恩波考研
ENBO
ENBOEDUCATION 恩波教育

2007

数学辅导讲义

硕士研究生入学考试

经济类

恩 波 审订
蔡燧林 陈维新 黄柏琴 编著

夯实基础 全面提升

真正的考研一本全！ 大纲考点全面总结＋基础内容浓缩精讲＋针对题型介绍方法＋1000题典例深入剖析＋1000道习题自我检测……

学苑出版社

数学辅导讲义

2007硕士研究生入学考试

数学辅导讲义

（经济类）

蔡燧林　陈维新　黄柏琴　编著

学苑出版社

图书在版编目(CIP)数据

硕士研究生入学考试数学辅导讲义·经济类/蔡燧林等.
—北京:学苑出版社,2006.4
ISBN 7-5077-2656-8

Ⅰ.硕... Ⅱ.蔡... Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试—自学参考资料 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 013252 号

责任编辑:刘　涟
责任校对:姜东平
封面设计:顾小平
出版发行:学苑出版社
社　　址:北京市丰台区南方庄 2 号院 1 号楼
邮政编码:100078
网　　址:www.book001.com
电子信箱:xueyuan@public.bta.net.cn
销售电话:010-67675512、84560465
经　　销:新华书店
印 刷 厂:三河市华润印刷有限公司
开本尺寸:787×1092　1/16
印　　张:32.25
字　　数:983 千字
版　　次:2006 年 4 月北京第 1 版
印　　次:2006 年 4 月河北第 1 次印刷
印　　数:0001-5000 册
定　　价:42.00 元

前 言

一、本书写些什么

本书是为考研学子们写的，是《硕士研究生入学考试数学辅导讲义(理工类)》的姊妹篇．本书按照考研数学(三)与数学(四)的大纲要求编写．大纲未列入的内容不写；大纲上有的一定写上，并注意突出重点、热点、常考点．凡只适用于数学(三)的少量内容、例题与习题，在标题中说明或题号右上角注“③”表示；无说明也无记号的，表明对数学(三)、(四)均适用．

本书大多数节分三部分：“内容精讲”，“考题类型、解题策略及典型例题”与“综合例题精选”．第一部分“内容精讲”中，列举了大纲中要求的有关概念、定理、性质、关系、公式、法则和方法，并添加了不少注意要点，以加深考生对这些内容的理解．考生可根据自己的情况，详读，略读或不读，这样，除了为了解定理的证明需查看教科书外，可以不必再查看教科书．事实上，本书有些地方讨论得比某些教科书要深入、仔细，重点更突出，更切合考研要求．第二部分“考题类型、解题策略及典型例题”是本书的核心部分，其深浅度照顾到经管类考生的特点，既不是降低要求，学了对考试无用，也不是盲目拔高追求技巧，不切合考研要求，这两者都会浪费学子的宝贵时光而徒劳无益．在这部分中，尽可能多的介绍考题类型以及相应的解题方法，这是本书的一大特点．所列举的考题类型与例题，具有基础性、典型性、启发性、应试性，其中既有考过的类型与考题，更有未曾考过的具有前瞻性的类型及自创的例题．但也必须指出：考研题的类型，不是几百个就可包涵一切，不是“一个病用一种药，一种药治一个病”，对数学来说，这种办法是行不通的．认为学了“几百种类型”，只要熟背每种类型的解法就能对付考研，是十分错误的看法．重视基础，掌握理论，熟悉方法(这正是本书的编者们所精心打造的)这些才是根本性的．熟悉考题类型，可减轻临阵磨枪的压力，但更主要的要从中提高分析思维推理的能力，注意举一反三，从根本上提高数学水平着手．第三部分“综合例题精选”列举了少量的综合性例题，其解题过程是“考题类型及解题策略”中多种方法的综合运用．综合题有多种多样，编者经过精心筛选，将最精彩的献给考研学子们．

在每一章之后，有“自我检测题”与“参考答案”．从这批题的深浅水平来讲，90％左右符合考研试题要求，5％左右作为基础训练题，5％左右有较大难度，考生应独立完成这些检测题，以检测自己的应试能力．做不出时再去看看有没有“提示”．如果没有“提示”，说明这类题是考生在仔细阅读该章内容后应能完成的．

二、考研考些什么，如何复习迎考

下面简单说一下，一张试卷从哪些方面来考查学生，考生应如何有的放矢去

迎考.考题分五大类:

(1) **填空题**. 填空题实际上是简单的计算题,是为扩大试卷的覆盖面而设计的.考生切勿因为它简单而掉以轻心.填空题的计算量少,但要求准确无误,即使差一个符号,也不能得分.做题的时间又不应花得多,否则不划算.为了将这部分的分数拿到手,应在复习时养成良好的计算习惯,切忌轻视基本题的训练.同时要指出,一道填空题,涉及的知识点也可能有多个.例如:

1998 年数学(三)、(四) 第一(1) 题,设曲线 $y=f(x)=x^n$ 在点(1,1)处的切线与 x 轴的交点为$(\xi_n,0)$,则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(\xi_n)=$ ________.

这么很简单的一道填空题,涉及的知识点有:切线斜率与切线方程、求截距、求极限时还用到了重要极限.可见,在备考时每个知识点都不应疏漏.

(2) **选择题**. 选择题有计算性的、概念性的与推理性的之分.后两类选择题,其实就是变相的证明题,只是不要求写出证明或推理的过程,而仅要求能判断结论正确与否.这就要求考生在复习时重视概念、定理、性质,甚至运算法则的理解,而不是死背条文.不但要从正面来理解,还要掌握一些反例.逻辑推理上,要弄清楚充分与必要的区别.条件是充分而未说是必要的,则往往可以举出一些例子说明并非必要;添上某些条件后能保证结论是正确的,则没有这些条件时,结论往往就可能是不正确的.做这类选择题时,切忌想当然,应多一个心眼.例如:

1999 年数学(三) 第二(4) 题,设 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 为 n 阶距阵,且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 相似,$\boldsymbol{E}$ 为 n 阶单位矩阵,则[　　]

(A) $\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$.　　(B) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 有相同的特征值和特征向量.

(C) $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都相似于一个对角矩阵.　(D) 对任意常数 t,$t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}$ 与 $t\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B}$ 相似.

这是一道概念性的选择题,要求考生切实掌握两同阶矩阵相似的定义与性质,没有说到的性质不要误认为有,题中没有说 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 是实对称矩阵,不要误认为是实对称矩阵.在本书中,作者创新设计了不少有关微积 分、线性代数与概率统计方面的选择题,考生看了会有新鲜感.

(3) **计算题**. 一份试卷,包括填空题在内,计算或归结为计算的题占 80% 以上.计算题也往往不是单一的算算,而是要弄清楚,在什么情况下可以这么计算或不能这么计算,计算题常会是几种方法综合运用.所以在复习时,应切实加强计算训练.公式当然重要,但仅记公式是远远不够的,应掌握基本运算方法,熟悉典型步骤,并且要求有熟练的运算能力.例如:

2004 年数学(三)、(四) 第(15) 题,求 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{\sin^2x}-\dfrac{\cos^2x}{x^2}\right)$.

这是一道求极限的基本题,看似简单,但如若通分之后用洛必达法则,则会导致复杂的运算.在本题中,就要善于并准确的使用等价无穷小替换,综合运用求极限的各种方法.在本书中,将会详尽地介绍各方面的运算方法及注意事项,帮助考

生开拓视野.

(4) **证明题.** 整份试卷中,数学(三)、(四)各有一道微积分证明题,有时数学(三)还有一道线性代数的证明题.微积分证明题的范围大致有:极限存在性,单调性,奇偶性,不等式,零点的存在性及个数,定积分与变限积分的不等式及零点问题,级数敛散性的论证.线性代数中的证明题有,矩阵可逆与否的论证,向量组线性相关与无关的论证,线性方程组无解、存在惟一解与存在无穷多解的论证,矩阵可否对角化的论证,两矩阵合同、相似、等价的论证,矩阵正定性的证明,关于秩的大小,并用它来论证有关的问题,等等.为了做好证明题,就必须熟悉上面所说的有关理论.这些理论的条件,有的是充分条件,有的是充要条件,有的用某一定理可解决,有的可能要同时用几个定理才能解决.例如:

2003 年数学(三)第八题,设函数 $f(x)$ 在$[0,3]$上连续,在$(0,3)$内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3, f(3)=1$.试证必存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

为证本题,要先用连续函数介值定理,再用罗尔定理.在本书中,将会告诉考生,什么情况下运用以及如何运用连续函数介值定理与罗尔定理,也将告诉考生如何讨论更一般的零点问题,以及处理其他的证明题.

(5) **应用题.** 每一试卷大致都有一道应用题.考生常常感到应用题不好对付.实际上,应用题着重考查学生的建模能力,而不考查专业知识面.经管类数学试卷的应用题大致为几何或经管方面的题,例如

1998 年数学(三)第十一题,一商店经销某种商品,每周进货的数量 X 与顾客对该种商品的需求量 Y 是相互独立的随机变量,且都服从区间$[10,20]$上的均匀分布.商店每售出一单位商品可得利润 1 000 元;若需求量超过了进货量,商店可从其他商店调剂供应,这时每单位商品获利润为 500 元.试计算此商店经销该种商品每周所得利润的期望值.

为解决本题,只要写出利润 Z 与 X,Y 的关系,X 与 Y 的联合概率密度,然后经简单计算便得 $E(Z)$.在本书中将会介绍经管类中涉及的其他应用题.

结束语.将下面几句话赠给考生:

> 备考时:理解概念,记住公式,掌握类型,熟练方法.
> 考场上:读通考题,选取方法,严密思维,准确运算.

预祝考生获得好的成绩.

本书承恩波策划编写,并承南京大学数学系姜东平教授仔细审阅,作者深表谢意.

编著者

于浙江大学求是村

目 录

第一篇 高等数学

第二篇 线性代数

第一篇　高等数学

第一章　函数、极限、连续

大纲要求

了解　函数的有界性、单调性、周期性和奇偶性，反函数及隐函数的概念，初等函数的概念，数列极限和函数极限（包括左、右极限）的概念，无穷大的概念及其与无穷小的关系，极限的性质与极限存在的两个准则，连续函数的性质和初等函数的连续性.

会　建立简单应用问题的函数关系，应用两个重要极限，用洛必达法则求极限，判别函数间断点的类型，应用连续函数在闭区间上的性质.

理解　函数的概念，复合函数及分段函数的概念，无穷小的概念和基本性质，闭区间上连续函数的性质，函数连续性（含左、右连续）的概念.

掌握　函数的表示法，基本初等函数的性质及其图形，无穷小的比较方法，极限的四则运算法则.

§1　函　　数

一、内容精讲

（一）基本概念

1. 函数的定义

设在某个过程中，有两个变量x和y，当变量x在它的变化范围X（实数集）内每取一个值时，按照一定规律，变量y有惟一确定的实数值与它对应，则称y为x的函数，记作

$$y=f(x),x\in X.$$

x称自变量，y称因变量，f称对应关系，也称$f(x)$为x的函数，集合

$$Y=\{y\mid y=f(x),x\in X\}$$

称为该函数的值域. 本书第一篇中，如无另外声明，x,y均取实数.

2. 函数的一些特性的定义

(1) 奇偶性　设函数$f(x)$在对称于原点$x=0$的某X上有定义，并且对于任意$x\in X$，必有$f(-x)=f(x)$（相应地$f(-x)=-f(x)$），则称$f(x)$为X上的一个偶（奇）函数.

(2) 周期性　设函数$f(x)$的定义域是X，若存在常数$T>0$，当$x\in X$时，必有$x\pm T\in X$，且$f(x+T)=f(x)$，则称$f(x)$为周期函数，T称为它的一个周期. 通常称的周期是指使得$f(x+T)=f(x)$成立的最小正数T（如果存在的话）.

(3) 有界性　设函数$f(x)$在X上有定义，若存在常数M，当$x\in X$时$f(x)\leqslant M$，则称$f(x)$在X上有上界；若存在m，当$x\in X$时$f(x)\geqslant m$，则称$f(x)$在X上有下界；如果$f(x)$在X上既有上界又有下界，则称$f(x)$在X上有界.

若不论 M 多么大，总有相应的 $x_M \in X$，使 $f(x_M) > M$，称 $f(x)$ 在 X 上无上界，若不论 m 多么小，总有相应的 $x_m \in X$，使 $f(x_m) < m$，称 $f(x)$ 在 X 上无下界. $f(x)$ 在 X 上无上界或无下界，称 $f(x)$ 在 X 上无界.

(4) 单调性　设函数 $f(x)$ 在 X 上有定义，若对于 X 上的任意两点 $x_1, x_2, x_1 < x_2$，必有 $f(x_1) \leqslant (\geqslant) f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上单调增加(减少)；如果必有 $f(x_1) < (>) f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 X 上严格单调增加(减少).

3. 反函数、复合函数、初等函数、分段函数的定义

(1) 反函数　设函数 $y = f(x)$ 的定义域为 X，值域为 R_f. 若对于 R_f 中的每一个 y，由 $y = f(x)$ 有惟一的一个 $x \in X$ 与之对应，则记 $x = \varphi(y)$ 或 $x = f^{-1}(y)$，称为 $y = f(x)$ 的反函数，与此相呼应，称 $y = f(x)$ 为直接函数，反函数的定义域与值域分别是直接函数的值域与定义域.

有时也将 $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 写成 $y = f^{-1}(x)$.

✓在同一直角坐标系中，$y = f(x)$ 与 $x = f^{-1}(y)$ 的图像一致，$y = f(x)$ 与 $y = f^{-1}(x)$ 的图像关于直线 $y = x$ 对称.

(2) 复合函数　设函数 $y = f(u)$ 的定义域是 D_f，函数 $u = \varphi(x)$ 的定义域是 D_φ，值域是 R_φ. 若 $D_f \cap R_\varphi \neq \varnothing$，则称函数 $y = f(\varphi(x))$ 为 x 的复合函数，它的定义域是 $\{x \mid x \in D_\varphi \text{ 且 } \varphi(x) \in D_f\}$.

(3) 基本初等函数与初等函数　下述 $1^\circ \sim 6^\circ$ 类函数称基本初等函数：

1° 常值函数　C(C 为常数)，$x \in \mathbf{R}$；

2° 幂函数　x^α(α 为常数)，定义域因 α 而异，但不论 α 如何，在 $(0, +\infty)$ 内总有定义；

3° 指数函数　a^x(常数 $a > 0, a \neq 1$)，$x \in \mathbf{R}$；

4° 对数函数　$\log_a x$(常数 $a > 0, a \neq 1$)，$x \in (0, +\infty)$；

5° 三角函数　$\sin x, x \in \mathbf{R}$；$\cos x, x \in \mathbf{R}$；$\tan x, x \in \left(k\pi - \dfrac{\pi}{2}, k\pi + \dfrac{\pi}{2}\right), k \in \mathbf{Z}$；$\cot x, x \in (k\pi, (k+1)\pi)$，$k \in \mathbf{Z}$；

6° 反三角函数　$\arcsin x, x \in [-1, 1]$；$\arccos x, x \in [-1, 1]$；$\arctan x, x \in \mathbf{R}$；$\operatorname{arccot} x, x \in \mathbf{R}$.

由基本初等函数经有限次加、减、乘、除、复合而成的函数称初等函数.

(4) 分段函数　一个函数在其定义域内的不同范围用不同的表达式表示，称这种形式表示的函数为分段函数.

常见的分段函数有：

1° 绝对值函数　$|x| = \begin{cases} x, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$

✓2° 符号函数　$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0. \end{cases}$

✓3° 取整函数　$[x]$ 表示不超过 x 的最大整数. 例如 $[\pi] = 3, [-\pi] = -4, [2] = 2$.

注意，分段函数也可能是初等函数，例如 $|x| = \sqrt{x^2}$.

(二) 重要关系及重要定理

1. 函数奇偶性的判定

(1) 一般靠定义来判定奇偶性. 特别，如果 X 不对称于原点 O，则 $f(x)$ 在 X 上必定不是奇(偶)函数.

(2) 在直角坐标中，奇函数的图像对称于原点，偶函数的图像对称于 y 轴.

✓(3) 设 $f(x), g(x)$ 在 X 上为奇函数，$\varphi(x), \psi(x)$ 在 X 上为偶函数，则

$f(x) \pm g(x), f(x)\varphi(x)$ 在 X 上均为奇函数；

$\varphi(x) \pm \psi(x), f(x)g(x), \varphi(x)\psi(x)$ 在 X 上均为偶函数.

以下关于奇(偶)性的一些性质，其证明留待第二章与第三章，现先罗列于后.

✓(4) 设 $f(x)$ 为奇(偶)函数，且可导，则 $f'(x)$ 必为偶(奇)函数.

✓(5) 设 $f(x)$ 为奇函数，且连续，则它的一切原函数均为偶函数.

(6) 设 $f(x)$ 为偶函数，且连续，则它有且仅有一个原函数为奇函数，此惟一为奇函数的原函数是 $\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$.

2. 函数周期性的判定

(1) 一般靠定义来判定.

(2) 在直角坐标系中，画出 $f(x)$ 在一个周期上的图像，将它向左、右按周期平移，便得 $f(x)$ 的整个图像.

以下(3)与(4)的结论，其证明留待第二章与第三章.

✓(3) 设 $f(x)$ 为周期 T 的周期函数，且可导，则 $f'(x)$ 亦具有周期 T.

✓(4) 设 $f(x)$ 为周期 T 的周期函数，且连续，但它的原函数不一定是周期函数，它的原函数是否为周期函数，需要满足条件 $\int_0^T f(x)\mathrm{d}x = 0$. 当此条件满足时，$f(x)$ 的一切原函数都是周期为 T 的周期函数，当此条件不满足时，它的任何一个原函数都不是周期函数.

3. 函数单调性的判定

简单一点的靠定义(高等数学中不常用)，一般用微分学中的办法，见第二章.

✓**4. 函数 $f(x)$ 在数集 X 上有界性的判定**

有界性的判定，没有象奇、偶性，单调性那么方便，结论比较零碎，较常用的有下述一些充分条件，但都不是必要条件.

(1) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ 存在，则存在 $x = x_0$ 的一个去心邻域 $\mathring{U}(x_0)$，$f(x)$ 在 $\mathring{U}(x_0)$ 内有界，对于 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$，$\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$ 亦有类似结论.

(2) 设 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ 存在，则存在数 $N > 0$，在 $|x| > N$ 内 $f(x)$ 有界，对于 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$、$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ 亦有类似的结论.

(3) 设 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界.

(4) 设 $f(x)$ 在数集 X 上有最大值与最小值，则 $f(x)$ 在 X 上有界.

下述定理是无界的充分条件，但其逆不真：

(5) 设 $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$，则在 $x = x_0$ 的去心邻域内，$f(x)$ 无界，类似地有其它相应的结论，不赘述.

5. 关于反函数的存在性及可导性定理

设 $y = f(x)$ 在区间 I 上严格单调，值域为 R_f，则在 R_f 上存在严格的有相同单调性的反函数，其值域为区间 I；

若又设 $y = f(x)$ 在 I 上连续，则 R_f 也是区间，且反函数在 R_f 上也连续；

✓若再设 $f'(x)$ 存在，且 $f'(x) \neq 0$,，则反函数在 R_f 上亦可导，且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{1}{\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}}. \tag{1.1}$$

二、考题类型、解题策略及典型例题

类型 1.1 求复合函数的定义域

解题策略 由外层函数的定义域限制内层函数的取值范围，再由此确定内层函数的定义域. 如果有多层复合，就按此层层由外向内推. 如果该函数是由若干有限个函数经四则运算而成，那么应先求出这有限个函数的定义域，取其交集，并去掉分母为零的集合.

有时通过求反函数的值域，可方便地得到直接函数的定义域.

例 1.1(填空题) 函数 $y = \arccos\dfrac{3x}{x^2+2}$ 的定义域是________.

解 应填$(-\infty,-2]\cup[-1,1]\cup[2,+\infty)$.

由 $y=\arccos u$ 的定义域知 $-1\leqslant u\leqslant 1$.从而 $-1\leqslant \dfrac{3x}{x^2+2}\leqslant 1$,解此不等式,得 x 的范围如上所填.

√ **例 1.2**(填空题) 设 $f(x)=\sin x, f(y(x))=1-x^2$,则函数 $y(x)$ 的定义域为________.

解 应填 $-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}$.

考察由 $\sin y=1-x^2$ 确定的 $y=y(x)$ 的各反函数的值域,即 x 的取值范围,就是 $y(x)$ 的定义域.

所以
$$x^2=1-\sin y,$$
$$0\leqslant x^2\leqslant 2,$$
$$-\sqrt{2}\leqslant x\leqslant\sqrt{2}.$$

类型 1.2 已知 $f(x)$ 在某一区间的表达式,并给出周期性、奇偶性等某些条件,求 $f(x)$ 在另一区间上的表达式

解题策略 按题目要求并使用周期性、奇偶性等条件去做.

√ **例 1.3**(填空题) 设 $f(x)$ 是以 2 为周期的偶函数,且当 $x\in(2,3)$ 时 $f(x)=x^2$,则当 $x\in(-2,0)$ 时 $f(x)=$________.

解 应填 $f(x)=\begin{cases}(x+4)^2, & x\in(-2,-1),\\(2-x)^2, & x\in(-1,0).\end{cases}$

当 $x\in(-2,-1)$ 时,$x+4\in(2,3)$,从而由周期性,有
$$f(x)=f(x+4)=(x+4)^2;$$
当 $x\in(-1,0)$ 时,$-x\in(0,1)$,$2<2-x<3$,由偶函数知,
$$f(x)=f(-x)=f(2-x)=(2-x)^2.$$
所以 $f(x)$ 如上所填.

类型 1.3 求分段函数的复合函数的表达式

解题策略 (1)按外层写出复合函数的表达式,同时写出中间变量(即内层函数)的取值范围;(2)再按中间变量(即内层函数)的分段表达式,过渡到自变量的变化范围,得到分段表达式.

例 1.3(填空题) 设 $f(x)=\begin{cases}1, & |x|<1,\\0, & |x|\geqslant 1,\end{cases}$

$g(x)=\begin{cases}0, & |x|\leqslant 1,\\1, & |x|>1.\end{cases}$ 则 $f(g(x))=$________,$g(f(x))=$________.

解 应分别填 $f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1.\end{cases}$ $g(f(x))\equiv 0,-\infty<x<+\infty$.

$f(g(x))=\begin{cases}1, & |g(x)|<1,\\0, & |g(x)|\geqslant 1.\end{cases}$ 由 $g(x)$ 的表达式知,$|g(x)|<1\Leftrightarrow|x|\leqslant 1$;$|g(x)|\geqslant 1\Leftrightarrow|x|>1$.将关于 $g(x)$ 的条件过渡到自变量的条件,便有
$$f(g(x))=\begin{cases}1, & |x|\leqslant 1,\\0, & |x|>1.\end{cases}$$
$$g(f(x))=\begin{cases}0, & |f(x)|\leqslant 1,\\1, & |f(x)|>1.\end{cases}$$
由 $f(x)$ 的表达式知,$|f(x)|\leqslant 1\Leftrightarrow x\in(-\infty,+\infty)$;$|f(x)|>1\Leftrightarrow x\in\varnothing$(空集).所以 $g(f(x))\equiv 0$,$x\in(-\infty,+\infty)$.

√ **例 1.4**(解答题) 设 $f(x)=\begin{cases}(x-1)^2, & \text{当 } x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-x}, & \text{当 } x>1.\end{cases}$ 求 $f(f(x))$ 的表达式.

解 按照解题策略所说,有

$$f(f(x))=\begin{cases}(f(x)-1)^2, & 当\ f(x)\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-f(x)}, & 当\ f(x)>1.\end{cases}$$

再将中间变量的表达式代入，有

$$f(f(x))=\begin{cases}((x-1)^2-1)^2, & 当(x-1)^2\leqslant 1\ 且\ x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{1}{1-x}-1\right)^2, & 当\dfrac{1}{1-x}\leqslant 1\ 且\ x>1,\\ \dfrac{1}{1-(x-1)^2}, & 当(x-1)^2>1\ 且\ x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1-x}}, & 当\dfrac{1}{1-x}>1\ 且\ x>1.\end{cases}$$

化简便有

$$f(f(x))=\begin{cases}(x^2-2x)^2, & 当\ 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2, & 当\ x>1,\\ \dfrac{1}{2x-x^2}, & 当\ x<0.\end{cases}$$

类型 1.4　讨论已知函数有界(无界)的题

解题策略　1. 讨论函数有界性，一般用本节一(二)的 4 中所说的一些充分条件.

2. 要证明函数 $f(x)$ 在某点 $x=x_0$ 的右侧或左侧去心邻域内无界，有两种办法可供选用：(1) 相应地去证 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=\infty$ 或相应地去证 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=\infty$；(2) 取数列 $x_n\to x_0^+$(或 $x_n\to x_0^-$)，去证 $\lim\limits_{n\to\infty}f(x_n)=\infty$.

✓ **例 1.5**（选择题）　函数 $f(x)=\dfrac{|x|\sin(x-2)}{x(x-1)(x-2)^2}$ 在下列哪个区间内有界

(A) $(-1,0)$.　　(B) $(0,1)$.　　(C) $(1,2)$.　　(D) $(2,3)$.　[　]

解　因为 $\lim\limits_{x\to -1^+}f(x)$ 存在，所以在 $x=-1$ 的右侧小邻域内，例如 $-1<x<-1+\delta_1$ 内，$f(x)$ 有界. 又 $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ 存在，所以在 $x=0$ 的左侧小邻域内，例如 $0-\delta_2<x<0$ 内，$f(x)$ 有界. 又 $f(x)$ 在闭区间 $[-1+\delta_1,-\delta_2]$ 上连续，故有界. 综合之，$f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内有界.

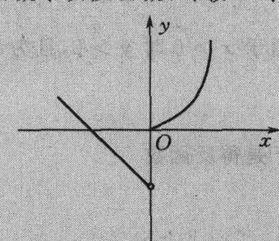
易见 $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to 2}f(x)=\infty$，故(B)，(C)，(D) 所表示的区间内 $f(x)$ 均无界，因此选(A).

类型 1.5　求反函数的表达式

解题策略　1. 求简单的、严格单调的、连续函数的反函数，一般只要从 $y=f(x)$ 解得 $x=\varphi(y)$ 即可.

2. 分段的，每分段区间上为严格单调的，并且每分段的开区间内是连续的函数求其反函数，可按 1 的办法分段处理. 但请注意这样分段得到的表达式将各区间段上得到的合在一起，并不一定构成一个函数，换言之，这种函数的反函数可以不存在，例如，设

$$y=f(x)=\begin{cases}-x-1, & 当\ x<0,\\ x^2, & 当\ x\geqslant 0.\end{cases}$$

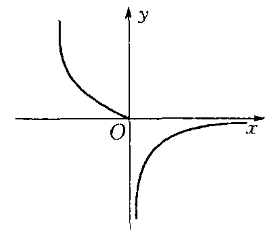


✓ 在 $-\infty<x<0$ 内得 $x=-y-1$，$(-1<y<+\infty)$；在 $0\leqslant x<+\infty$ 内得 $x=\sqrt{y}$，$(0\leqslant y<+\infty)$. 但在 $0\leqslant y<+\infty$ 内 $y=f(x)$ 的反函数不存在，因为这时由 y 对应的 x 不惟一，不满足函数定义中要求“惟一”!

3. 对于较复杂的函数 $y=f(x)$，求它的反函数之前，应对它的值域与单调性、连续性讨论清楚，才便于下手.

例 1.6(填空题)　设 $y=f(x)=\begin{cases}-\dfrac{1}{x}, & 当\ x>0,\\ x^2, & 当\ x\leqslant 0.\end{cases}$ 则它的反函数 $x=f^{-1}(y)=$ ________.

分析　按解题策略中第 2 条办.



解　应填 $x=f^{-1}(y)=\begin{cases}-\dfrac{1}{y}, & 当\ y<0,\\ -\sqrt{y}, & 当\ y\geqslant 0.\end{cases}$

由 $y=-\dfrac{1}{x}(x>0)$ 得 $x=-\dfrac{1}{y}(y<0)$,由 $y=x^2(x\leqslant 0)$ 得 $x=-\sqrt{y}(y\geqslant 0)$,合并之,得反函数 $x=f^{-1}(y)$ 如上所填.

例 1.7(解答题)　讨论并求函数

$y=f(x)=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 的反函数及其定义域.

分析　应先分析清楚 $y=f(x)$ 的定义域、值域以及单调性,再去解 x.

解　由于 x^2+x+1 与 x^2-x+1 的判别式均为负,故对一切 x,x^2+x+1 与 x^2-x+1 均为正,故知 $y=f(x)$ 的定义域为 $-\infty<x<+\infty$.

又易见 $x>0$ 时 $\sqrt{x^2+x+1}>\sqrt{x^2-x+1}$,从而 $f(x)>0$,并且 $f(-x)=-f(x)$(为奇函数).

再考虑单调性,只需考虑 $x>0$ 处即可.

$$\begin{aligned}f'(x)&=\frac{2x+1}{2\sqrt{x^2+x+1}}-\frac{2x-1}{2\sqrt{x^2-x+1}}\\&=\frac{(2x+1)\sqrt{x^2-x+1}-(2x-1)\sqrt{x^2+x+1}}{2\sqrt{x^2+x+1}\sqrt{x^2-x+1}}.\end{aligned}$$

当 $0<x\leqslant\dfrac{1}{2}$ 时,显然 $f'(x)>0$. 当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时,分子中两项均为正,为证 $f'(x)>0$,等价于去证

$$\left((2x+1)\sqrt{x^2-x+1}\right)^2>\left((2x-1)\sqrt{x^2+x+1}\right)^2.$$

经计算,上式等价于 $x>0$. 故当 $x>\dfrac{1}{2}$ 时上式正确,从而知当 $x>0$ 时 $f'(x)>0$,$f(x)$ 为严格单调增.

为了弄清楚反函数的定义域,应求出直接函数 $y=f(x)$ 的值域. 因为它是严格单调增,故考察 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 便可知它的值域.

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}f(x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\frac{2x}{\sqrt{x^2+x+1}+\sqrt{x^2-x+1}}=1,\end{aligned}$$

所以当 $x>0$ 时 $y=f(x)$ 的值域为 $0<y<1$.

最后,由 $y=\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1}$ 去解出 x,经移项,两边平方,再平方,可得

$$4x^2(1-y^2)=(4-y^2)y^2,$$

由于 $x>0$ 时 $y>0$,且为奇函数,故得

$$x=\frac{y}{2}\sqrt{\frac{4-y^2}{1-y^2}},\qquad |y|<1.$$

于是得反函数

$$f^{-1}(x)=\frac{x}{2}\sqrt{\frac{4-x^2}{1-x^2}},\qquad |x|<1.$$

§2 极 限

一、内容精讲

(一) 基本概念

1. 极限的定义

序号与记号	对于任给	存 在	当……时	就 有
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = A$	$\varepsilon > 0$	正整数 N	$n > N$	$\|u_n - A\| < \varepsilon$
(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$N > 0$	$x > N$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$
(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$N < 0$	$x < N$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$
(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$N > 0$	$\|x\| > N$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$
(5) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < x - x_0 < \delta$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$
(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$-\delta < x - x_0 < 0$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$
(7) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A$	$\varepsilon > 0$	$\delta > 0$	$0 < \|x - x_0\| < \delta$	$\|f(x) - A\| < \varepsilon$

以上(2) ~ (7) 六种情形称为函数的极限,统一可以记成$\lim\limits_{x\to\square} f(x) = A$,其中视 x 的具体趋向,$x\to\square$ 用来表示 $x\to+\infty, x\to x_0,\cdots$,等等.其中(5),(6) 常分别记为 $f(x_0^+) = A, f(x_0^-) = A$.

2. 无穷小($\lim\limits_{x\to\square} f(x) = 0$)

设$\lim\limits_{x\to\square} f(x) = 0$,称 $x\to\square$ 时 $f(x)$ 为无穷小.即:极限为零的变量(函数)称为无穷小,凡说到无穷小,必须同时说明 $x\to\square$ 这个过程.常量中只有 0 是无穷小,其它任何常量都不是无穷小.

3. 无穷大($\lim\limits_{x\to\square} f(x) = \infty$)

序号与记号	对于任给	存 在	当……时	就 有
(8) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \infty$	$M > 0$	$\delta > 0$	$0 < \|x - x_0\| < \delta$	$\|f(x)\| > M$
(9) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$	$M > 0$	$N > 0$	$\|x\| > N$	$\|f(x)\| > M$

仔细区分,又有 $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ 等,不赘述.

$\lim\limits_{x\to\square} f(x) = \infty$ 属于极限不存在范畴.

4. 无穷小的比较

设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为两个无穷小,且 $x\to\square$ 的过程中 $\beta(x)\neq 0$,$\alpha(x)$ 不恒等于零,并设

$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)}{\beta(x)} = A.$$

(1) 若 $A\neq 0$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为同阶无穷小;

(2) 若 $A=1$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 为等价无穷小,记成 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim\beta(x)$,由定义可见等价为同阶的特殊情形;

(3) 若 $A=0$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的高阶无穷小,记为 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)=o(\beta(x))$;

(4) 若 $\lim\limits_{x\to\square}\dfrac{\alpha(x)}{\beta(x)}=\infty$,则称 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 为 $\beta(x)$ 的低阶无穷小.

(二) 重要关系及重要定理

1. 左、右极限与存在极限的关系

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A\Leftrightarrow\lim_{x\to x_0^-}f(x)=\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A.$$

注 讨论分段函数的分界处的极限,含有 $e^{\frac{1}{x}}$、$|x|$ 这些式子讨论 $x\to0$ 时的极限,含有取整函数 $[x]$ 讨论 $x\to$ 整数时的极限,常需分左、右极限处理然后运用本题结论.

2. $\{u_{2n-1}\}$ 及 $\{u_{2n}\}$ 存在极限与 $\{u_n\}$ 存在极限的关系

$$\lim_{n\to\infty}u_n=A\Leftrightarrow\lim_{n\to\infty}u_{2n-1}=\lim_{n\to\infty}u_{2n}=A.$$

注 若奇下标数列与偶下标数列表达式不一样时,讨论该数列的极限常需分奇、偶下标讨论之.

3. 极限与无穷小的关系

$$\lim_{x\to\square}f(x)=A\Leftrightarrow f(x)=A+\alpha(x),\text{其中}\lim_{x\to\square}\alpha(x)=0.$$

注 此关系的重要性在于:若戴了极限号帽子运算不方便时,可以利用此关系脱掉极限号去进行运算,必要时再取极限.

4. 无穷小与无穷大的关系

$$\lim_{x\to\square}f(x)=\infty\Rightarrow\lim_{x\to\square}\frac{1}{f(x)}=0,$$

$$\lim_{x\to\square}g(x)=0,\text{但 }x\to\square\text{ 的过程中 }g(x)\neq0,\Rightarrow\lim_{x\to\square}\frac{1}{g(x)}=\infty.$$

5. 存在极限与有界的关系

(见本章 §1一(二)4之(1)(2)).

6. 保号性(有的教科书上称保序性)及其推论

设 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)=A$,$A>0(A<0)$,则存在 $\square$ 的某去心邻域 $\mathring{U}$,当 $x\in\mathring{U}$ 时 $f(x)>0$(相应地 $f(x)<0$).

这里及以后,凡讲到 $\square$ 的去心邻域 $\mathring{U}$ 指的是:若 $\square$ 为有限数 x_0,则 $\mathring{U}=\{x\,|\,0<|x-x_0|<\delta,\delta>0\text{ 为某数}\}$;若 $\square$ 指的是 ∞,则 $\mathring{U}=\{x\,|\,|x|>N,N>0\text{ 为某数}\}$.

推论 若存在 $\mathring{U}$,当 $x\in\mathring{U}$ 时恒有 $f(x)\geqslant0$(或 $\leqslant0$),且 $\lim\limits_{x\to\square}f(x)$ 存在为 A,则必有 $A\geqslant0(A\leqslant0)$. 以此可事先判断 A 的符号.

7. 求积、商的极限时用等价无穷小代换

设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)\sim a(x)$,$\beta(x)\sim b(x)$,则

$$\lim_{x\to\square}\frac{\alpha(x)\gamma(x)}{\beta(x)\delta(x)}=\lim_{x\to\square}\frac{a(x)\gamma(x)}{b(x)\delta(x)}.$$

即:整个式子中的乘、除因式,可用其等价无穷小代换求其极限,加、减时不能用等价无穷小代换;部分式子的乘、除因式也不能用等价无穷小代换.

8. 两无穷小为等价的充要条件

设 $x\to\square$ 时 $\alpha(x)$ 与 $\beta(x)$ 都是无穷小,则

$$\alpha(x)\sim\beta(x)\Leftrightarrow\alpha(x)-\beta(x)=o(\beta(x)). \tag{2.1}$$