个完备事件组．

若可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$，满足以下两个条件：

①$A_iA_j = \varnothing \quad i \neq j(i,j=1,2,\cdots)$；

② $\sum_{i=1}^{\infty} A_i = \Omega$,

则称可列个事件 $A_1, A_2, \cdots$ 构成一个完备事件组．

显然，所有的基本事件构成一个完备事件组．对于任一事件 A，A 和 $\bar{A}$ 构成完备事件组．

事件的关系和运算常用图形（文氏图）来直观表示，如图 1－1 所示．

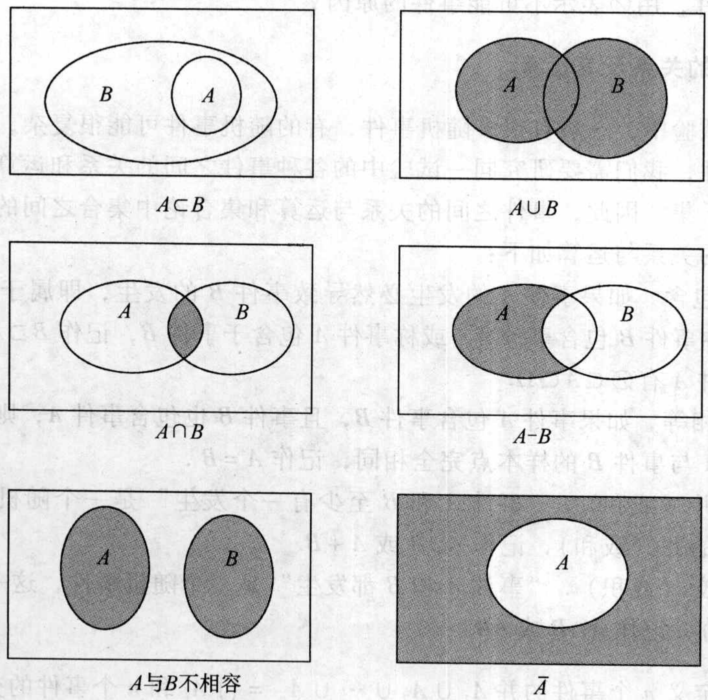


图 1－1 事件的关系与运算文氏图

1.1.6 事件运算的性质

事件运算的性质类似于集合运算的性质，可以证明，一般事件的运算满足如下运算规律，利用这些运算律可以帮助我们化简一些复杂的事件．

（1）交换律：$A \cup B = B \cup A$，$A \cap B = B \cap A$；

（2）结合律：$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$，$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$；

（3）分配律：$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$，$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$；

（4）差化积：$A - B = A\bar{B}$；

（5）吸收律：若 $A \subset B$，则有，$A \cup B = B$，$A \cap B = A$；

(6) 对偶律：$\overline{A\cup B}=\overline{A}\cap\overline{B},\overline{A\cap B}=\overline{A}\cup\overline{B}$.

以上各运算律均可推广到有限个和可列个事件的情形，读者可通过复习集合论中的相关知识自行给出.

例 1.4　掷一颗骰子，用 A_i 表示事件"出现 i 点"，$i=1,2,\cdots,6$，B 表示事件"出现偶数点"，C 表示事件"出现的点数不小于 2"，则

$$B=A_2+A_4+A_6,$$

$$C=A_2+A_3+A_4+A_5+A_6=\overline{A}_1,$$

且 $A_1,A_2,\cdots,A_6$ 构成一个完备事件组.

例 1.5　某人向一靶子射击 3 次，用 A_i 表示事件"第 i 次射击击中靶子"，$i=1,2,3$.

(1) 用语言描述下列事件

$$\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3,\ \overline{A_1+A_2},\ A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3.$$

(2) 用 A_1,A_2,A_3，通过运算关系表示出下列事件：

$B=$ "三次射击恰好有一次击中靶子"；

$C=$ "三次射击第一次不中而后两次中至少有一次击中"；

$D=$ "三次射击至少有两次没有击中靶子".

解　(1) $\overline{A}_1+\overline{A}_2+\overline{A}_3$ 表示的事件是"三次射击中至少有一次没有击中靶子"；$\overline{A_1+A_2}$表示的事件是"前两次没有击中靶子"；$A_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2A_3$ 表示的事件是"恰好连续两次击中靶子".

(2) $B=A_1\overline{A}_2\overline{A}_3+\overline{A}_1A_2\overline{A}_3+\overline{A}_1\overline{A}_2A_3$；

$C=\overline{A}_1(A_2+A_3)$；

$D=\overline{A}_1\overline{A}_2+\overline{A}_1\overline{A}_3+\overline{A}_2\overline{A}_3$.

§1.2　频率与概率

1.2.1　频率的定义及性质

在研究随机现象发生的规律性时，仅仅知道随机试验中可能出现哪些事件是不够的，还应该知道随机事件发生的可能性有多大. 虽然随机事件在一次试验中是否发生是不确定的，但在大量的重复试验中，它的发生却具有统计规律性，所以，我们可从大量重复试验出发来研究事件发生的可能性的大小. 为此，先介绍频率的概念.

定义 1.1　设随机事件 A 在 n 次重复试验中发生了 $n(A)$次，则称比值$\frac{n(A)}{n}$为随机事件 A 在 n 次重复试验中发生的频率，记为 $\mu_n(A)$，即

$$\mu_n(A)=\frac{n(A)}{n}.$$

人们经过长期的实践发现，当实验次数 n 较小时，随机事件 A 发生的频率波动性较明显，但当重复试验次数 n 充分大时，频率的这种波动性明显减小，并且随着 n 的不断增大，

A 发生的频率总在一确定的数值附近摆动，有稳定于一常数值的趋势．这种性质称为频率的稳定性．

历史上，人们进行过投硬币的试验，用来观察“正面向上”这一事件发生的统计规律，见表 1－1.

表 1－1

实验者	投掷次数 n	正面向上次数 $n(A)$	正面出现的频率 μ_n
德·摩根	2048	1061	0.5181
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5016
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.4998

从表 1－1 可以看出，当试验次数 n 较小时，正面出现的频率 μ_n 在 0 与 1 之间波动的幅度较大，随着试验次数 n 的增大，正面出现的频率 μ_n 波动的幅度越来越小，而逐渐稳定于确定的常数值 0.5.

设随机试验 E 的样本空间为 Ω，在 n 次重复试验中，由频率的定义不难得到频率具有下述基本性质：

（1） 非负性：对任何事件 A，有 $\mu_n(A)\geqslant 0$；

（2） 正规性：若 Ω 是必然事件，则 $\mu_n(\Omega)=1$；

（3） 可加性：对任意 m 个两两互不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_m$，有

$$\mu_n\left(\sum_{i=1}^{m}A_i\right)=\sum_{i=1}^{m}\mu_n(A_i).$$

1.2.2　概率的统计定义

定义 1.2　在相同的条件下，重复进行 n 次试验，事件 A 发生的频率稳定地在某一确定的常数 a 附近摆动，且一般说来，n 越大，摆动的幅度越小．则称常数 a 为事件 A 发生的概率，记为 $P(A)$．

一个事件发生的频率与试验次数 n 有关，而一个事件发生的概率却是与试验次数 n 无关的，它完全由事件本身决定，是先于试验而客观存在的．因此，频率与概率是两个完全不同的概念．但是，根据频率的稳定性，当试验次数 n 较大时有 $\mu_n(A)\approx P(A)$．因此，在实际计算中，经常用试验次数较大时事件 A 发生的频率来近似计算事件 A 发生的概率．

1.2.3　概率的公理化定义

概率的统计定义表明，我们可以利用事件发生的频率来表征事件发生的可能性的大小，但是，实际上，我们不可能对每一个事件都做大量的试验，得到事件发生的频率．同时，为了理论研究的需要，我们必须给概率一个更明确的定义．受频率的稳定性和频率的性质的启发，下面给出事件概率的公理化定义．

定义 1.3　设 E 是随机试验，Ω 是它的样本空间．对于随机试验 E 的每一个随机事件 A 赋予一个实数 $P(A)$，称此实数 $P(A)$ 为事件 A 的概率，如果集合函数 $P(\cdot)$ 满足下列三条

公理:

公理 1　对任意事件 A，有 $P(A)\geqslant 0$;

公理 2　$P(\Omega)=1$;

公理 3　对于任意可列个两两不相容的事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n,\cdots$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i).\tag{1.1}$$

由定义 1.3 我们可以看到，概率公理化定义并没有考虑每一个事件 A 对应的概率 $P(A)$ 是怎样确定的，值为多大（这依赖于每一个具体实际问题的结构），而是要求集合函数 $P(\cdot)$ 应满足一些必要的条件，这些条件被总结为三个公理．它是对概率的现实直观进行的抽象．利用概率的这三个公理，我们可以对概率进行进一步研究，从而得到概率的许多有用性质．

1.2.4　概率的性质

从概率的公理化定义出发，可以推导出概率的许多性质，这些性质有助于我们进一步理解概率的概念，同时，它们也是概率计算的重要基础．

性质 1　不可能事件 $\varnothing$ 的概率等于零，即 $P(\varnothing)=0$.

证　令 $A_i=\varnothing\,(i=1,2,\cdots)$，则 $\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i=\varnothing$，且 $A_iA_j=\varnothing\,(i\neq j,i,j=1,2,\cdots)$. 由公理 3 知

$$P(\varnothing)=P\left(\sum_{i=1}^{\infty}A_i\right)=\sum_{i=1}^{\infty}P(A_i)=\sum_{i=1}^{\infty}P(\varnothing),$$

由公理 1 知 $P(\varnothing)\geqslant 0$，故必有 $P(\varnothing)=0$.

性质 2（有限可加性）　若 A_1，A_2，…，A_n 是两两互不相容的事件，则有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i).\tag{1.2}$$

证　令 $A_i=\varnothing\quad(i=n+1,n+2,\cdots)$，由公理 3 及性质 1 即可导出．

特别常用的是两个互不相容的事件 A 与 B 之和的概率为

$$P(A+B)=P(A)+P(B).\tag{1.3}$$

下面各性质的证明留给读者完成．

性质 3　对于任意事件 A，有

$$P(\overline{A})=1-P(A).\tag{1.4}$$

性质 4（减法公式）　设 A,B 是两个随机事件，则

$$P(A-B)=P(A\overline{B})=P(A)-P(AB).\tag{1.5}$$

特别地，若 $A\supset B$，则有

(1) $P(A-B)=P(A)-P(B)$;

(2) $P(A)\geqslant P(B)$.

性质 5　对于任一事件 A，有 $0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

性质 6（广义加法公式）　对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}P(A_iA_j)$$

$$+\sum_{1\leqslant i<j<k\leqslant n}P(A_iA_jA_k)-\cdots+(-1)^{n-1}P(A_1A_2\cdots A_n).\qquad(1.6)$$

特别地，对于任意两个随机事件 A,B ，有

$$P(A+B)=P(A)+P(B)-P(AB).$$

对于任意三个事件 A,B,C ，有

$$P(A+B+C)=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC).$$

性质 7（次可加性） 对任意 n 个事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ ，有

$$P\left(\sum_{i=1}^{n}A_i\right)\leqslant\sum_{i=1}^{n}P(A_i),\qquad(1.7)$$

例 1.6 已知 $P(\overline{A})=0.5$，$P(\overline{A}B)=0.1$，$P(B)=0.4$，求：(1) $P(AB)$；(2) $P(A\overline{B})$；(3) $P(\overline{A}\overline{B})$.

解 (1) $P(AB)=P(B)-P(\overline{A}B)=0.4-0.1=0.3$；

(2) $P(A\overline{B})=P(A-B)=P(A)-P(AB)=0.5-0.3=0.2$；

(3) $P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A}-B)=P(\overline{A})-P(\overline{A}B)=0.5-0.1=0.4$.

例 1.7 已知 $P(A)=P(B)=P(C)=\dfrac{1}{4}$，$P(AB)=0$，$P(AC)=P(BC)=\dfrac{1}{16}$，求 A,B,C 至少有一个发生的概率.

解 因 $ABC\subset AB$，故 $0\leqslant P(ABC)\leqslant P(AB)=0$，从而 $P(ABC)=0$，于是，A,B,C 至少有一个发生的概率为

$$\begin{aligned}P(A+B+C)&=P(A)+P(B)+P(C)-P(AB)-P(AC)-P(BC)+P(ABC)\\&=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}-\frac{1}{16}=\frac{5}{8}.\end{aligned}$$

例 1.8 对某班的学生进行期中测验，测得有 70% 的学生数学成绩得优，有 75% 的学生语文成绩得优，有 80% 的学生英语成绩得优，有 85% 的学生政治成绩得优．试证明该班至少有 10% 的学生四门课程全部得优．

解 设 A 表示事件“数学成绩得优的学生”，B 表示事件“语文成绩得优的学生”，C 表示事件“英语成绩得优的学生”，D 表示事件“政治成绩得优的学生”．则

$$P(A)=0.7,\quad P(B)=0.75,\quad P(C)=0.8,\quad P(D)=0.85,$$

$$\begin{aligned}P(ABCD)&=1-P(\overline{ABCD})\\&=1-P(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}+\overline{D})\geqslant1-[P(\overline{A})+P(\overline{B})+P(\overline{C})+P(\overline{D})]\\&=1-(0.3+0.25+0.2+0.15)\\&=0.1\end{aligned}$$

即该班至少有 10% 的学生四门课程全部得优．

§1.3 古典概型与几何概型

概率的统计定义和概率的公理化定义并没有给出随机事件概率大小的确定方法，实际上，要计算一个随机事件发生的概率大小，应根据具体的随机试验的形式和结构而定．随机

试验的形式是多种多样的．这一节里，介绍两类特殊情形．

1.3.1　古典概型

古典概型是一类最简单也是最基本的概率模型．它曾经是概率论发展早期的主要研究对象，这也是它被称为“古典概型”的原因．

古典概型是指满足下列两个条件的概率模型：

（1）（有限样本空间）随机试验只有有限个可能结果，即基本事件总数为有限个；

（2）（等可能性）每一个可能结果发生的可能性相同，即各基本事件发生的概率相同．

对于一个随机试验 E 来说，以上两个条件在数学上可表述为：

（1）样本空间有限，即 $\Omega=\{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_n\}$；

（2）$P\{\omega_1\}=P\{\omega_2\}=\cdots=P\{\omega_n\}$.

根据概率的公理化定义，知

$$1=P(\Omega)=P\left(\sum_{i=1}^{n}\{\omega_i\}\right)=\sum_{i=1}^{n}P\{\omega_i\}=nP\{\omega_i\},$$

所以

$$P\{\omega_i\}=\frac{1}{n},\quad i=1,2,\cdots,n,$$

若事件 A 包含 m 个样本点，分别为 $\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}$，即

$$A=\{\omega_{i_1},\omega_{i_2},\cdots,\omega_{i_m}\}=\sum_{k=1}^{m}\{\omega_{i_k}\},$$

由概率的有限可加性得

$$P(A)=\sum_{k=1}^{m}P(\omega_{i_k})=\frac{m}{n},$$

即

$$P(A)=\frac{\text{有利于 } A \text{ 的基本事件数}}{\text{基本事件总数}}. \tag{1.8}$$

这就是古典概型中随机事件概率的计算公式．容易验证，式（1.8）定义的古典概率满足定义 1.3 中的三条公理．

计算古典概型中事件 A 的概率，关键是要计算出样本空间中样本点总数和事件 A 包含的样本点数，这些数目的计算要用到排列组合的相关知识．

例 1.9　把 10 本书任意地放在书架上，求其中指定的三本书放在一起的概率．

解　将 10 本书放到书架上相当于将 10 个元素作一次排列，其所有可能的放法相当于 10 个元素的全排列数 10!，由于书是按任意的次序放到书架上去，因此，这 10! 种排列中出现任意一种的可能性相同，这是古典概型．用 A 表示事件“指定的三本书放在一起”，则事件 A 包含的样本点数为 $8!\cdot 3!$，所以

$$P(A)=\frac{8!\cdot 3!}{10!}=\frac{1}{15}.$$

例 1.10　把 1，2，3，4，5，6 共 6 个数各写在一张纸片上，从中任取三张纸片排成一