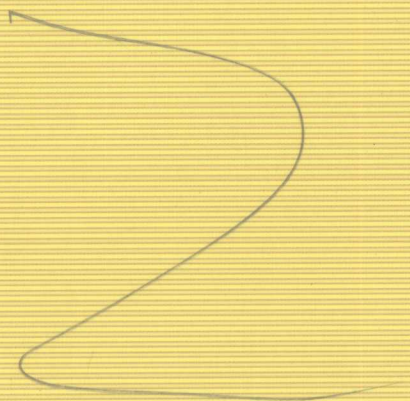


# 自相似集的结构

——Hausdorff测度与上凸密度

周作领 冯 力 瞿成勤 著



科学出版社

[www.sciencep.com](http://www.sciencep.com)

# 自相似集的结构

——Hausdorff 测度与上凸密度

周作领 冯 力 瞿成勤 著

科学出版社

北 京

## 内 容 简 介

本书主要研究满足开集条件的自相似集的结构,从 Hausdorff 测度和上凸密度的计算与估计到其内部结构的理论研究,都作了比较全面的阐述. 全书共分四章. 第 1 章介绍基本定义、符号和基本命题;第 2 章讨论自相似集;第 3 章讨论上凸密度;第 4 章讨论自相似集的结构及相关问题. 两个附录分别介绍了集合论、点集拓扑和测度论的基础知识.

本书可作为高等院校分形几何方向研究生、教师的教学用书,也可供相关方向科研人员和工程技术人员阅读参考.

### 图书在版编目(CIP)数据

自相似集的结构: Hausdorff 测度与上凸密度/周作领,冯力,瞿成勤著.

—北京:科学出版社,2008

ISBN 978-7-03-022196-4

I. 自… II. ①周…②冯…③瞿… III. 几何测度论 IV. 0174.12

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 078555 号

责任编辑:赵彦超/责任校对:陈玉凤

责任印制:赵德静/封面设计:王 浩

科 学 出 版 社 出 版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

\*

2008 年 7 月第 一 版 开本: B5(720×1000)

2008 年 7 月第一次印刷 印张: 11

印数: 1—3 000

字数: 201 000

定价: 36.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换(文林))

## 前言

分形几何是 20 世纪下半叶形成的几何学的一个新的分支,研究的对象是不规则的几何图形. 经典几何的研究对象是规则几何图形: 线、面、体乃至流形, 它们之外的图形可统称为不规则图形或分形 (fractal), 特点是大都显得“杂乱无章”或涉及无限的生成过程. 早在分形几何形成之前, 自然界和科学研究中的这类不规则图形就大量存在, 诸如山峰的轮廓、海岸线、疲劳金属的断裂线或面以及 Cantor 集等. 过去人们对这类图形或回避或浅尝则止, 这样做对当时的生产和科学研究影响不大, 因为较低的精确度就够了. 随着生产和科学的发展, 对分形的处理和深入研究已是不可避免. 例如, 分形概念的提出和集大成者 Mandelbrot 曾提出这样的问题: “英国海岸线有多长?”<sup>[15,16]</sup>, 这个看似简单的问题, 若给出严格的科学回答并非易事. 但正是这样的一类简单问题和其他发现, 孕育了一个专门以分形为研究对象的几何学新分支——分形几何学. 如上所说, 分形或“杂乱无章”涉及无限生成过程. 对于前者, 真的杂乱无章的图形人们还是无法处理的, 它们多少要有些规律: 某种精细结构. 而在数学上出现的分形大多属于后者, 如前面提到的 Cantor 集. 这样的集合往往具有某些怪异性.

Cantor 集是不可数的但有零长度. 另外的例子是 Koch 曲线, 它有零面积和无限长度. 出现这种“体积”或零或无限大的情况都是不便处理的, 它表明人们所用的测量尺度或是过大或是过小. 能否通过适当改变测量尺度避免这种情况的发生? 大约一百年前, Hausdorff 引进现在以他的名字命名的新的维数和测度: Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度 (以后简称  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度), 为人们提供了一种合适的工具. 当然, 这里所说改变测量尺度 (单位) 并不是直接意义下的改变, 而是通过测度这个概念实现的. 这里的  $\mathcal{H}$  维数一般不再是整数, 甚至不是分数, 而是非负实数. 每一个分形都有确定的  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度, 正和经典几何中每一个“图形”都有确定的维数和“体积”一样, 它们是分形最基本的属性. 唯其如此, 计算或估计分形的  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度就成了分形几何的最基本的课题, 是一切理论研究和实际应用的出发点. 但是, 这个课题太复杂也太困难了, 其中尤以计算和估计  $\mathcal{H}$  测度更困难. 如上所述, 分形多少要有些精细结构才便于研究. 一类最简单的分形是所谓满足开集条件的自相似集, 它们是一个区域由一组相似压缩函数经无限迭代压缩过程而最终生成的图形, 具有所谓“无穷嵌套的自相似结构”, 即每次压缩象都与原图形相似, 这种生成机制应该说是简单和明了的, 对于这类分形, 其  $\mathcal{H}$  维数的计算问题已被完满解决 (这是分形几何发展数十年来, 迄今为止最完美最漂亮的结果之一), 但其  $\mathcal{H}$  测度情况却远非如此. 大体上说, 目前人们只知道它们



是正的有限数, 如何计算甚至估计都是一片空白, 特别, 当  $\mathcal{H}$  维数大于 1 (非整数) 时更是如此. 关于  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度的结果有如此大的反差, 是令人惊异的, 也是人们对探求欲望的极大诱惑: 为什么生成机制如此简单明了的分形, 其  $\mathcal{H}$  测度的计算竟如此困难?  $\mathcal{H}$  测度计算的困难已是共识, 例如, 文献 [30] 的一位审稿人指出 “Hausdorff measure is an important notion in the study of fractals. However, there are few concrete results about computation of Hausdorff measure even for some simple fractals. Part of reason is the difficulty of the problem.” 当  $\mathcal{H}$  维数不大于 1 时,  $\mathcal{H}$  测度计算有些零星结果, 如经典的 Cantor 集, 而当  $\mathcal{H}$  维数大于 1 (非整数) 时, 至今没有任何具体结果.

本书的源头是国外一位学者提出的两个猜测. 1987 年, 加拿大学者 Marion 对两个经典满足开集条件的自相似集: Sierpinski 垫片和 Koch 曲线 (均有  $\mathcal{H}$  维数大于 1) 的  $\mathcal{H}$  测度的准确值提出猜测. 据作者所知, 这是对  $\mathcal{H}$  维数大于 1 (非整数) 的分形的  $\mathcal{H}$  测度计算的首次探索和尝试, 但十余年内毫无进展, 既不能否定也不能证明. 这引起作者的兴趣并从此进入这一领域, 我们先后否定了这两个猜测, 得到一系列估计结果, 并进而发现,  $\mathcal{H}$  测度计算与上凸密度计算密切相关, 且在一定条件下两者等价. 上凸密度是一个被文献遗忘的重要概念, 它首先出现在文献 [4] 中, 此后便在文献中消失. 本书的概念源头就是上凸密度这个概念, 从直觉上, 我们感到它似乎是开启进一步研究的钥匙. 正是这个概念导致我们更深一层的思考, 提出研究 “自相似集的结构” 的新领域, 并得出结论:  $\mathcal{H}$  测度计算困难的症结在于人们对自相似集内部结构一无所知. 我们曾把 “自相似集内部结构” 比作天体的 “黑洞”, 似乎并不过分. 我们最后的结论是:  $\mathcal{H}$  测度的计算是基础数学而非计算数学, 好的计算方法只能改善精确度, 只有正确的计算模型才能导致准确的结果, 而正确的计算模型的建立只能依赖人们对其内部结构的深入了解, “上凸密度” 正是开启自相似集内部结构研究的钥匙. 这条路我们已经走了近十年, 提出一些新方法和新概念, 如 “部分估计原理”、“最好覆盖”、“几乎处处最好覆盖”、“最好形状” 等, 也提出一些问题、猜测和新的研究课题, 得到一系列计算和估计结果, 我们的终极目标是建立与  $\mathcal{H}$  维数的结果相适应的  $\mathcal{H}$  测度计算的统一公式. 在理论上, 我们的目标已经达到, 即这样的统一公式已经建立. 在实际计算上, 我们的统一公式还不能应用, 因为它涉及一个更基本的领域: 凸集理论, 其中一个著名问题是优化问题, 即给定一个长度, 平面上以这个长度为直径的什么凸集包围的面积最大 (在高维空间可以提出类似问题)? 这个问题 (我们称为 “绝对优化问题”) 在凸集理论中已获解决, 可我们更需要的是 “相对优化问题” 或 “带约束条件的优化问题”. 而据我们所知, 这样的问题的研究在凸集理论中尚付阙如. 以平面为例, 我们的问题是这样的: 给定一个长度和一个角度, 问以这个长度为直径的什么凸集包围的面积最大, 要求其包含顶点且夹在给定角的两边之

间? 问题似乎很简单甚至初等, 可谓雅俗共赏了, 但至今没有答案! 更何况, 我们还要在分形上讨论凸集, 其难度更可想而知. 不管怎么样, 我们已经揭开了“自相似集结构”这个“黑洞”面纱的一角, 坚持下去会把我们引向深入. 2004 年, 我们在 *Nonlinearity* 上发表一篇综述文章<sup>[31]</sup>, 总结了我国阶段性的研究成果, 提出 12 个开问题和一个猜测, 据了解, 至 2007 年底, 它已被下载 459 次, 是该杂志被下载次数最多的文章之一.

作者写作本书的动机是总结我们十年来的研究成果, 给出从  $\mathcal{H}$  测度计算、上凸密度计算到自相似集结构研究的一个较全面系统的阐述, 主要是我们自己的研究成果的阐述. 本书可以说是自相似集的专门研究, 所以在取材上不求全面, 只以本书主题需要为限, 因而很多重要的内容将不包括. 在参考文献的选取上亦不追求全面, 如国内外学者在自相似集研究上也有不少重要成果, 但凡与本书旨趣不同者均未选入. 另外, 本书将采取边叙边议边提问题的写作方式. 但我们所提问题不是习题, 而是开问题甚至猜测. 1736 年, Euler 创造性地提出了“一笔画”的新方法, 从而解决了著名的哥尼斯堡七桥问题. 我们所提出问题的解决也需要新思想和新方法.

本书共分四章和两个附录. 第 1 章属预备章节, 介绍基本定义、术语、符号和有关的基本命题; 第 2 章讨论自相似集; 第 3 章讨论上凸密度; 第 4 章讨论自相似集的结构和有关问题. 在附录 A 中简单介绍必需的集合论、点集拓扑基础, 而附录 B 则介绍测度理论基础. 作者将力求封闭性, 但阅读本书还是要有一定基础的, 如符号动力系统和分形的一些基础知识等. 国内外已有不少有关分形的著作出版, 如文献 [3~6] 等, 读者如能粗读其中的部分内容, 对阅读本书将是大有裨益的.

本书的写作得到了很多人的帮助, 特别是尹建东博士、李浩博士、梁超博士和刘埂博士, 他们在本书的排版、制图和校对过程中给了作者极大帮助. 朱智伟博士此外, 陈仁莲博士、罗俊博士也给作者很大帮助. 我要特别感谢的是文兰教授、苏维宜教授、井竹君教授和吴敏教授, 他们给了作者热情的鼓舞, 并在百忙之中为本书作了热情洋溢的推荐, 使作者有勇气把本书最终完成.

作者自始至终得到国家自然科学基金委员会的大力支持, 这是要特别说明的.

本书的写作始于 2007 年上半年, 至今不到一年, 时间多少有些仓促, 加之作者曾被一位老同学讥为“机盲”, 由 Word 转学 Latex, 耗去大量时间和精力, 写作过程中大部分时间都花在打字、排版、纠错和制图方面, 往往一个符号出错, 会使作者半天之内焦头烂额, 一筹莫展, 正因如此, 在细节斟酌上显得不够, 加上水平有限, 错误和纰漏一定在所难免. 希望读者不吝赐教.

周作领

2008 年 2 月 29 日

## 符 号 表

|                                                                       |                                 |
|-----------------------------------------------------------------------|---------------------------------|
| $A_n \xrightarrow{\mathcal{H}} A$ 或 $A_n \rightarrow_{\mathcal{H}} A$ | 紧致集合序列在 Hausdorff 度量意义下的收敛      |
| $B(x, r)$                                                             | $x$ 的半径为 $r$ 球形 (开) 邻域或 $r$ 邻域  |
| $B(E, r)$                                                             | 集合 $E$ 的半径为 $r$ 的球形 (开) 邻域      |
| $\mathfrak{B}(X)$                                                     | 空间 $X$ 的 Borel $\sigma$ 代数      |
| $C$                                                                   | 中间三分 Cantor 集                   |
| $\mathcal{C}$                                                         | 空间的紧致集合族                        |
| $\overline{D}_c^s(E, x)$                                              | 集合 $E$ 在点 $x$ 处的上凸密度            |
| $\text{ent}(f)$                                                       | 连续自映射 $f$ 的拓扑熵                  |
| $\overline{E}$                                                        | 集合 $E$ 的闭包                      |
| $\dim_B$                                                              | 盒维数                             |
| $\underline{\dim}_B$                                                  | 下盒维数                            |
| $\overline{\dim}_B$                                                   | 上盒维数                            |
| $\dim_H$                                                              | Hausdorff 维数                    |
| $\dim_p$                                                              | 填充 (packing) 维数                 |
| $ E $                                                                 | 集合 $E$ 的直径                      |
| $h_m(f)$                                                              | 保测映射 $f$ 的测度熵                   |
| $H^s(E)$                                                              | 集合 $E$ 的 $s$ 维 Hausdorff 测度     |
| $L^n(E)$                                                              | 集合 $E$ 的 $n$ 维 Lebesgue 测度 (体积) |
| $\Sigma$                                                              | 有限符号空间                          |
| $N$ 或 $Z_+$                                                           | 全体自然数或正整数                       |
| $P^s(E)$                                                              | 集合 $E$ 的 $s$ 维填充 (packing) 测度   |
| $S_m$                                                                 | 测度 $m$ 的支撑                      |
| $\sigma: \Sigma \rightarrow \Sigma$                                   | 符号空间上的转移自映射                     |

# 目 录

|                                                                             |     |
|-----------------------------------------------------------------------------|-----|
| 第 1 章 维数与测度 .....                                                           | 1   |
| 1.1 分形的例子 .....                                                             | 1   |
| 1.2 $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度 .....                                | 4   |
| 1.3 盒维数 packing 维数与测度 .....                                                 | 8   |
| 1.4 Vitali 覆盖定理 Lebesgue 测度 .....                                           | 10  |
| 第 2 章 自相似集 .....                                                            | 15  |
| 2.1 自相似集的生成 .....                                                           | 15  |
| 2.1.1 压缩函数系、不变集 .....                                                       | 15  |
| 2.1.2 自相似集 .....                                                            | 18  |
| 2.2 自相似集的 $\mathcal{H}$ 维数和 $\mathcal{H}$ 测度 .....                          | 18  |
| 2.3 $\mathcal{H}$ 测度的计算与估计 .....                                            | 22  |
| 2.4 $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ -Sierpinski 地毯的 $\mathcal{H}$ 测度 ..... | 24  |
| 2.5 两个猜测 .....                                                              | 34  |
| 2.6 满足开集条件的自相似集的 $\mathcal{H}$ 测度估计 .....                                   | 40  |
| 2.7 满足强分离条件的自相似集上的动力系统 .....                                                | 87  |
| 2.8 强分离条件逼近开集条件 .....                                                       | 89  |
| 第 3 章 上凸密度 .....                                                            | 96  |
| 3.1 球密度、上凸密度 .....                                                          | 96  |
| 3.1.1 球密度 .....                                                             | 96  |
| 3.1.2 上凸密度 .....                                                            | 97  |
| 3.2 上凸密度的性质、最好覆盖和最好形状 .....                                                 | 100 |
| 3.3 上凸密度的计算与估计 .....                                                        | 103 |
| 3.4 上凸密度与 $\mathcal{H}$ 测度计算 .....                                          | 106 |
| 第 4 章 自相似集的结构 .....                                                         | 117 |
| 4.1 相似压缩函数的不动点 .....                                                        | 117 |
| 4.2 恰当集 .....                                                               | 125 |
| 4.3 最好覆盖与最好形状 .....                                                         | 126 |
| 4.3.1 最好覆盖和几乎处处最好覆盖 .....                                                   | 127 |
| 4.3.2 最好形状 .....                                                            | 130 |



|                                   |     |
|-----------------------------------|-----|
| 4.3.3 集合 $E - E_0$ 的结构及相关问题 ..... | 142 |
| <b>附录 A</b> .....                 | 148 |
| A.1 拓扑空间、度量空间 .....               | 148 |
| A.1.1 拓扑空间 .....                  | 148 |
| A.1.2 度量空间 .....                  | 148 |
| A.2 紧致性 .....                     | 150 |
| A.3 连通性 .....                     | 151 |
| A.4 Hausdorff 度量 .....            | 152 |
| A.5 符号空间和符号动力系统 .....             | 155 |
| <b>附录 B</b> .....                 | 157 |
| B.1 测度空间和测度 .....                 | 157 |
| B.2 外测度和度量外测度 .....               | 158 |
| <b>参考文献</b> .....                 | 161 |
| <b>索引</b> .....                   | 163 |

## 第 1 章 维数与测度

分形 (fractal, 由拉丁文 fractus 演化而来, 意为“破碎”、“碎片”), 如我们在前言中所说, 或“杂乱无章”或涉及无限生成过程. Mandelbrot 曾给出试探性 (tentative) 的定义 [3]:

(1)  $\mathcal{H}$  维数严格大于拓扑维数的集合 (图形) 称为分形.

但是, Mandelbrot 也认为这样的定义并不适宜, 因为按这个定义, 一些高度不规则的对象将被排除在分形之外, 即它们相应的两个维数可能相等. 他后来收回这个定义, 给出另一个定义.

(2) 由部分组成的集合 (图形), 其每个部分均与整体相似的集合 (图像) 谓之分形 (1985 年).

按这个定义也可能把另外一些不规则的对象排除在外, 也不甚相宜. 到目前为止, 分形的统一定义尚未形成, 一般人们就把诸如“具有分维数的集合”、“具有精细结构的集合”以及“不规则的集合”等视为分形 [4]. 不管怎样, 都涉及新的维数和相应的测度. 维数和测度有多种, 而本书主要讨论  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度, 因此本章主要介绍这种维数和测度.

### 1.1 分形的例子

#### 例 1.1.1 中间三分 Cantor 集.

这是读者在实变函数课中早已熟悉的内容, 是最简单的分形, 其构造如下: 在直线  $R$  上取单位线段, 记为  $S_0$ ; 把  $S_0$  三等分后去掉中间一段的内部 (叫做 1 湖), 得到两个长度为  $\frac{1}{3}$  的线段 (都叫做 1 基本线段或 1 岛) 组成的集合, 记为  $S_1$ ; 对  $S_1$  中的每一 1 基本线段重复上述程序, 并称去掉的两个线段的内部为 2 湖, 得到由四个长度为  $\frac{1}{9}$  的 2 基本线段或 2 岛构成的集合, 记为  $S_2$ . 这样的程序无限进行下去, 得到  $S_0, S_1, S_2, \dots, S_i, \dots$ . 易见,  $S_i$  由  $2^i$  个长度为  $\frac{1}{3^i}$  的  $2^i$  基本线段构成 (易见, 各级湖共有  $2^i - 1$  个). 非空集合

$$C = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

就是中间三分 Cantor 集 (见 (图 1.1.1)).

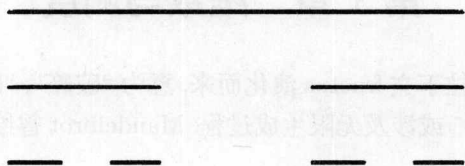


图 1.1.1 Cantor 集

### 例 1.1.2 Sierpinski 垫片.

在  $R^2$  上取单位正三角形, 记为  $S_0$ ; 分别连  $S_0$  三边的中点, 得到四个边长为  $\frac{1}{2}$  的三角形, 去掉中间一个的内部, 余下集合记为  $S_1$ ; 对  $S_1$  中每个小正三角形重复上述过程, 得到  $S_2$ ; 这样的过程无限进行下去, 得到  $S_0, S_1, S_2, \dots$ ; 非空集合

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

即是 Sierpinski 垫片 (见图 1.1.2). 容易证明, 这是一个连通甚至弧式连通的集合.

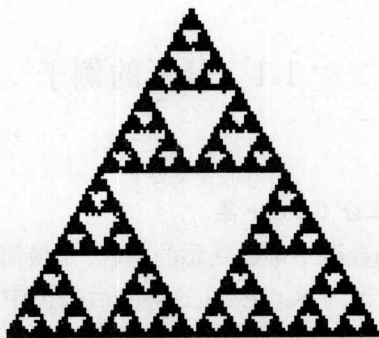


图 1.1.2 Sierpinski 垫片

### 例 1.1.3 Koch 曲线.

在  $R^2$  上取单位线段  $K_0$ , 三等分后, 在中间一段上向上作正三角形并去掉底边的内部, 得到由四个长度为  $\frac{1}{3}$  的线段构成的折线, 记为  $K_1$ ; 对  $K_1$  的每一线段重复上述过程 (作三角形时方向均向上). 这样的过程无限进行下去, 得到  $K_0, K_1, K_2, \dots$ . 易见, 在 Hausdorff 度量下, 存在极限  $K_i \xrightarrow{\mathcal{H}} K$ ,  $K$  即是 Koch 曲线 (见图 1.1.3). 可以证明, Koch 曲线, 甚至其上任意两点之间均有无限的欧氏长度.



图 1.1.3 Koch 曲线

**例 1.1.4**  $C \times C$ , 亦称  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ -Sierpinski 地毯, 其中  $C$  为中间三分 Cantor 集.

$C \times C$  亦可按下述方式得到. 在  $R^2$  上取单位正方形  $S_0$ , 每边三等分后, 分别连对边的对应分点, 得到 9 个边长为  $\frac{1}{3}$  的正方形, 去掉中间的 5 个小正方形的内部后记为  $S_1$ . 对  $S_1$  的每一个小正方形重复上述过程, 得到  $S_2$ ; 这样的过程无限进行下去, 得到  $S_0, S_1, \dots$ , 非空集合  $S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$  即是  $C \times C$  (见图 1.1.4(a)).  $C \times C$  亦称为  $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3}$ -Sierpinski 地毯.

**例 1.1.5**  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ -Sierpinski 地毯.

在  $R^2$  中, 把单位正方形  $S_0$  每边四等分, 分别连对边对应分点, 得到 16 个边长为  $\frac{1}{4}$  的小正方形, 去掉中间的 12 个的内部, 记为  $S_1$ ; 对  $S_1$  的每个小正方形, 重复上述过程, 并无限进行下去, 得到  $S_0, S_1, \dots$ , 非空集合

$$S = \bigcap_{i=0}^{\infty} S_i$$

即是所求 (见图 1.1.4(b)).

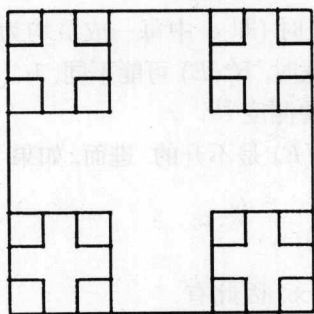
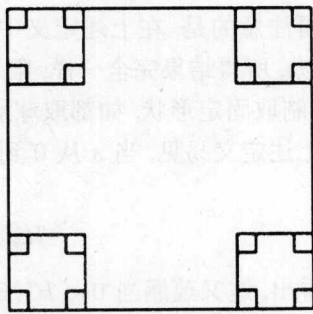
(a)  $C \times C$ (b)  $\frac{1}{4} \times \frac{1}{4}$ -Sierpinski 地毯

图 1.1.4

还可以举出很多这样的例子. 这些例子具有分形的两个特征, 即具有精细的结构, 也都是涉及无限过程而生成. 它们更深入的性质, 将在以后的章节中陆续展开, 这里不多作讨论. 这些例子还有其他分形将是本书很重要的讨论对象.



## 1.2 $\mathcal{H}$ 维数与 $\mathcal{H}$ 测度

在  $R^n (n > 0)$  上取通常度量  $d$ ,  $d(x, y)$  或  $|x - y|$  表示两点的距离, 而集合  $A \subset R^n$  的直径记为

$$|A| = \sup\{d(x, y), \forall x, y \in A\}.$$

设  $E \subset R^n$ ,  $\alpha = \{U_i, i > 0\}$  是  $E$  的一个 (可数) 覆盖, 即  $E \subset \bigcup_{i>0} U_i$ . 设  $\delta > 0$ , 并称  $\alpha$  是  $E$  的一个  $\delta$  覆盖, 如果

$$E \subset \bigcup_{i>0} U_i, \quad 0 < |U_i| \leq \delta, \quad \forall i > 0.$$

设  $s \geq 0, \delta > 0$ . 定义

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \sum_{i=1}^{\infty} |U_i|^s \geq 0,$$

这里  $\inf$  是对所有  $E$  的  $\delta$  覆盖取下确界. 易于验证,  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  是  $R^n$  的一个度量外测度. 定义

$$\mathcal{H}^s(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^s(E) \geq 0.$$

易见,  $\mathcal{H}^s(E)$  存在但可能无限大.  $\mathcal{H}^s$  也是一个度量外测度, 但是限制在  $R^n$  的 Borel  $\sigma$  代数上, 是一个测度, 称作  $E$  的  $s$  维 Hausdorff 测度.

值得注意的是, 在上述定义中, 限制取凸覆盖时 (即  $\alpha$  中每一成员均为凸集, 以下类似), 所得结果完全一样; 限制取开 (闭) 覆盖时,  $\mathcal{H}_\delta^s(E)$  可能不同,  $\mathcal{H}^s(E)$  不变; 但限制取固定形状, 如都取球形, 则得到不同的测度 [4].

从上述定义易见, 当  $s$  从 0 到  $\infty$  递升时,  $\mathcal{H}^s(E)$  是不升的. 进而, 如果  $s < t$ , 则

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) \geq \delta^{s-t} \mathcal{H}_\delta^t(E).$$

很容易看出, 这又蕴涵当  $0 < \mathcal{H}^t(E)$  时,  $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ . 因此有

**断言** 存在唯一的实数, 记作  $\dim_{\mathcal{H}}(E)$ , 满足

$$\mathcal{H}^s(E) = \infty, \quad \text{如果 } 0 \leq s < \dim_{\mathcal{H}}(E),$$

$$\mathcal{H}^s(E) = 0, \quad \text{如果 } \dim_{\mathcal{H}}(E) < s < \infty.$$

也可写成

$$\dim_{\mathcal{H}}(E) = \inf\{s : \mathcal{H}^s(E) = 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(E) = \infty\},$$

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty, & \text{如果 } s < \dim_{\mathcal{H}}(E), \\ 0, & \text{如果 } s > \dim_{\mathcal{H}}(E). \end{cases}$$

称实数  $\dim_{\mathcal{H}}(E)$  为  $E$  的 Hausdorff 维数, 一般总是记作  $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$ , 而所谓  $E$  的 Hausdorff 测度则总是指它的  $s$  维 Hausdorff 测度. 一般而言,  $s = \dim_{\mathcal{H}}(E)$  已不再是整数, 甚至不再是分数, 但可以为 0 和  $\infty$ . 为了简便, 本书以后分别用  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度表示 Hausdorff 维数和 Hausdorff 测度.

**注释和基本性质** (1) 满足条件  $0 < \mathcal{H}^s(E) < \infty$  的可测集  $E$  称作  $s$  集. 显然  $\dim_{\mathcal{H}}(E) = s$ . 这样的分形大量存在. 本书的主要研究对象满足开条件的自相似集都是  $s$  集.

(2) 在  $\mathcal{H}$  维数与  $\mathcal{H}$  测度的定义中, 可以用凸覆盖、开覆盖或闭覆盖, 结果不变; 再者,  $\mathcal{H}$  维数与  $\mathcal{H}$  测度不是相容度量不变量, 即对  $R^n$  的两个不同相容度量, 相应的值一般不同.

(3) 单调性. 设  $E, F \subset R^n$ , 则

$$E \subset F \Rightarrow \dim_{\mathcal{H}}(E) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

由测度的基本性质,  $\mathcal{H}^s(E) \leq \mathcal{H}^s(F), \forall s \geq 0$ . 再由  $\mathcal{H}$  维数的定义, 立得所求.

(4) 可数稳定性. 设  $\{F_i\}_{i=1}^{\infty}$  为  $R^n$  中集合序列, 则

$$\dim_{\mathcal{H}} \left( \bigcup_{i>0} F_i \right) = \sup_{i>0} \{\dim_{\mathcal{H}}(F_i)\}.$$

据单调性,  $\dim_{\mathcal{H}} \left( \bigcup_{i>0} F_i \right) \geq \dim_{\mathcal{H}}(F_i), \forall i > 0$ . 再者, 如果  $s > \dim_{\mathcal{H}}(F_i), \forall i > 0$ ,

据定义,  $\mathcal{H}^s(F_i) = 0, \forall i > 0$ , 再据测度的可数可加性, 得  $\mathcal{H}^s \left( \bigcup_{i>0} F_i \right) = 0$ , 这蕴涵相反的不等式.

(5) 可数集. 设  $F$  可数, 则  $\dim_{\mathcal{H}}(F) = 0$ . 因为若  $F_i$  为单点集, 显然  $\mathcal{H}^0(F_i) = 1$ , 因而  $\dim_{\mathcal{H}}(F_i) = 0$ , 据可数稳定性立得所求. 再者, 若  $F$  有限, 则  $\mathcal{H}^0(F) = \text{card}\{F\}$ . 易从定义出发直接证明, 从略.

(6) Hölder, Lipschitz 和双 Lipschitz 映射. 称  $f: F \rightarrow R^n$  满足 Hölder 条件, 并称为 Hölder 映射, 如果存在常数  $c > 0, \alpha > 0$ , 使得

$$|f(x) - f(y)| \leq c|x - y|^{\alpha}, \quad \forall x, y \in F.$$

则

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F), \quad \dim_{\mathcal{H}}(f(F)) \leq 1/\alpha \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

令  $\{U_i\}$  是  $F$  的  $\delta$  覆盖, 由假设有

$$|f(F) \cap U_i| \leq c|U_i|^\alpha,$$

因而  $\{f(F \cap U_i)\}$  是  $f(F)$  的  $c\delta^\alpha$  覆盖, 故

$$\sum_{i>0} |f(F) \cap U_i|^{s/\alpha} \leq c^{s/\alpha} \sum_{i>0} |U_i|^s,$$

因而

$$\mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}_{c\delta^\alpha}^s(F).$$

令  $\delta \rightarrow 0$ , 从而  $c\delta^\alpha \rightarrow 0$ , 得

$$\mathcal{H}^{s/\alpha}(f(F)) \leq c^{s/\alpha} \mathcal{H}^s(F)$$

和

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(F)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

当  $\alpha = 1$  时, 即

$$|f(x) - f(y)| \leq |x - y|, \quad \forall x, y \in F,$$

称为 Lipschitz 条件,  $f$  称为 Lipschitz 映射. 这时有

$$\mathcal{H}^s(f(F)) \leq \mathcal{H}^s(F), \quad \dim_{\mathcal{H}}(f(F)) \leq \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

如果存在  $0 < c_1 < c$ , 使得

$$c_1|x - y| \leq |f(x) - f(y)| \leq c|x - y|, \quad \forall x, y \in F,$$

则称  $f$  为双 Lipschitz 映射. 这时有  $\dim_{\mathcal{H}}(f(F)) = \dim_{\mathcal{H}}(F)$ . 注意到, 双 Lipschitz 映射有逆映射  $f^{-1}: f(F) \rightarrow F$ , 应用上面结果即得

$$\dim_{\mathcal{H}}(f(F)) = \dim_{\mathcal{H}}(F).$$

但是

$$\mathcal{H}^s(f(F)) = \mathcal{H}^s(F)$$

一般不成立.

(7) 缩放比例性质. 设  $\lambda > 0$ , 记  $\lambda E = \{\lambda x : x \in E\}$ , 即  $E$  的比例为  $\lambda$  的相似缩放. 则

$$\mathcal{H}^s(\lambda E) = \lambda^s \mathcal{H}^s(E).$$

设  $\{U_i\}$  是  $E$  的一个  $\delta$  覆盖, 则  $\{\lambda U_i\}$  是  $\lambda E$  的  $\lambda\delta$  覆盖, 因此

$$\mathcal{H}_{\lambda\delta}^s(\lambda E) \leq \sum_i |\lambda U_i|^s = \lambda^s \sum_i |U_i|^s \leq \lambda^s \mathcal{H}_{\delta}^s(\lambda E), \quad \forall \delta > 0.$$

令  $\delta \rightarrow 0$ , 得  $\mathcal{H}^s(\lambda E) \leq \lambda^s \mathcal{H}^s(E)$ . 用  $\frac{1}{\lambda}$  代替  $\lambda$ , 可得相反方向的不等式.

$\mathcal{H}$  维数还有很多其他性质, 这里不再一一列举. 作为本节的结束, 下面计算中间三分 Cantor 集  $C$  的  $\mathcal{H}$  维数与  $\mathcal{H}$  测度

$$\dim_{\mathcal{H}}(C) = s, \quad \mathcal{H}^s(C) = 1,$$

这里  $s = \log_3 2$  [4].

据例 1.1.1,  $S_i$  由  $2^i$  个长度为  $\frac{1}{3^i}$  的线段构成, 它们显然是  $C$  的一个  $\frac{1}{3^i}$  覆盖, 因此  $\mathcal{H}_{\frac{1}{3^i}}^s(C) \leq 2^i \times \frac{1}{2^i} = 1$  (注意,  $(\frac{1}{3^i})^{\log_3 2} = \frac{1}{2^i}$ ). 令  $i \rightarrow \infty$ , 得  $\mathcal{H}^s(C) \leq 1$ .

下面证明  $\mathcal{H}^s(C) \geq 1$ . 设  $\alpha$  是  $C$  上的一个由开区间构成的覆盖, 先证明

$$1 \leq \sum_{I \in \alpha} |I|^s. \quad (1.2.1)$$

据  $C$  的紧致性, 可设  $\alpha$  是有限的. 取  $\alpha$  的每一成员的闭包后, 得到  $C$  的一个有限闭区间覆盖, 亦用  $\alpha$  表示. 据 Lebesgue 数定理, 存在  $j > 0$ , 使得每一个  $j$  基本线段都包含在  $\alpha$  的一个成员内 (见附录 A), 因此, 可设  $\alpha$  中不含长度小于  $(\frac{1}{3})^j$  的成员, 也不含不包含任何  $j$  基本线段的成员. 设  $I \in \alpha$ . 如果  $I$  的左端点落在某个  $j$  基本线段的内部, 显然还有  $\alpha$  的另一成员包含这个  $j$  基本线段. 取与这个  $j$  基本线段右侧相邻的另一个  $j$  基本线段 (肯定存在) 的左端点为  $I$  的左端点. 对  $I$  的右端点可同样处理. 用新得到的线段代替  $I$ , 依然是  $C$  的覆盖且 (1.2.1) 式右端不减. 对每一个  $I \in \alpha$  都这样替换, 得到一个新的覆盖, 还用  $\alpha$  表示. 这时,  $\alpha$  的成员有两种可能, 或是某一个  $j$  基本线段, 或是包含若干  $j$  基本线段, 且其左、右端点分别是两个  $j$  基本线段的左、右端点. 在第二种情况, 设这些  $j$  基本线段从左到右依次为  $J_1, J_2, \dots, J_k$ ,  $3 \leq k \leq 2^j$ . 在  $J_1, J_k$  之间共有  $k-1$  个湖, 记这些湖的总长度为  $K$ , 并记  $J = J_2 \cup \dots \cup J_k$ . 显然  $I \supset J_1 \cup J \cup K$ , 且由例 1.1.1 容易证明,  $\frac{1}{2}(|J| + |J_1|) \leq |K|$ . 于是

$$\begin{aligned} |I|^s &\geq (|J_1| + |J| + |K|)^s \geq \left(\frac{3}{2}(|J_1| + |J|)\right)^s \\ &\geq 3^s \left(\frac{1}{2}|J_1| + |J|\right)^s \geq 2 \left(\frac{1}{2}|J_1|^s + \frac{1}{2}|J|^s\right) \\ &= |J_1|^s + |J|^s, \end{aligned}$$

这里利用了  $3^s = 2$  和凹函数  $x^s$  的性质 [18]. 易见, 在  $\alpha$  中用  $J_1$  和  $J$  代替  $I$ , 依然是  $C$  的覆盖且 (1.2.1) 式右端不减. 这样的过程经过  $k-1$  次,  $I$  已被  $J_1, J_2, \dots, J_k$

代替,但依然是  $C$  的覆盖,且 (1.2.1) 式右端不增. 对  $\alpha$  中所有第二种情形的  $I$  实施上述程序,经过有限次后,得到  $C$  的一个新覆盖,它全由  $j$  基本线段构成,显然,这个新覆盖由全部  $2^j$  个  $j$  基本线段. 由  $(\frac{1}{3^j})^s = \frac{1}{2^j}$ , (1.2.1) 式右端等于 1, 即 (1.2.1) 式成立. 再令  $j \rightarrow \infty$ , 即得  $\mathcal{H}^s(C) \geq 1$ . 证毕.

上述证明仅仅是对比较简单的  $C$ , 一般情形如何可想而知. 计算和估计  $\mathcal{H}$  测度是本书重点之一, 以后章节将逐步展开讨论.

### 1.3 盒维数 packing 维数与测度

除  $\mathcal{H}$  维数外, 还有其他亦有广泛应用的维数可以定义, 其中尤以盒维数和 packing 维数为重要, 而且它们与  $\mathcal{H}$  维数有较密切的关系. 但本书将主要讨论  $\mathcal{H}$  维数和  $\mathcal{H}$  测度, 与这些维数关系不大, 因此将简单介绍它们, 有些结果略去证明, 有兴趣的读者可参阅文献 [4], [5]. 我们先讨论盒维数, 与  $\mathcal{H}$  测度不同的是这个维数不能形成测度.

设  $F \subset R^n$  为非空有界子集,  $n > 0$ . 记  $N_\delta(F)$  为直径不超过  $\delta > 0$  可以覆盖  $F$  的集合的最小基数.

#### 定义 1.3.1

$$\begin{cases} \overline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lg N_\delta(F)}{-\lg \delta}, \\ \underline{\dim}_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lg N_\delta(F)}{-\lg \delta}. \end{cases} \quad (1.3.1)$$

称它们为  $F$  的下、上盒维数. 如果它们相等, 称其共同值为  $F$  的盒维, 记为

$$\dim_B F = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{\lg N_\delta(F)}{-\lg \delta}.$$

可以证明, 其中  $N_\delta(F)$  可以是下述四个中的任一个, 结果相同:

- (1) 覆盖  $F$  的半径为  $\delta$  的最少闭球基数;
- (2) 覆盖  $F$  的边长为  $\delta$  的最少立方体基数;
- (3) 覆盖  $F$  的直径最大为  $\delta$  的集合的最少基数;
- (4) 球心在  $F$  半径为  $\delta$  的相互不交的球的最大基数.

盒维数有如下性质:

- (1)  $\underline{\dim}_B F, \overline{\dim}_B F$  是单调的;
- (2)  $\overline{\dim}_B F$  是有限稳定的, 即  $\overline{\dim}_B(E \cup F) = \max\{\overline{\dim}_B E, \overline{\dim}_B F\}$ , 但下盒维数无此性质;

(3) 下、上盒维数都是 Lipschitz 稳定的, 而且它们在双 Lipschitz 和 Höder 变换下不变, 证明简单, 从略;