全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型精解精练

数学一

- 研究常考题型是考试过关的捷径
- 实战预测试卷是加分致胜的法宝

汪志宏 徐 倩 李勇智 编著

2009 考研必备

巧学、巧练、巧过关

清华大学出版社

全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书

出现频率最高的100种典型题型
精解精练——数学一

汪志宏 徐倩 李勇智 编著

清华大学出版社
北 京

内容简介

考研作为一种选拔性水平考试，试题规范，规律性很强，不少题型反复出现，把这些反复出现的题型按考试出现频率整理归类，并提供解题思路，可以帮助考生节省宝贵的复习时间，提高应试效率，对考生迎考大有帮助。本书正是基于这一思路，由资深考研辅导老师精心编写而成。

全书共分 11 章，第 1~10 章归纳整理了最常考的 100 种典型题型，具体内容包括：一元函数微分学、一元函数积分学、向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、无穷级数、常微分方程、线性代数、概率论及数理统计，第 11 章为全国硕士研究生入学考试数学一全真预测试题及其参考解答。每种题型分为三个板块：真题分析、题型点睛和即学即练。真题分析以历届考研真题为实例进行分析，旨在让读者彻底明白这类题型的解法；题型点睛浓缩了该题型的要点，并加以讲解与点评，便于读者理解与记忆；即学即练中作者设计了部分试题，让读者即学即练，即练即会，以达到举一反三的功效。本书附录给出了各章即学即练试题的详细解析与参考答案。

本书以广大考研读者为主要对象，帮助考生在短时间内获取较大收益，同时可作为考研辅导班的培训教材以及高等院校相关师生的教学参考书。

图书在版编目（CIP）数据

出现频率最高的 100 种典型题型精解精练. 数学. 1/汪志宏，徐倩，李勇智编著.
—北京：清华大学出版社，2007.12
（全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书）
ISBN 978-7-302-16722-8

Ⅰ.出…　Ⅱ.①汪…②徐…③李…　Ⅲ.高等数学—研究生—入学考试
—解题　Ⅳ.G643-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 205332 号

责任编辑：丁庆翔
责任校对：孟宗芳
责任印制：科　海
出版发行：清华大学出版社　　**地　址**：北京清华大学学研大厦 A 座
http://www.tup.com.cn　　**邮　编**：100084
c-service@tup.tsinghua.edu.cn
社 总 机：010-62770175　　**邮购热线**：010-62786544
投稿咨询：010-62772075　　**客户服务**：010-62776969
印 装 者：北京市艺辉印刷有限公司
经　销：全国新华书店
开　本：185×260　**印　张**：19.25　**字　数**：468 千字
版　次：2008 年 2 月第 1 版　**印　次**：2008 年 2 月第 1 次印刷
印　数：1~5000
定　价：27.00 元

本书如存在文字不清、漏印以及缺页、倒页、脱页等印装质量问题，请与清华大学出版社出版部联系调换。联系电话：82896445　　产品编号：027037-01

前　言

读考题排行榜　走成功捷径路

全国硕士研究生入学考试试题是广大工作在教学一线的骨干教师和参加命题的专家教授的智慧和劳动结晶，考试试题既反映了考试大纲对考生知识、能力等的要求，又蕴含着考研命题的基本原则和趋势，对于广大准备考研的考生而言，也是一笔宝贵财富。

为了给广大考生提供一套高效实用的试题导航标准应试教材，我们在广泛调研和充分论证的基础上，听取资深专家及众多考生的建议，组织编写了这套《全国硕士研究生入学考试考题排行榜系列丛书》，其目的是帮助考生在复习阶段，浓缩考试中出现频率最高的题型，“把书读薄”，以做到成竹在胸，引导考生在短时间内快速突破过关。

✦ 丛书书目

丛书第一批推出 8 本：

- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学一
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学二
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学三
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数学四
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——数据结构
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——C 语言程序设计
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——操作系统
- ✧ 出现频率最高的 100 种典型题型精解精练——电路

✦ 关于本书

本书通过深入分析历年真题特点，归纳整理出了硕士研究生“数学一”入学考试常考的 100 种题型，并依据考试大纲的章节顺序，将这 100 种题型分成 10 章进行解析与点评，便于考生更快地了解和掌握复习的重点，发现命题的规律，明确复习方向，节省宝贵的复习时间。由于某些题型几乎是年年出现，所以本书可以令考生更高效地复习与掌握必考题型与知识点。这也正是本书的最大特色：省时、高效、高命中率。

书中将全国几十所重点高校近 10 年考研试卷中的同一题型试题，归纳整理成 100 种高频题型（即 TOP1~TOP100），对每种题型进行了详细分析并给出参考解答，便于考生复习该内容时可以了解：这种题型考过什么样的题目，常与哪些知识点联系起来出题，从哪个角度命题，等等。每种题型具体分为如下三个板块：

- 真题分析。以重点高校近10年的考研真题为实例，分析解题思路，实际就是进行破题，最终找出解题方法。分析以后给出详细的解答，旨在让考生掌握解题方法和技巧，以及这些方法技巧在每个具体问题中的灵活运用，彻底明白这类题型的解法。
- 题型点睛。浓缩该题型的要点，给出该题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，并加以讲解分析，便于考生理解与记忆。
- 即学即练。给出部分试题，让考生学过“真题分析”和“题型点睛”后就进行做题练习，以便更快更好地掌握所练题型的相关知识点和解题的一般方法或步骤，以达到举一反三、触类旁通的功效。

本书还提供了3套全国硕士研究生入学考试数学一全真预测试题并附有具体的参考解答，可以供考生在考前实战演练。为了让考生及时掌握自己的学习效果，书中最后还给出了“即学即练”中试题的具体解答，以便考生自查。

✦ 读者对象

本套丛书以全国硕士研究生入学考试的考生为主要读者对象，特别适合希望在较短时间内取得较大进步的广大应试考生，也可作为相关考试培训班的培训教材，以及高校师生的教学参考书。

✦ 关于作者

丛书由一线教学及考试研究专家分工编写。作者均长期从事这方面的教学和研究工作，积累了丰富的经验，对研究生入学考试颇有研究（其中大多数编写者多年参加真题阅卷及相关培训与辅导工作）。本书由汪志宏、徐倩和李勇智执笔编写而成。参与本丛书组织、指导、编写、审校和资料收集的人员有（以姓氏笔画为序）：王伦夫、石雪梅、刘志高、孙建东、余雪勇、吴蕾、张宏、李千目、李海、杜松、杨帮华、汪胡青、罗玮、费宁、袁堃、彭宜青、葛武滇等，在此对诸位作者付出的辛勤劳动表示衷心的感谢。

✦ 特别致谢

在此，首先对丛书所选用的参考文献的著作者，以及丛书所引用试题的出题老师和相关单位表示真诚的感谢。

✦ 互动交流

由于时间仓促，书中不妥之处，敬请广大读者批评指正。读者的进步，是我们最大的心愿。您如果发现书中有任何疑惑之处，请与我们交流。

作者的联系方式：iteditor@126.com
出版社的联系方式：feedback@khp.com.cn

作者
2008年1月

目　　录

第 1 章　一元函数微分学 1

TOP1：有关左右极限题 1

TOP2：利用两个重要极限公式求 1^{∞} 型极限 2

TOP3：利用单调有界准则求极限 4

TOP4：等价无穷小量及利用等价代换求极限 6

TOP5：判断函数的连续与否以及利用函数的连续性解题 8

TOP6：导数的定义式相关题 9

TOP7：利用左右导数判断函数在一点的可导性 10

TOP8：隐函数与参数方程所确定的函数求导数 12

TOP9：一元函数的极值相关题 14

TOP10：函数不等式的证明 15

TOP11：利用洛必达法则求极限 16

TOP12：利用微分中值定理证明等式或不等式 18

TOP13：泰勒公式相关题 21

TOP14：求曲线的渐近线 22

第 2 章　一元函数积分学 24

TOP15：利用第二换元法、分部积分法计算不定积分 24

TOP16：利用换元法和分部积分法计算定积分 26

TOP17：求变限积分的导数 28

TOP18：有关变限积分的无穷小量比较与单调性 29

TOP19：与定积分的几何意义相关题 31

TOP20：利用定积分求面积和体积 33

TOP21：定积分的物理应用 35

第 3 章　向量代数与空间解析几何 38

TOP22：求平面与直线的方程 38

TOP23：求旋转曲面方程 39

第 4 章　多元函数微分学 42

TOP24：连续、可导、偏导数连续、可微及其联系 42

TOP25：求函数偏导数或全微分 43

TOP26：利用多元复合函数求导法则求导 45

TOP27：利用隐函数求导公式求导 48

TOP28：多元函数微分学的几何应用 51
TOP29：求方向导数 53
TOP30：利用拉格朗日乘数法求多元函数的最值、极值 54

第 5 章　多元函数积分学 58

TOP31：变换二次积分次序和形式 58
TOP32：利用极坐标计算二重积分 60
TOP33：利用柱面坐标和球面坐标计算三重积分 61
TOP34：求第一类曲线积分 64
TOP35：计算第二类曲线积分 66
TOP36：利用斯托克斯公式计算第二类曲线积分 69
TOP37：曲线积分与路径无关相关题 71
TOP38：求第一类曲面积分 74
TOP39：直接计算第二类曲面积分 76
TOP40：直接利用高斯公式计算第二类曲面积分 78
TOP41：补充曲面并利用高斯公式计算第二类曲面积分 80

第 6 章　无穷级数 82

TOP42：数项级数收敛性判别 82
TOP43：求幂级数收敛半径收敛域 87
TOP44：幂级数的间接展开 89
TOP45：幂级数求和 92
TOP46：数项级数求和 94
TOP47：求傅里叶级数一点的收敛性 95
TOP48：周期为 2π 的傅里叶级数展开 97
TOP49：周期为 $2l$ 的傅里叶级数展开 98

第 7 章　常微分方程 100

TOP50：求解可分离变量的微分方程 100
TOP51：求解一阶线性微分方程 101
TOP52：求解可降阶方程 102
TOP53：求解二阶常系数齐次线性微分方程 103
TOP54：求解 $f(x)=e^{\lambda x}P_m(x)$ 的二阶常系数非齐次线性方程 104
TOP55：求解 $f(x)=e^{\lambda x}[P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x]$ 的二阶常系数非齐次线性方程 107
TOP56：一阶微分方程的应用 109
TOP57：二阶微分方程的应用 111

第 8 章　线性代数 114

TOP58：计算矩阵的行列式 114
TOP59：矩阵行列式与确定数 0（或 k）的关系 115

TOP60：求解矩阵方程 117
TOP61：有关逆矩阵的计算 119
TOP62：初等变换与初等方阵相关题 122
TOP63：求矩阵的秩 124
TOP64：求线性方程组的系数矩阵中的参数 125
TOP65：线性组合与线性表示相关题 126
TOP66：线性相关与线性无关相关题 127
TOP67：线性相关与线性无关应用 131
TOP68：齐次线性方程组求解 132
TOP69：非齐次线性方程组解的结构相关题 134
TOP70　参数线性方程组求解 135
TOP71：同解方程组相关题 137
TOP72：线性方程组应用 139
TOP73：求矩阵特征值和特征向量 141
TOP74：求对角矩阵 145
TOP75：已知特征值、特征向量求相似矩阵 148
TOP76：合同矩阵相关题 149
TOP77：二次型化为标准形 150
TOP78：求正交矩阵 152

第 9 章　概率论 155

TOP79：利用加法公式和减法公式计算事件发生的概率 155
TOP80：求几何概率 156
TOP81：条件概率与乘法公式相关题 158
TOP82：利用全概率公式与贝叶斯公式计算概率 159
TOP83：事件的独立性与独立重复试验相关题 161
TOP84：求一维随机变量函数的分布 163
TOP85：常见分布及概率计算 165
TOP86：分布函数的性质相关题 167
TOP87：多维离散型随机变量分布、边缘分布及独立性相关题 168
TOP88：多维离散型随机变量条件分布相关题 170
TOP89：求多维连续型随机变量边缘分布及条件分布 171
TOP90：求多维随机变量函数的分布 173
TOP91：多维随机变量有关概率计算 175
TOP92：期望、方差、标准差的计算和性质 177
TOP93：求一维随机变量函数的期望和方差 180
TOP94：求多维随机变量函数的期望 181
TOP95：求多维随机变量函数的方差 183
TOP96：协方差相关系数的计算、性质和不相关性 184

第10章　数理统计......189
TOP97：确定常见正态总体的抽样分布及求分位点......189
TOP98：求矩估计......192
TOP99：求最大似然估计......194
TOP100：估计量的评价标准相关题......196
第11章　全国硕士研究生入学考试数学一全真预测试题及其参考解答......199
硕士研究生入学考试数学一全真预测试题一......199
硕士研究生入学考试数学一全真预测试题一参考解答......203
硕士研究生入学考试数学一全真预测试题二......209
硕士研究生入学考试数学一全真预测试题二参考解答......212
硕士研究生入学考试数学一全真预测试题三......220
硕士研究生入学考试数学一全真预测试题三参考解答......223
附录　即学即练解答......231
参考文献......300

第 1 章　一元函数微分学

TOP1：有关左右极限题

【真题分析】

【真题 1】（2000, 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\left[\dfrac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\dfrac{\sin x}{|x|}\right]$.

分析：由于 $\lim\limits_{x\to 0^-}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=0$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}=+\infty$；$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sin x}{|x|}=-1$，$\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sin x}{|x|}=1$，所以要求左右极限.

解答：由于

$$\lim_{x\to 0^-}\left[\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\frac{2+0}{1+0}+(-1)=1$$

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{2\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+\mathrm{e}^{-\frac{3}{x}}}{\mathrm{e}^{-\frac{4}{x}}+1}+\frac{\sin x}{x}\right]=\frac{0+0}{0+1}+1=1$$

所以

$$\lim_{x\to 0}\left[\frac{2+\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}}{1+\mathrm{e}^{\frac{4}{x}}}+\frac{\sin x}{|x|}\right]=1$$

【题型点睛】

1．函数的极限存在的充要条件是函数的左右极限存在且相等；左右极限只要有一个不存在（包括极限没有或为 ∞）或左右极限都存在但不相等，则函数的极限就不存在.

2．求解这类题的一般步骤：

（1）求出函数的左右极限；

（2）若左右极限存在且相等，则函数的极限存在，左右极限有一个不存在（包括极限没有或为 ∞）或左右极限都存在但不相等，则函数的极限就不存在.

3．极限 $\lim\limits_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}}$，$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{|x|}$，$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x$，$\lim\limits_{x\to 0}\cot x$，$\lim\limits_{x\to 0}\operatorname{arccot} x$，$\lim\limits_{x\to 0}\arctan\frac{1}{x}$ 都不存在，所以一般函数里若含有这些函数，并且自变量的趋近方式与上面列出一致，则必须求左右极限.

类似 $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan x$，$\lim\limits_{x\to\infty}\operatorname{arccot}\frac{1}{x}$，$\lim\limits_{x\to\infty}a^x\,(a>0)$ 都不存在，一般函数里若含有这些函数，并且自变量的趋近方式与上面列出一致，则必须求 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ 和 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$，且有结论：

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}f(x)=A \Leftrightarrow \lim_{x\to\infty}f(x)=A$$

4．在计算过程中，经常用到函数极限四则运算法则：

设 $\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，则

（1）$\lim[f(x)\pm g(x)]=\lim f(x)\pm\lim g(x)=A\pm B$

（2）$\lim[f(x)\cdot g(x)]=\lim f(x)\cdot\lim g(x)=A\cdot B$

（3）$\lim\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}=\frac{A}{B}\quad(B\neq 0)$

必须牢牢记住运算法则前提条件是函数的极限存在：$\lim f(x)=A$，$\lim g(x)=B$，并且分母不为零.

5．实际往往是将极限四则运算法则同根据求函数左右极限来求极限、洛必达法则求极限、化成定积分求极限、夹逼定理、等价无穷小量理论等混合运用.

【即学即练】

1．（1992, 3 分）当 $x\to 1$ 时，函数 $\frac{x^2-1}{x-1}e^{\frac{1}{x-1}}$ 的极限

（A）等于 2　　（B）等于 0

（C）为 ∞　　（D）不存在但不为 ∞

【　】

TOP2：利用两个重要极限公式求 1^∞ 型极限

【真题分析】

【真题 1】（1995, 3 分）$\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=$______.

分析：由于极限是 1^∞ 形式，所以要用特殊极限 $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ 求解.

解答：$$\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{\sin x}}=\lim_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{1}{3x}\cdot\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{6x}{\sin x}}=\mathrm{e}^{6}$$

【真题 2】（1996, 3 分）设 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=8$，则 $a=$______.

分析：极限是 1^{∞} 形式，所以要用特殊极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$ 转化形式求解.

解答：由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+2a}{x-a}\right)^{x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left[\left(1+\dfrac{3a}{x-a}\right)^{\frac{x-a}{3a}}\right]^{\frac{3ax}{x-a}}=\mathrm{e}^{3a}=8$，所以 $a=\ln 2$.

【真题 3】（2003, 4 分）$\lim\limits_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^{2})}}=$______.

分析：极限是 1^{∞} 形式，要用特殊极限.为此，凑出 $\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$（$\varphi(x)\to 0$）形式.

解答：$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^{2})}}=\lim_{x\to 0}(1+\cos x-1)^{\frac{1}{\cos x-1}\cdot\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^{2})}}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^{2})}}$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{\ln(1+x^{2})}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^{2}}{x^{2}}=-\frac{1}{2}$$

所以，填 $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$.

【题型点睛】

1．利用两个重要极限公式求 1^{∞} 型极限的一般步骤：

（1）将函数的底数部分化为 $1+\varphi(x)$（$\varphi(x)\to 0$）或 $1+\dfrac{1}{\varphi(x)}$（$\varphi(x)\to\infty$）形式；

（2）将函数化为 $\left[\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}\right]^{f(x)}$（当 $\varphi(x)\to\infty$ 时）或 $\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{f(x)}$（当 $\varphi(x)\to 0$ 时）；

（3）$\lim f(x)=A$ 时，有 $\lim\left[(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^{A}$（当 $\varphi(x)\to 0$）；

$\lim f(x)=A$ 时，有 $\left[\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}\right]^{f(x)}=\mathrm{e}^{A}$（当 $\varphi(x)\to\infty$）.

2．两个重要极限在使用时可以变形，如 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\sin x}=1$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x}{\arcsin x}=1$；当 $\varphi(x)\to 0$ 时，

$\lim \dfrac{\sin\varphi(x)}{\varphi(x)}=1$， $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n=\mathrm{e}$；当 $\varphi(x)\to\infty$ 时， $\lim\left(1+\dfrac{1}{\varphi(x)}\right)^{\varphi(x)}=\mathrm{e}$；当 $\varphi(x)\to 0$ 时，

$\lim(1+\varphi(x))^{\frac{1}{\varphi(x)}}=\mathrm{e}$ 等.

3．求 1^∞ 型未定式不但可以用重要极限求解，还可以用洛必达法则来解，此法必须先取自然对数. 如真题 3 还可有以下方法：

令 $y=(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}$，则 $\ln y=\dfrac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}$，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln\cos x}{\ln(1+x^2)}=\lim_{x\to 0}\frac{-\dfrac{\sin x}{\cos x}}{\dfrac{2x}{1+x^2}}=\lim_{x\to 0}\left(-\frac{1+x^2}{2}\frac{\tan x}{x}\right)=-\frac{1}{2}$$

故
$$\lim_{x\to 0}(\cos x)^{\frac{1}{\ln(1+x^2)}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}}$$

【即学即练】

1．（1990, 3 分）设 a 是非零常数，则 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\dfrac{x+a}{x-a}\right)^x=$______.

2．（1991, 5 分）求 $\lim\limits_{x\to 0^+}(\cos\sqrt{x})^{\frac{\pi}{x}}$.

3．（1993, 5 分）求极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sin\dfrac{2}{x}+\cos\dfrac{1}{x}\right)^x$.

TOP3：利用单调有界准则求极限

【真题分析】

【真题 1】（2006, 12 分）设数列 $\{x_n\}$ 满足 $0<x_1<\pi$， $x_{n+1}=\sin x_n$.

（1）证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 存在，并求极限.（2）计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

分析：利用单调有界数列必有极限证明 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 存在，再求极限；利用洛必达法则和

等价无穷小量代换求 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

解答：

（1）当 $x_1\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ 时， $x_2=\sin x_1<x_1$ ，则 $x_2\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$.

类推， $x_{n+1}=\sin x_n<x_n$ ， $x_n\in\left(0,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$. 故数列 $\{x_n\}$ 单调递减.

而 $|x_{n+1}|=|\sin x_n|\leqslant 1$ ，即有界. 所以数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，故 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}$ 存在.

设 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=a$ ，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}\sin x_n$ ，即 $a=\sin a$ ，所以 $a=0$.

当 $x_1\in\left(\dfrac{\pi}{2},\pi\right)$ 时，$x_2=\sin x_1\leqslant 1<\dfrac{\pi}{2}$，则 $x_2\in\left(0,\dfrac{\pi}{2}\right)$. 类似上面所解，有 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=0$. 所以 $\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=0$.

（2） $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}$ ，而

$$\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\ln\left[\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)+1\right]=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^2}\left(\frac{\sin x}{x}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{\sin x-x}{x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{3x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{-\frac{1}{2}x^2}{3x^2}=-\frac{1}{6}$$

所以 $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^{\frac{1}{x^2}}=\lim\limits_{x\to 0}\mathrm{e}^{\frac{1}{x^2}\ln\left(\frac{\sin x}{x}\right)}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$ ，因此 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}=\mathrm{e}^{-\frac{1}{6}}$.

【题型点睛】

1．利用单调有界准则求数列或函数极限一般步骤：

（1）证明数列或函数是单调的；
（2）证明数列或函数是有界的；
（3）等式取极限，求出所求极限.

2．定理“单调有界数列必有极限”还可以叙述为：“单调递减有下界数列必有极限”或“单调递增有上界数列必有极限”. 同时注意若数列 $\{x_n\}$ 极限存在，则 $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+k}$ ，式中， k 为有限整数.

【即学即练】

1．（1996, 5 分）设 $x_1=10$ ， $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\ (n=1,2,\cdots)$ ，试证数列 $\{x_n\}$ 的极限存在，并

求此极限.

TOP4：等价无穷小量及利用等价代换求极限

【真题分析】

【真题 1】（2007, 4 分）当 $x \to 0^+$ 时，与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

（A）$1-e^{\sqrt{x}}$ （B）$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

（C）$\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$ （D）$1-\cos\sqrt{x}$

【 】

分析：利用等价无穷小量结论：当 $x \to 0$ 时，$\ln(1+x) \sim x$.

解答：当 $x \to 0^+$ 时，$\ln\dfrac{1+x}{1-\sqrt{x}} = \ln(1+\sqrt{x}) \sim \sqrt{x}$，选（B）.

【真题 2】（1994, 5 分）设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=2$，其中 $a^2+c^2 \neq 0$，则必有

（A）$b=4d$ （B）$b=-4d$

（C）$a=4c$ （D）$a=-4c$

【 】

分析：函数分子分母同时除以 x，再利用等价无穷小.

解答：
$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\dfrac{a\tan x}{x}+\dfrac{b(1-\cos x)}{x}}{\dfrac{c\ln(1-2x)}{x}+\dfrac{d(1-e^{-x^2})}{x}}$$

而
$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x}{x}=a，\quad \lim_{x\to 0}\frac{b(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{bx^2}{2x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2cx}{x}=-2c，\quad \lim_{x\to 0}\frac{d(1-e^{-x^2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^2d}{x}=0$$

所以
$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\frac{a}{-2c}=2$$

因此 $a=-4c$，选（D）.

【题型点睛】

1．等价无穷小量

（1）定义：如果$\lim\frac{\beta}{\alpha}=1$，就说$\beta$与$\alpha$是等价无穷小，记为$\alpha\sim\beta$.

（2）等价代换定理：设α，α'，β，β'是同一极限过程中的无穷小，且满足$\alpha\sim\alpha'$，$\beta\sim\beta'$，及$\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$存在或为无穷大，则$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$.

由此定理可推出：若在某变化过程下，$\alpha(x)\sim\overline{\alpha}(x)$，则$\lim f(x)\alpha(x)=\lim f(x)\overline{\alpha}(x)$.

（3）等价无穷小量在极限运算中占有重要地位，常见的等价无穷小量有：当$x\to 0$时，$\sin x\sim x$，$\tan x\sim x$，$1-\cos x\sim\frac{x^2}{2}$，$\arcsin x\sim x$，$\arctan x\sim x$，$\sqrt[n]{1+x}-1\sim\frac{x}{n}$，$\ln(1+x)\sim x$，$e^x-1\sim x$等.

常见的等价无穷小可以推广：如当$\varphi(x)\to 0$时，有$\sin\varphi(x)\sim\varphi(x)$，$\sqrt[n]{1+\varphi(x)}-1\sim\frac{\varphi(x)}{n}$，$1-\cos\varphi(x)\sim\frac{\varphi^2(x)}{2}$，$\ln(1+\varphi(x))\sim\varphi(x)$等.

2．利用无穷小的等价代换求两个无穷小的商的极限的一般步骤：

（1）将分子或分母通过等价代换，将函数化简；

（2）求化简后函数的极限.

3．注意：等价代换可以对分子、分母同时进行，即$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta'}$；也可只对分子或分母进行，即$\lim\frac{\alpha}{\beta}=\lim\frac{\alpha'}{\beta}=\lim\frac{\alpha}{\beta'}$；还可以只对部分乘积因子进行；但对于加、减中的每一项不能分别作代换.

4．真题2还可用以下方法：

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{a\tan x}{x}+\frac{b(1-\cos x)}{x}}{\frac{c\ln(1-2x)}{x}+\frac{d(1-e^{-x^2})}{x}}$$

而 $$\lim_{x\to 0}\frac{a\tan x}{x}=a,\quad \lim_{x\to 0}\frac{b(1-\cos x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{b\sin x}{1}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{c\ln(1-2x)}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{-2c}{1-2x}=-2c,\quad \lim_{x\to 0}\frac{d(1-e^{-x^2})}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{2xde^{-x^2}}{1}=0$$

所以$\lim\limits_{x\to 0}\frac{a\tan x+b(1-\cos x)}{c\ln(1-2x)+d(1-e^{-x^2})}=\frac{a}{-2c}=2$，因此$a=-4c$，选（D）.

【即学即练】

1．（2006, 4分）$\lim\limits_{x\to 0}\frac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$______.

2.（1991, 3分）已知当 $x \to 0$ 时，$(1+ax^2)^{\frac{1}{3}}-1$ 与 $\cos x-1$ 是等价无穷小，则常数 $a=$____.

TOP5：判断函数的连续与否以及利用函数的连续性解题

【真题分析】

【真题1】（2007, 4分）设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，下列命题错误的是

（A）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，则 $f(0)=0$

（B）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)+f(-x)}{x}=0$，则 $f(0)=0$

（C）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

（D）若 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在，则 $f'(0)$ 存在

【　】

分析：利用高阶无穷小量和函数连续及导数定义.

解答：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=0$，所以当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是比 x 高阶的无穷小量，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$. 而函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 连续，故 $f(0)=0$，（A）正确. 类似（B）也正确.

$f(0)=0$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$ 存在，（C）也正确. 故选（D）.

【题型点睛】

1. 若 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$，那么就称函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.

2. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续. 若 $\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)=f(x_0)$，则称 $y=f(x)$ 在点 x_0 处右连续.

3. 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处连续 $\Leftrightarrow$ 函数 $y=f(x)$ 在点 x_0 处左连续且右连续.

4. 分段函数的分段点不一定是分段函数的间断点.

5. 判断函数在一点是否连续的一般步骤：

（1）求函数在该点的极限；

（2）求函数在该点的值；

（3）若函数在该点的极限不存在，或虽然存在但不等于函数在该点的值，则函数在该点不连续；$\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ 时，$y=f(x)$ 在点 x_0 处连续.