教育部推荐教材
21世纪高等院校系列规划教材

线性代数

xianxing daishu

主　编　王祖朝
副主编　褚宝增

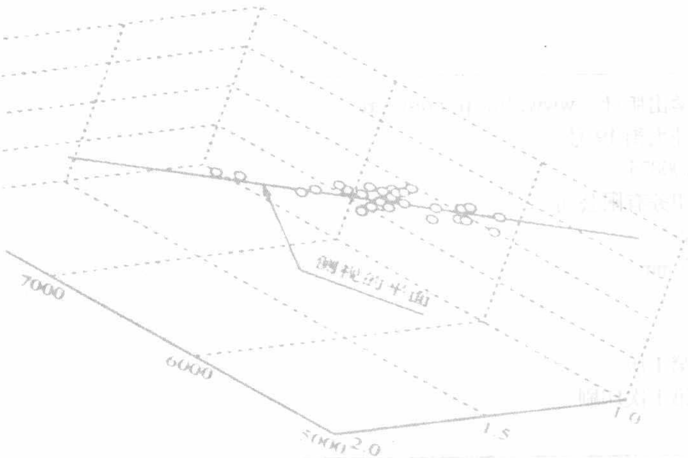
北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

教育部推荐教材
21世纪高等院校系列规划教材

线性代数

xianxing daishu

主　编　王祖朝
副主编　褚宝增
参　编　（排名不分先后）
邓　燕　吴　飞
王翠香　邢永丽
李金霞



北京师范大学出版集团
BEIJING NORMAL UNIVERSITY PUBLISHING GROUP
北京师范大学出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/王祖朝编. —北京：北京师范大学出版社，2008.7

(21世纪高等院校系列规划教材)

ISBN 978-7-303-09264-2

Ⅰ.线… Ⅱ.王… Ⅲ.线性代数-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第091481号

出版发行：北京师范大学出版社 www.bnup.com.cn
北京新街口外大街19号
邮政编码：100875

印　　刷：唐山市润丰印务有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：170 mm×230 mm
印　　张：16
字　　数：210千字
版　　次：2008年7月第1版
印　　次：2008年7月第1次印刷
定　　价：24.00元

责任编辑：刘鲲翔　　装帧设计：李葆芬
责任校对：李　菡　　责任印制：马鸿麟

前言

线性代数是数学的一个重要分支，其主要研究对象就是矩阵、向量及其运算。它不仅在数学、力学、物理学等经典的自然科学和工程技术领域有着重要的应用，而且在经济学、管理学等社会科学领域也有着十分广泛的应用。目前，线性代数课程已成为高等学校理、工、经、管等专业的一门基础数学课程。

目前的线性代数课程教材基本上可分为两类：一类是纯粹从抽象的角度出发阐述概念，适合于数学类专业的学生；而对一般的工科学生来说，理解相关概念时容易产生障碍。另一类则过于追求直观理解和实际应用，从而忽略了对学生的抽象思维训练，使得这些学生遇到数就能算，遇到字母符号就无从下手，严重缺乏符号演绎能力。这可能是由于对线性代数课程的培养目标在理解上的差异所造成的。线性代数确实有工具性的一面，这可能也是一个共识。因此，培养学生具备利用线性代数知识和工具执行计算的能力是该门课程的培养目标之一。但是，我们认为线性代数课程还应该具有另外一个培养目标，那就是代数建模能力和符号演绎能力，因为这是学生科学思维素质的一个重要方面。

鉴于此，我们在这本教材的叙述方式上兼顾直观和抽象。具体来说，就是通过实际的例子导入问题，然后引出相关概念，并在叙述时力求严谨、抽象，再通过大量的例题和习题诠释概念和结论。学生在学习过程中，自始至终都能经历从具体到抽象的建模过程以及从抽象到具体的应用体验，从而达到提高学生的代数建模能力和实际应用能力的目标。在教材的内容安排上，除了保留传统的内容外，增加了一章广义逆矩阵的内容，以供不同的专业选讲；同时，加大了习题量和应用的力度。尤其是在第五、第六、第七章，还专门安排了一节的应用内容。

另外，为了培养学生学习线性代数的兴趣，几乎在每一章的开始都有关于相关内容的历史，包括内容的起源、一些在历史上对相关内容有重大贡献的数学家等数学史知识。有些章节的数学史知识可能与前面的内容存在重叠，但为了完整性，我们保留这个特点。

为了方便学生记录笔记和添加注释，教材采用了小版心印刷，以便留出较大的页面边缘。

讲授全部的教材内容约需要54学时，各章的学时安排大致如下：

章　序	课程内容	学时
第一章	行列式	6
第二章	矩阵	8 至 10
第三章	向量空间	10
第四章	线性方程组	6
第五章	特征值与特征向量	6 至 8
第六章	二次型	4 至 6
第七章	广义逆矩阵及其应用	8
合　计		48 至 54

对于40学时线性代数课程，可讲授如下内容：第一章6学时，第二章8学时(分块矩阵的初等变换略去不讲)，第三章10学时，第四章6学时，第五章6学时(应用举例略去不讲)，第六章4学时(二次型的应用略去不讲)。

对于48学时线性代数课程，可讲授如下内容：第一章6学时，第二章10学时，第三章10学时，第四章6学时，第五章8学时，第六章6学时，共46学时，可适当增加2学时的习题课。

参与编写本教材的老师均为讲授线性代数课程多年、经验丰富的老师，他们是褚宝增、王祖朝、李金霞、邓燕、吴飞、王翠香、邢永丽。具体分工如下：褚宝增老师负责第一章的编写，王祖朝、李金霞老师负责第二章的编写，邓燕老师负责第三章的编写，吴飞老师负责第四章的编写，王翠香老师负责第五章的编写，邢永丽老师负责第六章的编写，同时王祖朝老师还负责第七章的编写。由于时间仓促和水平所限，书中错误和不足之处在所难免，敬请读者不吝赐教！我们的联系方式是 wzc@cugb. edu. cn。

目录

Contents

第一章 行 列 式

行列式的出现源于线性方程组的求解，它最早是一种速记的表达式。1693 年，德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz，1646—1716)在写给法国数学家洛比达(G. F. L'Hospital，1661—1704)的一封信中首次使用了行列式，并给出方程组的系数行列式为 0 的条件。1750 年，瑞士数学家克莱姆(G. Cramer，1704—1752)在其著作《线性代数分析导引》中，最早比较完整、明确地阐述了行列式的定义和展开法则，并提出了现在我们所称的解线性方程组的克莱姆法则。

历史上第一个把行列式理论与线性方程组求解分离开并对行列式理论做出系统阐述的人，则是法国数学家范德蒙(A. T. Vandermonde，1735—1796)。1772 年，拉普拉斯(P. S. Laplace，1749—1827)证明了范德蒙提出的一些规则，并推广了他的展开行列式的方法。继范德蒙之后，法国大数学家柯西(A. L. Cauchy，1789—1857)在行列式的理论方面做出了突出的贡献。但在行列式理论方面最多产的人当属德国数学家雅可比(J. Jacobi，1804—1851)。他引进了函数行列式，即“雅可比行列式”，指出函数行列式在多重积分的变量替换中的作用，给出了函数行列式的导数公式。雅可比的著名论文《论行列式的形成和性质》标志着行列式理论体系的形成。

目前，行列式的理论已经涉及到了几乎所有的数学分支，如数学分析、几何学、离散数学、线性方程组理论、二次型理论、系统控制等，成为了一个极其重要的数学工具。本章主要介绍行列式的概念、性质及其计算。

§1.1 置 换

1.1.1 排列的逆序

定义 1 设 $S=\{a_1, a_2, \cdots, a_n\}$ 是 n 个元素的集合(称为 ***n* 元集**)，若将 S 中的全部元素排成一排 $s_1s_2\cdots s_n$，记 $p=s_1s_2\cdots s_n$，则称 p 是集合 S 的一个**全排列**，也称 p 是集合 S 上的**排列**；s_i 称

为排列 p 第 i 个位置上的**元素**。

显然，S 的不同全排列的个数为 $n!$，并以 $S!$ 表示集合 S 的所有全排列形成的集合。如果 S 是前 n 个自然数的集合，即 $S=\{1, 2, \cdots, n\}$，则记 $S=[n]$。除非特别申明，本章所讨论的排列均指前 n 个自然数的集合$[n]$上的排列。

定义 2 设 $p=s_1s_2\cdots s_n\in[n]!$，如果 $i<j$ 且 $s_i>s_j$，则称 s_is_j 是一个**逆序**；以 $\tau(s_i)$表示排列 p 中满足 $k<i$ 且 $s_k>s_i$ 的元素 s_k 的个数，则称 $\tau(s_i)$为排列 p 中元素 s_i 的**逆序数**；令

$$\tau(p)=\tau(s_1s_2\cdots s_n)=\tau(s_1)+\tau(s_2)+\cdots+\tau(s_n)$$

则称 $\tau(p)$为**排列 p 的逆序数**。

如果排列 p 的逆序数 $\tau(p)=0$，则称排列 p 为**自然排列**。显然，$[n]!$ 中唯一的自然排列就是 $p=12\cdots n$。

例如，$\tau(32514)=\tau(3)+\tau(2)+\tau(5)+\tau(1)+\tau(4)=0+1+0+3+1=5$，又如 $\tau(45321)=\tau(4)+\tau(5)+\tau(3)+\tau(2)+\tau(1)=0+0+2+3+4=9$。

定义 3 设 $p=s_1s_2\cdots s_n\in[n]!$，若 $\tau(p)$为偶数，则称排列 p 为**偶排列**；若 $\tau(p)$为奇数，则称排列 p 为**奇排列**。

显然，自然排列 $p=12\cdots n$ 是偶排列。

定义 4 设 $p=s_1s_2\cdots s_n\in[n]!$，如果将 p 中某两个数的位置互换，其余的元素不动，则得到另外一个排列 p'，并称这样的操作是一个**对换**。

定理 1 对换改变排列的奇偶性。

证明：设 $p=s_1s_2\cdots s_n\in[n]!$，假定对换 p 中 s_i 与 s_j 的位置后得到 p'，即

$$p=s_1\cdots s_i\cdots s_j\cdots s_n,\quad p'=s_1\cdots s_j\cdots s_i\cdots s_n$$

先证明 s_i 与 s_j 相邻的情形，不妨设 $j=i+1$。

若 $s_i<s_j$，则 $\tau(s_1\cdots s_is_{i+1}\cdots s_n)=\tau(s_1\cdots s_{i+1}s_i\cdots s_n)-1$；

若 $s_i>s_j$，则 $\tau(s_1\cdots s_is_{i+1}\cdots s_n)=\tau(s_1\cdots s_{i+1}s_i\cdots s_n)+1$。

显然，p 与 p'的奇偶性相反。

如果 s_i 与 s_j 不相邻，不妨设 $j=i+k(k\geqslant 2)$。

先将 p 中的 s_j 与 s_{j-1}对换，再把 s_j 与 s_{j-2}对换，如此对换 k 次后得到排列

$$p''=s_1\cdots s_js_is_{i+1}\cdots s_{i+k-1}s_{j+1}\cdots s_n$$

然后把 p''中的 s_i 与 s_{i+1}对换，s_i 与 s_{i+2}对换，直至 s_i 与 s_{i+k-1}对

换得到 p'，对换次数为 $k-1$。这样，从 p 到 p' 共对换 $k+(k-1)=2k-1$ 次，故奇偶性改变了 $2k-1$。因此，排列 p 与 p' 的奇偶性不同。■

显然，任何一个排列都可以通过一系列的元素对换化为自然排列；反过来，一个自然排列也可以通过一系列的元素对换化为任何指定的排列。元素对换的次数与排列的奇偶性有如下关系：

推论 奇排列化为自然排列的对换次数是奇数，偶排列化为自然排列的对换次数是偶数。

证明： 由上边定理的证明过程可知对换的次数就是排列奇偶性改变的次数，而自然排列是偶排列，故推论成立。■

定理 2 当 $n\geqslant 2$ 时，$[n]!$ 中奇排列和偶排列各占一半。

证明： 假设总共有 m 个奇排列，k 个偶排列，则 $m+k=n!$。由于任何一个奇排列对换两个元素变成偶排列，所以 $k\geqslant m$；而任何一个偶排列对换两个元素将变成奇排列，所以 $m\geqslant k$，从而得 $m=k=\frac{1}{2}n!$。■

1.1.2 置换

定义 5 集合 $[n]$ 到其自身的一个一一对应，称为集合 $[n]$ 上的一个**置换**。

对于 $[n]$ 上的每一个排列 $p=s_1s_2\cdots s_n$，可按如下方式唯一地确定一个集合 $[n]$ 到 $[n]$ 的一个一一对应 σ_p：$\sigma_p(i)=s_i$，$i=1, 2, \cdots, n$。为描述方便，我们将这个 σ_p 表示为：

$$\sigma_p=\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}$$

σ_p 的上排是一个自然排列，而其下排则是排列 $p=s_1s_2\cdots s_n$。因此，$[n]$ 的每一个全排列 p，可以按如上方式唯一地决定一个 $[n]$ 上的置换 σ_p；反过来，对于 $[n]$ 上的每一个置换，按上述方式也唯一地对应一个 $[n]$ 上的全排列。因此，有时我们将集合 $[n]$ 上的置换与 $[n]$ 上的排列同等看待。

显然，置换满足下面的交换律，即

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & s_3 & \cdots & s_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_3 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}=\cdots$$

也就是说，交换置换表示式中的任何两列(称为一个**列对换**)之后所得到的置换还是同一个置换。习惯上，我们将置换表示式的上

排写成自然排列，下排是由其对应关系决定的排列，并称这种表示是置换的**自然表示**。但这种表示法并不是必需的。对于一个给定的置换，可以将该置换表示式的上排写成任何排列，下排则由其对应关系决定。这可以通过将置换的自然表示进行一系列的列对换来实现。

定义 6 设 $\sigma=\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$ 为 $[n]$ 上的一个置换，令

$$\tau(\sigma)=\tau\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}=\tau(t_1t_2\cdots t_n)+\tau(r_1r_2\cdots r_n),$$

则称 $\tau(\sigma)$ 为置换 σ 的**逆序数**。

定理 3 若 $\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}$，则

$$\tau\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}+\tau\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}=\text{偶数}。$$

证明： 先假定 $\tau\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}=$ 奇数。

为方便起见，分别以 T 与 R 来表示排列 $t_1t_2\cdots t_n$ 和 $r_1r_2\cdots r_n$。

如果 $u_1=t_1$，则 $v_1=r_1$，因此 $\tau\begin{pmatrix} u_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ v_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$ 也等于奇数。

如果 $u_1\neq t_1$，则 $v_1\neq r_1$。把 T 中的 u_1 与 t_1 对换得到 T_1，把 R 中的 v_1 与 r_1 对换得到 R_1。由定理 1 知，T_1 与 T 的奇偶性相反，R_1 与 R 的奇偶性相反。因为 T 与 R 的奇偶性相反，故 T_1 与 R_1 的奇偶性相反，即

$$\tau\begin{pmatrix} u_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ v_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}=\text{奇数}$$

如再把上排的 u_2 与 t_2 对换位置，同时把下排的 v_2 与 r_2 对换位置，得(若 $u_2=t_2$，则不对换)

$$\tau\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & t_3 & \cdots & t_n \\ v_1 & v_2 & r_3 & \cdots & r_n \end{pmatrix}=\text{奇数}$$

依此类推，最后得

$$\tau\begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_n \end{pmatrix}=\text{奇数}$$

从而在此种情况下证明了本定理。■

当 $\tau\begin{pmatrix} t_1 & t_2 & \cdots & t_n \\ r_1 & r_2 & \cdots & r_n \end{pmatrix}$=偶数时，同法可证。■

从定理 3 可以看出，对于置换的任何一种表示方法，若其上下两排逆序数之和是奇数，则其任一其他表示方法中上下两排逆序数之和也是奇数；若其上下两排逆序数之和是偶数，则其任一其他表示方法中上下两排逆序数之和也是偶数。前者称**奇置换**，后者称**偶置换**。

显然有 $\tau\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ s_1 & s_2 & \cdots & s_n \end{pmatrix}=\tau\begin{pmatrix} s_1 & s_2 & \cdots & s_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}=\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)$。

习 题 1.1

1. 求下列排列的逆序数：

   (1)4132；

   (2)1347265；

   (3)$n(n-1)\cdots 21$；

   (4)$135\cdots(2n-1)246\cdots(2n)$。

2. 选定 i 与 k 使

   (1)$1274i56k9$ 成偶排列；

   (2)$1i25k4897$ 成奇排列。

3. 若在排列 $s_1 s_2 \cdots s_n$ 中有 k 个逆序，则在排列 $s_n s_{n-1} \cdots s_1$ 中有多少个逆序？

4. 求下列置换的奇偶性：

   (1)$\begin{pmatrix} 12345 \\ 21435 \end{pmatrix}$；(2)$\begin{pmatrix} 123456 \\ 634125 \end{pmatrix}$；(3)$\begin{pmatrix} 123456 \\ 461325 \end{pmatrix}$；(4)$\begin{pmatrix} 12345678 \\ 87126453 \end{pmatrix}$。

§1.2 行列式的定义

对于二阶线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases}$其中 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22}，b_1，b_2 为常数，x_1，x_2 为未知数。

在 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$ 的情况下，我们很容易求出它的解为

$$x_1=\frac{b_1 a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}},\quad x_2=\frac{a_{11}b_2-a_{21}b_1}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}。$$

为了方便起见，记

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21},$$

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}=a_{11}b_2-b_1a_{21},$$

并称形如$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$的式子为**二阶行列式**；它是一个数值，其值为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$$

对于三阶线性方程组$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+a_{13}x_3=b_1 \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2+a_{23}x_3=b_2 \\ a_{31}x_1+a_{32}x_2+a_{33}x_3=b_3 \end{cases}$，其中 a_{11}，a_{12}，a_{13}，a_{21}，a_{22}，a_{23}，a_{31}，a_{32}，a_{33}，b_1，b_2，b_3 为常数，x_1，x_2，x_3 为未知数。令

$$D=a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

当 $D\neq0$ 时，可解出

$$x_1=\frac{b_1a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}b_3+a_{13}b_2a_{32}-a_{13}a_{22}b_3-a_{12}b_2a_{33}-b_1a_{23}a_{32}}{a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}}$$

x_2，x_3 相仿，在此不再列出。

为了方便起见，可记 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$，并称 D 为**三阶行列式**，其值为

$$a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{13}a_{22}a_{31}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{11}a_{23}a_{32}$$

若令

$$D_1=\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},\ D_2=\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},\ D_3=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

三阶线性方程组的解便是 $x_1=\dfrac{D_1}{D}$，$x_2=\dfrac{D_2}{D}$，$x_3=\dfrac{D_3}{D}$。

通过观察二阶行列式和三阶行列式的展式，取正项的因子的第二个脚码都是偶排列，取负项的因子的第二个脚码都是奇排

列。按照这个规律我们给出如下 n 阶行列式及其展式的定义。

定义 n^2 个数 a_{11}，a_{12}，…，a_{1n}，a_{21}，a_{22}，…，a_{2n}，…，a_{n1}，a_{n2}，…，a_{nn}，排成 n 行与 n 列的一个正方形阵；规定当 i，$j=1$，2，…，n 时，a_{ij} 位于第 i 行与第 j 列的交点处，称 a_{ij} 为第 i 行第 j 列的**元素**；在正方形阵的两边用两条纵线把它夹起来，如式(1)左端的样子，并称这种形式为一个 **n 阶行列式**。它是一个数值，一般用符号 $\det(a_{ij})$来表示，其值定义如下：

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{s_1 s_2 \cdots s_n \in [n]!} (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n} \quad (1)$$

(1)式中的求和取遍集合$[n]$的所有排列，所以求和的项数共有 $n!$。对$[n]$上的每一个排列 $s_1 s_2 \cdots s_n$，所对应的项为$(-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}$。从左上角到右下角的对角线称为行列式的**主对角线**，主对角线上的元素 a_{ii} 称为行列式的**主元**。元素 a_{ij} 下标的第一个脚码 i 称为**行标**，第二个脚码 j 称为**列标**。

根据上述行列式的定义，行列式求和中的每一项均来自不同行和不同列元素的乘积。因此，也可以将行列式的值定义为

$$\det(a_{ij}) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

$$= \sum_{s_1 s_2 \cdots s_n \in [n]!} (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{s_1 1} a_{s_2 2} \cdots a_{s_n n} \quad (2)$$

容易证明，式(1)与式(2)是相等的。为了书写简便，有时我们省略行列式求和符号“$\sum$”下的求和范围“$s_1 s_2 \cdots s_n \in [n]!$”，默认针对$[n]$上所有排列求和。

例 证明上三角行列式(其中对角线以下未写出的元素都是0)。

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

证明： 由定义 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum\limits_{s_1 s_2 \cdots s_n \in [n]!} (-1)^{\tau(s_1 s_2 \cdots s_n)} a_{1s_1} a_{2s_2} \cdots a_{ns_n}$

在行列式中第 n 行的元素除去 a_{nn} 以外全为 0，因而只要考虑 $s_n=n$ 的那些项。在第 $n-1$ 行中，除去 $a_{n-1,n-1}$，$a_{n-1,n}$ 外，其余的项全为 0，因为 s_{n-1} 只有 $n-1$，n 这两种可能，由于 $s_n=n$，所以 s_{n-1} 就不能等于 n 了，从而 $s_{n-1}=n-1$。如此逐步推上去，不难看出，除去 $a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$ 这一项外，其余的项全是 0。而这一项的列下标所成的排列为偶排列，所以取正号。于是

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

对于下三角行列式(其中对角线以上未写出的元素都是 0)同样可得

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ a_{21} & a_{22} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

主对角行列式(其中对角线上的元素是 a_{ii}，未写出的元素都是 0)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & & & \\ & a_{22} & & \\ & & \ddots & \\ & & & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$$

反对角行列式

$$\begin{vmatrix} & & & a_{1n} \\ & & a_{2,n-1} & \\ & \iddots & & \\ a_{n1} & & & \end{vmatrix} = (-1)^{\tau(n\cdots 21)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$

$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1} \blacksquare$$

习　题　1.2

1. 写出四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项。

2. 用行列式的定义证明 $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=0$。

3. 求下列行列式的值：

$$(1)\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}；\quad (2)\begin{vmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \cdots & 2 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & n \end{vmatrix}。$$

4. 设 n 阶行列式：$A=\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，

$$B=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}b^{-1} & \cdots & a_{1n}b^{1-n} \\ a_{21}b & a_{22} & \cdots & a_{2n}b^{2-n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}b^{n-1} & a_{n2}b^{n-2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$，其中 $b\neq 0$，试证明：

$A=B$。

5. 证明：如下 2007 阶行列式不等于 0：

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & \cdots & 2006 & 2007 \\ 2^2 & 3^2 & \cdots & 2007^2 & 2008^2 \\ 3^3 & 4^3 & \cdots & 2008^3 & 2008^3 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 2007^{2007} & 2008^{2007} & \cdots & 2008^{2007} & 2008^{2007} \end{vmatrix}。$$

§1.3　行列式的性质

行列式的计算是一个重要的问题，也是一个比较麻烦的问题，特别是对于高阶的行列式。一个 n 阶行列式有 $n!$ 项，如按定义直接进行计算，共需要 $(n-1)n!$ 次乘法运算和 $n!-1$ 次加(减)法运算，这还不包括确定每一项符号的计算量。如果是一个