高考数学最新辅导丛书（一）

高考单项选择题解题

主编 陈文灯 陈启浩

副主编 张永辉 周峰 张发秦

文登冠军团队最新贡献

方法与技巧

突破高考数学又一力作

高考数学

2008

传授方法技巧

精选典型例题

洞察变异能力

A

B

C

中国铁道出版社
CHINA RAILWAY PUBLISHING HOUSE

高考数学最新辅导丛书(一)

高考单项选择题解题方法与技巧

主　编　陈文灯　陈启浩

副主编　张永辉　周　峰　张发秦

中国铁道出版社

2007年·北京

图书在版编目(CIP)数据

高考单项选择题解题方法与技巧/陈文灯,陈启浩主编.
—北京:中国铁道出版社,2007.11
(高考数学最新辅导丛书)
ISBN 978-7-113-08394-6

Ⅰ.高… Ⅱ.①陈…②陈… Ⅲ.课程-高中-解题-升学参考资料 Ⅳ.G634

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 161462 号

书　　名:高考数学最新辅导丛书(一)
　　　　　高考单项选择题解题方法与技巧
作　　者:陈文灯　陈启浩等

策划编辑:殷小燕
责任编辑:殷小燕　　　　电话:51873147
封面设计:付　巍
责任校对:汤淑梅
责任印制:李　佳

出版发行:中国铁道出版社
印　　刷:中国铁道出版社印刷厂
版　　次:2007 年 11 月第 1 版　2007 年 11 月第 1 次印刷
开　　本:787 mm×1 092 mm　1/16　印张:22.75　字数:570 千
印　　数:1~5 000 册
书　　号:ISBN 978-7-113-08394-6/O·170
定　　价:38.00 元

前　言

高考单项选择题在全国统考和个别省市自行命题的试卷中所占分数比重是比较大的(26.6%～40%),能否在短时间内(20～30分钟)准确无误地完成这类题型解答是数学考高分的关键。

为了帮助同学们赢得时间,取得成功,我们编写了至今市面上还没有的这样一本辅导书。相信本书对开拓思路、启迪思维、提高应试技巧诸方面将起到良师益友的作用。本书特点:

(1)介绍了我们长期教学、高考辅导中归纳、总结出的做单选题的五种方法和技巧;

(2)根据高考数学复习大纲(或复习说明)有针对性地编写和精选一些例题,使同学们通过训练掌握我们所介绍的方法技巧;

(3)例题的解答有三部分:分析,详解,评注。目的在于:不仅提高同学们分析和解决问题的方法和技巧,还使他们初步学会洞察题型变异的能力。

编　者

2007年9月

目　　录

绪　　论 ······ 1
第一章　集合与简易逻辑 ······ 7
第二章　函　　数 ······ 28
第三章　数　　列 ······ 72
第四章　不 等 式 ······ 107
第五章　三角函数 ······ 134
第六章　直线与平面 ······ 151
第七章　简单几何体 ······ 186
第八章　平面向量 ······ 208
第九章　直线和圆的方程 ······ 223
第十章　圆锥曲线 ······ 249
第十一章　排列、组合、二项式定理 ······ 283
第十二章　概　　率 ······ 306
第十三章　极限和导数 ······ 331
第十四章　复　　数 ······ 349

绪　　论

单项选择题是高考数学三大题型(填空题、单项选择题、解答证明题)之一,所占分数比重很大(150分试卷约占40 ~ 60分)·能不能快速、正确地做好这种题型,是关系到数学能否考高分的关键之一.

以下我们介绍单项选择题的解题方法与技巧:

方法1　推演法(适用于:题设条件是代数式,或根据概念、性质隐含代数式.解法:按有关概念、性质、定理从题设条件推理演算,得出哪个备选结果,就将相应的序号填写在括号中.这种类型的题相当于小的计算题.)

方法2　图示法(适用于:由题设条件易作出所研究问题的几何图形,或涉及两个集合的运算,诱导三角函数关系,单位圆等命题.解法:画出几何图形,或作出集合的文氏图,直角坐标系中的单位圆、角所在象限图,利用图形直观性帮助分析.)

方法3　逆推法(适用于:题干与备选答案,尤其是后者是代数式的情形.解法:假定从某个备选答案出发,通过反推得出与题设矛盾或违反客观事实,则否定该选项,若否定掉三个,则第四个选项一定正确,不必再验.方法比较烦琐.)

方法4　举反例排除法(适用于:题干和备选答案均是抽象函数,尤其是"… 对任意 …,必有 …"的命题.解法:抽象的对立面是具体,通常是举一些简单的,尤其是极简单的分段函数来否定备选的答案,否定掉三个,第四个一定正确.)

方法5　赋值法(适用于:与方法3同,即题干与备选均是代数式.解法:或给题设一个"特殊值",分析观察备选结果,不成立的即否定掉;或给备选项的某项以"特殊值",然后看是否符合题设条件,不符合,即行否定掉,否定掉三个,第四个一定正确.)

一、推演法

【例1】　以A表示事件"甲种产品畅销,乙种产品滞销",则其对立事件$\overline{A}$为　　(　　)

A."甲种产品滞销,乙种产品畅销"　　B."甲、乙两种产品均畅销"

C."甲种产品滞销"　　D."甲种产品滞销或乙种产品畅销"

【分析】　本题考查事件的基本关系运算,适合用推演法求解.

【详解】　设$A_1=\{$甲种产品畅销$\}$,$A_2=\{$乙种产品滞销$\}$,则$A=A_1A_2$,由摩根定律可得$\overline{A}=\overline{A_1A_2}=\overline{A_1}\cup\overline{A_2}=\{$甲种产品滞销$\}\cup\{$乙种产品畅销$\}$,即$\overline{A}$为"甲种产品滞销或乙种产品畅销",故选(D).

【评注】　考虑复合事件的对应事件或运算时,应先将复合事件用简单事件(基本事件表示,并用大写字母记之.

二、图示法

【例1】　直线$x\cos\beta+\sqrt{3}y+2=0$的倾斜角范围是　　(　　)

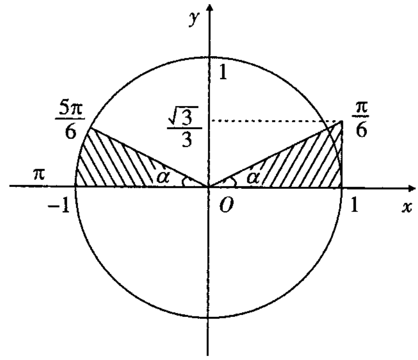
A.$\left[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{2}\right]\cup\left(\frac{\pi}{2},\frac{5\pi}{6}\right]$　　B.$\left[0,\frac{\pi}{6}\right]\cup\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$

C. $\left[0,\frac{5\pi}{6}\right]$　　　　D. $\left[\frac{\pi}{6},\frac{5\pi}{6}\right]$

【分析】 直线的倾斜角 $\alpha \in [0,\pi)$ 且 $\alpha \neq \frac{\pi}{2}$，且 $\tan\alpha = k = -\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}$. 所以用图示法解本题，即根据直线斜率 k 的范围来确定倾斜角的范围.

【详解】 由题意可知，

$\tan\alpha = k = -\frac{\cos\beta}{\sqrt{3}}$，其中 $\cos\beta \in [-1,1]$，所以 $\tan\alpha \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3},\frac{\sqrt{3}}{3}\right]$.



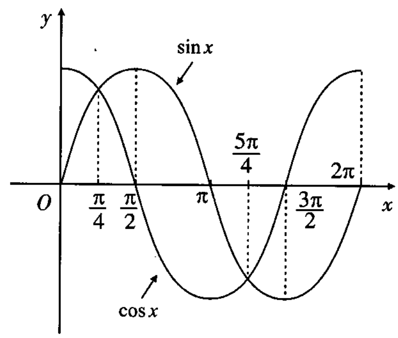
在图中阴影部分表示 α 角范围所以，$\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{6}\right] \cup \left[\frac{5\pi}{6},\pi\right)$. 因此本题选 B.

【评注】 在三角函数中，对于已知三角函数值求角的问题，可采用三角函数图来解决.

【例 2】 (02 全国河南，4) 在 $(0,2\pi)$ 内，使 $\sin x > \cos x$ 成立的 x 取值范围是　(　　)

A. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{2}\right) \cup \left(\pi,\frac{5}{4}\pi\right)$　　B. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right)$

C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{5\pi}{4}\right)$　　D. $\left(\frac{\pi}{4},\pi\right) \cup \left(\frac{5\pi}{4},\frac{3\pi}{2}\right)$



【分析】 用图示法求解 x 的取值范围.

【详解】 观察左侧图象，故选 C.

【评注】 图示法的特点是简洁、直观、可信.

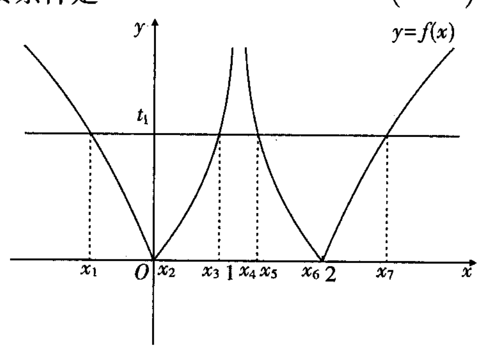
【例 3】 (05 上海，16) 设定义域为 $\mathbf{R}$ 的函数 $f(x) = \begin{cases} |\lg|x-1||, & x \neq 1 \\ 0, & x = 1 \end{cases}$，则关于 x 的方程 $f^2(x) + bf(x) + c = 0$ 有 7 个不同实数解的充要条件是　(　　)

A. $b < 0$ 且 $c > 0$

B. $b > 0$ 且 $c < 0$

C. $b < 0$ 且 $c = 0$

D. $b \geqslant 0$ 且 $c = 0$



【分析】 用图示法解本题，即对函数 $y = f(x)$ 的图象加以分析，即可得到所给方程有 7 个不同实数解的充要条件.

【详解】 画出函数 $y = f(x)$ 的图象如右图所示.

设 $t = f(x)$，那么欲使原方程有 7 个解，则方程 $t^2 + bt + c = 0$ 的两根 $t_1 > 0, t_2 = 0$. 这是因为当 $t > 0$ 时，方程 $t = f(x)$ 有 4 个实数解 x_1,x_3,x_5,x_7；当 $t = 0$ 时有 3 个实数解 x_2,x_4,x_6. 由二次方程根与系数的关系得到 $b < 0, c = 0$，故选 C.

【评注】 这道题很好体现了图示法(或函数图象)对解题的作用,若$f^2(x)+bf(x)+c=0$有8个不同实数解.令$f(x)=t$,方程$t^2+bt+c=0$必有两根$t_1>0,t_2>0$.故$b=-(t_1+t_2)<0,c=t_1t_2>0$.因此选A.

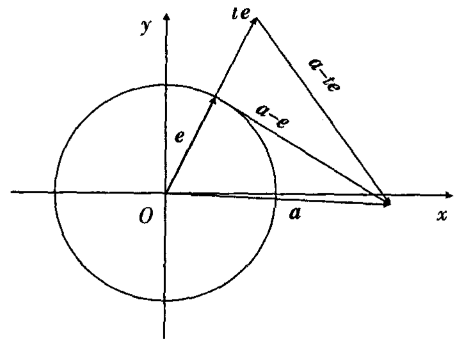
【例4】 (05浙,10)已知向量$\boldsymbol{a}\neq\boldsymbol{e}$,$|\boldsymbol{e}|=1$满足:对任意$t\in\mathbf{R}$,恒有$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$,则 ( )

A. $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{e}$

B. $\boldsymbol{a}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

C. $\boldsymbol{e}\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$

D. $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{e})\perp(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})$



【分析】 显然若对$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$进行平方处理会特别麻烦,我们会马上想到利用向量的几何表示,即用图示法解本题.

【详解】 观察图示,由$|\boldsymbol{a}-t\boldsymbol{e}|\geqslant|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e}|$知显然$(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{e})\perp\boldsymbol{e}$.故选C.

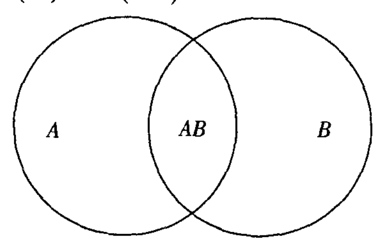
【评注】 图示法对于解选择题具有直观性,易于分析.

【例5】 对于任意两个事件A和B,则$P(A\overline{B})$等于 ( )

A. $P(A)-P(B)$　　B. $P(A)-P(B)+P(AB)$

C. $P(A)-P(AB)$　　D. $P(A)+P(\overline{B})-P(A\overline{B})$

【分析】 画出文氏图,分析其中的关系即可,也就是说用图示法解本题是合适的.



【详解】 如图所示,可知

$A=A\overline{B}+AB,A\overline{B}\cap(AB)=\varnothing$,于是

$$P(A)=P(A\overline{B})+P(AB),$$

即$P(A\overline{B})=P(A)-P(AB)$,故选C.

【评注】 考虑事件间的关系及概率方面的选择题,作文氏图往往有助于问题快速获解.

三、逆推法

【例1】 设A和B是任意两个概率不为零的不相容事件,则下列结论中肯定正确的是 ( )

A. $\overline{A}$与$\overline{B}$不相容　　B. $\overline{A}$与$\overline{B}$相容

C. $P(AB)=P(A)P(B)$　　D. $P(A-B)=P(A)$

【分析】 本题需根据题设条件,从备选项出发,用逆推法排除.

【详解】 由题设可知,$P(A)\neq0,P(B)\neq0,P(AB)=0$,于是

$$P(\overline{A}\overline{B})=P(\overline{A\cup B})=1-P(A\cup B)=$$
$$1-[P(A)+P(B)-P(AB)]=$$
$$1-P(A)-P(B).$$

由于等式右端的值无法确定,故A、B不入选.

对于选项 C，$P(AB)=P(A)P(B)$ 仅当 A 和 B 相互独立时才成立，而由题设不能推得 A 和 B 相互独立，于是 C 不入选．故选 D．

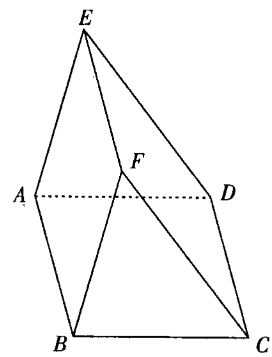
【评注】 选项 D 正确可直接证明：由于 $AB=\varnothing$，所以 $P(A-B)=P(A)-P(AB)=P(A)$．

四、排除法

【例 1】 （99 全国）多面体 $ABCDEF$ 中，$ABCD$ 是边长为 3 的正方形，$EF \parallel AB$，$EF=\frac{3}{2}$，EF 与面 AC 的距离为 2，则该多面体的体积是 （ ）

A. $\frac{9}{2}$ B. 5

C. 6 D. $\frac{15}{2}$



【分析】 这道题采用排除法解．

【详解】 我们计算 $V_{F\text{-}ABCD}=\frac{1}{3}\cdot S_{\text{四边形}ABCD}\cdot d_{EF\text{-面}AC}=\frac{1}{3}\times 3^2\times 2=6$，

$V_{\text{多面体}ABCDEF}>V_{F\text{-}ABCD}=6$．

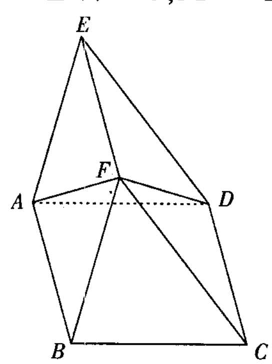
观察 A，B，C，D 选项，只有 D 选项满足，故选 D．

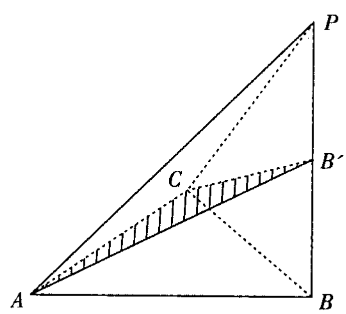
【评注】 取极端情形 $EF\perp$ 面 AED，

$V_{ABCDEF}=V_{F\text{-}ABCD}+V_{F\text{-}AED}=\frac{1}{3}\times 3^2\times 2+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\frac{3}{2}=6+\frac{3}{2}=\frac{15}{2}$．

一般情形

$PB\perp$ 面 ABC，$PB'=B'B$





$\triangle ABC$ 和 $\triangle AB'C$ 对应，$V_{P\text{-}AB'C}=V_{P\text{-}ABC}-V_{B'\text{-}ABC}=\frac{1}{3}\times S_{\triangle ABC}\times PB-\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\times BB'=\frac{1}{3}S_{\triangle ABC}\cdot(PB-BB')=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 3\times 2\times\left(3-\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}$．

这说明无论 EF 怎样平行移动，$V_{F\text{-}ADE}$ 体积不变，于是 V_{ABCDEF} 体积也不变，为 $\frac{15}{2}$．这样，我们得到了斜面锥体体积的**投影计算法**，此处 $\triangle B'AC$ 的投影面是 $\triangle ABC$．

【例 2】 (05 年鄂,7) 若 $\sin\alpha + \cos\alpha = \tan\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$,则 $\alpha \in$ (　　)

A. $\left(0,\frac{\pi}{6}\right)$　B. $\left(\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{4}\right)$　C. $\left(\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{3}\right)$　D. $\left(\frac{\pi}{3},\frac{\pi}{2}\right)$

【分析】 题干给出了一个三角方程,要求求其角 α 的范围.

【详解】 $\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. 由于$\frac{\sqrt{2}}{2} = \sin\frac{\pi}{4} <$

$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right) < 1$,故 $1 < \tan\alpha < \sqrt{2}$. 这样$\frac{\pi}{4} < \alpha$,故应排除 A,B.

同时,$\tan\alpha < \sqrt{2} < \sqrt{3}$,所以 $\alpha < \frac{\pi}{3}$,故 D 应排除. 这样本题只能选 C.

【评注】 根据选项中角的范围进行排除,所以特别考查 $\tan\frac{\pi}{6}$,$\tan\frac{\pi}{4}$,$\tan\frac{\pi}{3}$.

五、赋值法

【例 1】 (04 上海) $a > b > 1$,$P = \sqrt{\lg a \cdot \lg b}$,$Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b)$,$R = \lg\left(\frac{a+b}{2}\right)$,则 (　　)

A. $R < P < Q$　B. $P < Q < R$

C. $Q < P < R$　D. $P < R < Q$

【分析】 采用赋值法求解

【详解】 令 $a = 1000$,$b = 10$,则

$P = \sqrt{\lg 1000 \cdot \lg 10} = \sqrt{3}$,

$Q = \frac{1}{2}(\lg 1000 + \lg 10) = \frac{1}{2}(3 + 1) = 2$,

$R = \lg\left(\frac{10 + 1000}{2}\right) = \lg 505 = 2 + \lg 5.5$

所以,$P < Q < R$.

故选择 B.

【评注】 选择题采用赋值法解决速度快,效率高.

用推演法可以解决:$Q = \frac{1}{2}(\lg a + \lg b) > \sqrt{\lg a \cdot \lg b} = P \quad (a > b > 1)$

$Q = \frac{1}{2}\lg ab = \lg\sqrt{ab}$

$R = \lg\frac{a+b}{2} > \lg\sqrt{ab} = Q$.

所以,$P < Q < R$.(显然这道题不必用推演法,我们在这里只是做一下比较.)

【例 2】 已知函数 $f(x)$ 在 $x = 1$ 处的导数为 3,则 $f(x)$ 的解析式可能为 (　　)

A. $f(x) = (x-1)^2 + 3(x-1)$　B. $f(x) = 2(x-1)$

C. $f(x) = 2(x-1)^2$　D. $f(x) = x - 1$

【分析】 此题用赋值法,代入函项检验,直至正确选项出现.

【详解】 A. $f(x) = (x-1)^2 + 3(x-1) \Rightarrow f'(x) = 2(x-1) + 3$

$f'(1) = 3$. 正确,应当选(A)

【评注】 事实上:B. $f(x) = 2(x-1)$, $f'(x) = 2$, $f'(1) = 2$ 排除 B

C. $f(x) = 2(x-1)^2$, $f'(x) = 2(x-1)$, $f'(1) = 0$ 排除 C

D. $f(x) = x-1$, $f'(x) = 1$, $f'(1) = 1$, 排除 D

要想真正了解本书,掌握本书精髓,请看如下各章节的内容.

第一章　集合与简易逻辑

1.1　已知集合 $M=\{x \mid |x-1| \leqslant 2, x \in \mathbf{R}\}$ 和 $P=\left\{x \,\middle|\, \frac{5}{x+1} \geqslant 1, x \in \mathbf{Z}\right\}$，则 $M \cap P$ 等于　(　　)

A. $\{1,2,3\}$　　B. $\{0,1,2,3\}$　　C. $\{-1,0\}$　　D. $\{-1\}$

【分析】　用赋值法解本题，即利用特殊元素(例如，$-1,0$)是否在 $M \cap P$ 中，排除其中三个不正确的选项.

【详解】　显然 $-1 \notin P$，从而 $-1 \notin M \cap P$，所以排除选项 C 和 D. 当 $x=0$ 时，由 $|x-1|=1<2$，$\frac{5}{x+1}=5>1$ 知 $0 \in M \cap P$，所以排除选项 A，

故选 B.

【评注】　设 A,B 是两个集合，则(1) $x \in A \cap B$ 的充分必要条件是 $x \in A$ 且 $x \in B$；$x \notin A \cap B$ 的充分必要条件是 $x \notin A$ 或 $x \notin B$，(2) $x \in A \cup B$ 的充分必要条件是 $x \in A$ 或 $x \in B$；$x \notin A \cup B$ 的充分必要条件是 $x \notin A$ 且 $x \notin B$.

1.2　已知 $\mathbf{R}$ 的子集 $M=\{x \mid x^2-3x-18 \leqslant 0\}$，$N=\{x \mid x^2-x-6>0\}$，则 $M \cap N$ 等于　(　　)

A. $\{x \mid -3 \leqslant x<-2$ 或 $3<x \leqslant 6\}$　　B. $\{x \mid -3<x \leqslant -2$ 或 $3 \leqslant x<6\}$

C. $\{x \mid x \leqslant -2$ 或 $x>3\}$　　D. $\{x \mid x<-2$ 或 $x \geqslant 3\}$

【分析】　用推演法解本题，即通过解不等式算出集合 M 和 N，然后计算 $M \cap N$.

【详解】　因为不等式 $x^2-3x-18 \leqslant 0$ 的解集为 $[-3,6]$，不等式 $x^2-x-6>0$ 的解集为 $(-\infty,-2) \cup(3,+\infty)$，所以

$$M \cap N=[-3,-2) \cup(3,6].$$

故选 A.

【评注】　解一元二次不等式 $ax^2+bx+c>0$ (或 $\geqslant 0$，或 <0，或 $\leqslant 0$) 时，应利用二次函数 $y=ax^2+bx+c$ 的图象. 例如，求解不等式 $x^2-3x-18 \leqslant 0$，记 $y=x^2-3x-18$，则它的图象如图 1.1. 由图可知，使 $y \leqslant 0$ 的 $x \in[-3,6]$，所以不等式 $x^2-3x-18 \leqslant 0$ 的解集为 $[-3,6]$.

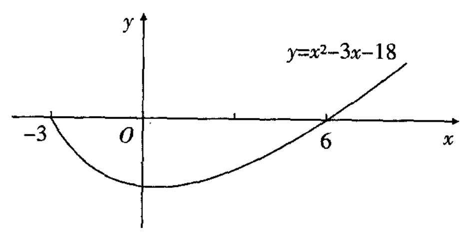


图 1.1

1.3　设 $\mathbf{R}$ 的子集 $M=\{x \mid \sqrt{x} \leqslant \sqrt{x^2-2}\}$，$N=\{x \mid \sqrt{x+1} \geqslant 2\}$ 则 $M \cap(\complement_{\mathbf{R}} N)$ 等于　(　　)

A. $[2,3]$　　B. $[2,3)$　　C. $(2,3)$　　D. $(3,+\infty)$

【分析】　用赋值法解本题，即利用特殊元素(例如 2,3)是否在 $M \cap \complement_{\mathbf{R}} N$ 中，排除三

个不正确的选项.

【详解】 由 $2\in M$ 及 $2\notin N$ 知 $2\in M\cap(\complement_{\mathbf{R}}N)$,所以排除选项C和D. 此外,由 $3\in N$ 知 $3\notin M\cap\complement_{\mathbf{R}}N$, 所以排除选项A.

故选B.

【评注】 用赋值法省去了计算 M 和 N,即省去了求解有关的不等式. 赋值法就是通过使用一些特殊值,如本题中的2和3,排除其中3个不正确选项,这些特殊值往往取为能反映选项之间的差异的那些值,如本题的特殊值2确定了选项C、D与选项A、B之间的差异,即如果 $2\in N\cap(\complement_R N)$,则可排除C、D.

1.4 已知集合 $A=\{x\mid x^2-x-2\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$,$B=\{x\mid |x-2|\leqslant 1,x\in\mathbf{R}\}$,全集 $U=A\cup B$,则 $\complement_U A\cap B$ 等于 ( )

A. $[1,2)$　　B. $(2,3]$　　C. $(1,2]$　　D. $[2,3)$

【分析】 用推演法解本题,即先算出集合 A、B 及 U,然后计算 $\complement_U AB$.

【详解】 容易算出 $A=[-1,2]$,$B=[1,3]$,所以由 $U=[-1,2]\cup[1,3]=[-1,3]$ 得

$$(\complement_U A)\cap B=(2,3]\cap[1,3]=(2,3].$$

故选B.

【评注】 本题也可用赋值法排除三个不正确的选项:由1、2都属于 A 知1、2都不属于 $\complement_U A$,从而1、2都不属于 $(\complement_U A)\cap B$,所以排除选项A、C、D. 故选B.

1.5 设 $f(n)=2n+1(n\in\mathbf{N})$,$A=\{1,2,3,4,5\}$,$B=\{3,4,5,6,7\}$. 记 $P=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in A\}$,$Q=\{n\in\mathbf{N}\mid f(n)\in B\}$,则 $(P\cap\complement_{\mathbf{N}}Q)\cup(Q\cap\complement_{\mathbf{N}}P)$ 等于 ( )

A. $\{0,3\}$　　B. $\{1,2\}$　　C. $\{3,4,5\}$　　D. $\{1,2,3\}$

【分析】 用推演法解本题,即先算集合 P、Q,再计算 $(P\cap\complement_{\mathbf{N}}Q)\cup(Q\cap\complement_{\mathbf{N}}P)$.

【详解】 由题意知 $P=\{0,1,2\}$,$Q=\{1,2,3\}$,所以

$(P\cap\complement_{\mathbf{N}}Q)\cup(Q\cap\complement_{\mathbf{N}}P)=$
$(\{0,1,2\}\cap\{0,4,5,\cdots\})\cup(\{1,2,3\}$
$\cap\{3,4,5,\cdots\})=$
$\{0\}\cup\{3\}=\{0,3\}$.

故选A.

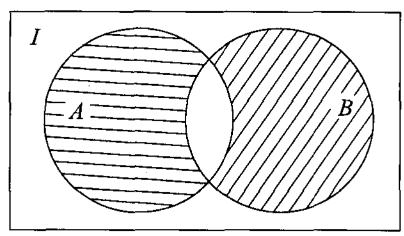


图1.2

【评注】 设 A,B 是全集 I 的两个子集,则 $(A\cap\complement_I B)\cup(B\cap\complement_I A)$ 的文氏图如图1.2的阴影部分所示.

1.6 定义集合运算:$A\odot B=\{z\mid z=xy(x+y),x\in A,y\in B\}$,设集合 $A=\{0,1\}$,$B=\{2,3\}$,则集合 $A\odot B$ 的所有元素之和为 ( )

A. 0　　B. 6　　C. 12　　D. 18

【分析】 用推演法解本题,即根据 $\odot$ 的定义计算 $A\odot B$ 的所有元素及其和.

【详解】 由于当 $x=0,y=2$ 时,$z=0$;当 $x=0,y=3$ 时,$z=0$;当 $x=1,y=2$ 时,$z=6$;当 $x=1,y=3$ 时,$z=12$,所以,$A\odot B=\{0,6,12\}$. 由此可知 $A\odot B$ 的所有元素之和18.

故选 D.

【评注】 顺便写出 $A\odot B$ 的所有子集:

$\varnothing,\{0\},\{6\},\{12\},\{0,6\},\{0,12\},\{6,12\},\{0,6,12\}$.

1.7 若 $a>b>0$,集合 $M=\left\{x\mid b<x<\frac{a+b}{2}\right\}$,$N=\{x\mid \sqrt{ab}<x<a\}$,则 $M\cap N$ 等于 (　　)

A. $\{x\mid b<x<\sqrt{ab}\}$　　B. $\{x\mid b<x<a\}$

C. $\left\{x\mid \sqrt{ab}<x<\frac{a+b}{2}\right\}$　　D. $\left\{x\mid \frac{a+b}{2}<x<a\right\}$

【分析】 利用 $0<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<a$,可用图示法算出 $M\cap N$.

【详解】 集合 M 和 N 如图1.3所示. 由图可知

$M\cap N=\left(\sqrt{ab},\frac{a+b}{2}\right)$

故选 C.

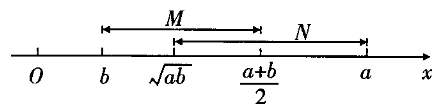


图1.3

【评注】 要记住以下结论:

对 $0<b<a$ 有 $0<b<\sqrt{ab}<\frac{a+b}{2}<a$.

1.8 设集合 $A=\{a+\sqrt{2}b\mid |a^2-2b^2|=1,a\in\mathbf{Z},b\in\mathbf{Z}\}$,已知 $x\in A,y\in A$,则必有 (　　)

A. $x+y\in A$　　B. $x-y\in A$　　C. $xy\in A$　　D. $2x\in A$

【分析】 用赋值法解本题,即利用 x,y 取特殊的值排除其中三个不正确的选项.

【详解】 取 $x=y=1+\sqrt{2}$,显然 $x,y\in A$. 由于 $x\pm y=2\pm2\sqrt{2}\notin A$(这是由于 $|2^2-2\cdot2^2|=|2^2-2\cdot(-2)^2|=4\neq1$);$2x=2+2\sqrt{2}\notin A$,所以排除选项 A、B、D.

故选 C.

【评注】 本题的 A 是由形如 $a+\sqrt{2}b$(其中 $a,b\in\mathbf{Z}$,且 a,b 满足 $|a^2-2b^2|=1$)的元素构成的集合,因要证明 $m=m_1+\sqrt{2}m_2\in A$,不仅要证 $m_1,m_2\in\mathbf{Z}$,而且还要证 $|m_1^2-2m_2^2|=1$ 成立. 下面证明 $xy\in A$:

由 $x,y\in A$ 知存在 $x_1,x_2,y_1,y_2\in\mathbf{Z}$,使得

$$x=x_1+\sqrt{2}x_2,y=y_1+\sqrt{2}y_2,$$

且 $|x_1^2-2x_2^2|=1$,$|y_1^2-2y_2^2|=1$. 于是

$$xy=(x_1+\sqrt{2}x_2)(y_1+\sqrt{2}y_2)=(x_1y_1+2x_2y_2)+\sqrt{2}(x_1y_2+x_2y_1),$$

并且 $$|(x_1y_1+2x_2y_2)^2-2(x_1y_2+x_2y_1)^2|=|x_1^2(y_1^2-2y_2^2)-2x_2^2(y_1^2-2y_2^2)|=|x_1^2-2x_2^2|=1,$$

所以,$xy\in A$.

1.9 两个集合 A 与 B 之差记作"$A-B$",定义为 $A-B=\{x\mid x\in A$ 但 $x\notin B\}$,如果全集 $\mathbf{R}$ 的两个子集 $A=\{x\mid \log_2x<1\}$,$B=\{x\mid |x-2|<1\}$,则 $A-B$ 等于 (　　)

A. $\{x \mid x \leqslant 1\}$　　　　B. $\{x \mid x \geqslant 3\}$

C. $\{x \mid 1 \leqslant x \leqslant 2\}$　　　　D. $\{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$

【分析】 用排除法解本题．先排除选项 A，然后用特殊值排除其余两个不正确选项．

【详解】 由 $\log_2 x$ 在 $x < 0$ 时无意义知选项 A 是不正确的，所以排除选项 A．

由 $\log_2 2 = 1, \log_2 3 > 1$ 知 $2,3 \notin A$，从而 $2,3 \notin A - B$，所以排除选项 B、C．

故选 D．

【评注】 利用推演法也可以求解本题：

由 $A - B$ 的定义知 $A - B = A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B)$，其中，$A = \{x \mid 0 < x < 2\}$，且由 $B = \{x \mid 1 < x < 3\}$ 得 $\complement_{\mathbf{R}} B = \{x \mid x \leqslant 1\} \cup \{x \mid x \geqslant 3\}$，所以 $A - B = \{x \mid 0 < x \leqslant 1\}$．

1.10 设 $\mathbf{R}$ 的两个子集 $A = \{y \mid y = \sqrt{2x - x^2}\}$，$B = \{y \mid y = 2^x, x > -1\}$，定义 $A \oplus B = \{x \mid x \in A \cup B$ 且 $x \notin A \cup B\}$，则 $A \oplus B$ 等于　　（　　）

A. $\left[0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$　　　　B. $\left[0, \frac{1}{2}\right) \cup (1, +\infty)$

C. $\left[0, \frac{1}{2}\right]$　　　　D. $(1, +\infty)$

【分析】 用赋值法解本题，即用特殊值，例如 $y = \frac{1}{2}, 2$ 等排除其中三个不正确选项．

【详解】 由 $\oplus$ 定义知 $A \oplus B = (A \cup B) \cap \complement_{\mathbf{R}}(A \cap B)$．显然 $\frac{1}{2} \in A$，但 $\frac{1}{2} \notin B$，所以 $\frac{1}{2} \in A \cup B$，但 $\frac{1}{2} \notin A \cap B$，从而 $\frac{1}{2} \in A \oplus B$．由此可知选项 B、D 不正确．此外，$2 \notin A$ 但 $2 \in B$，所以与以上相同理由知 $2 \in A \oplus B$．由此可知选项 C 不正确．

故选 A．

【评注】 本题也可用推演法解，具体如下：

由于 $A = [0,1]$，$B = \left(\frac{1}{2}, +\infty\right)$，所以 $A \cup B = [0, +\infty)$，$\complement_{\mathbf{R}}(A \cap B) = \left(-\infty, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty)$，从而

$$A \oplus B = (A \cup B) \cap \complement_R(A \cap B) = \left[0, \frac{1}{2}\right] \cup (1, +\infty).$$

比较两种解法，显然赋值法显得比较简单．

1.11 设 A, B, I 均为非空集合，且满足 $A \subsetneqq B \subsetneqq I$，则下列各式中错误的是　　（　　）

A. $\complement_I A \cup B = I$　　B. $\complement_I A \cup \complement_I B = I$

C. $A \cap \complement_I B = \varnothing$　　D. $\complement_I A \cup \complement_I B = \complement_I A$

【分析】 用图示法解本题，即用文氏图逐一判断各个选项的正确性．

【详解】 由题设 $A \subsetneqq B \subsetneqq I$ 知本题的文氏图如图 1.4 所示．由图可知 $\complement_I A \cup B = I$，但 $\complement_I A \cup \complement_I B = \complement_I A \neq I$．

故选 B．

【评注】 文氏图可以帮助我们直观理解集合之间的关系与运算，在解有关集合的

选择题时应尽量使用.

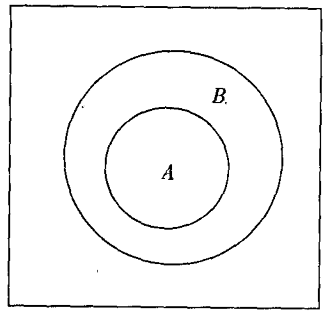


图 1.4

1.12 设 S_1,S_2,S_3 是全集 I 的三个非空子集且 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$,则下列各式中正确的是 (　　)

A. $(\complement_I S_1) \cap (S_2 \cap S_3) = \varnothing$

B. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2) \cap (\complement_I S_3)$

C. $(\complement_I S_1) \cap (\complement_I S_2) \cap (\complement_I S_3) = \varnothing$

D. $S_1 \subseteq (\complement_I S_2) \cup (\complement_I S_3)$

【分析】 用赋值法解本题,即选择特殊的 S_1,S_2,S_3 排除其中三个不正确的选项.

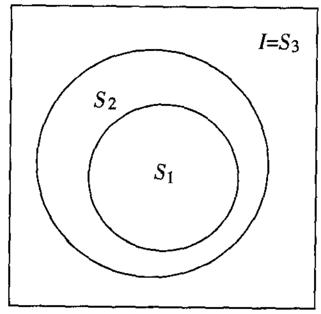


图 1.5

【详解】 设 S_1,S_2,S_3,I 的文氏图如图 1.5 所示,则由图可知:

$$(\complement_I S_1) \cap (S_2 \cap S_3) = \complement_I S_1 \cap S_2 \neq \varnothing,$$

$$(\complement_I S_2) \cap (\complement_I S_3) = \varnothing \not\supseteq S_1,$$

$$(\complement_I S_2) \cup (\complement_I S_3) = \complement_I S_2 \not\supseteq S_1,$$

所以,排除选项 A、B、D.

故选 C.

【评注】 以下结论是有用的:

设 S_1,S_2,S_3 是全集的三个非空子集,则 $S_1 \cup S_2 \cup S_3 = I$ 的充分必要条件是 $\complement_I S_1 \cap \complement_I S_2 \cap \complement_I S_3 = \varnothing$.

1.13 图 1.6 中的 P、Q、S 是全集 I 的三个子集,则阴影部分所表示的集合为 (　　)

A. $(P \cap Q) \cap S$　　B. $(P \cap Q) \cup S$

C. $(P \cap Q) \cap \complement_I S$　　D. $(P \cap Q) \cup \complement_I S$

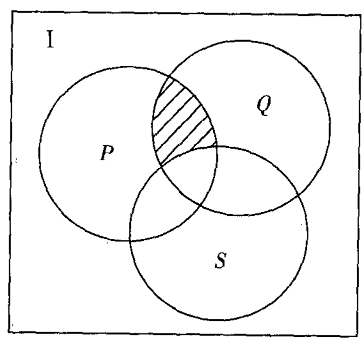


图 1.6

【分析】 用图示法解本题,即利用所给的文氏图判断阴影部分可以用哪个选项的表达式表示.

【详解】 记图 1.6 中的阴影部分为 M,则由图可知,

$$M = (P \cap Q) \cap \complement_I S.$$

故选 C.

【评注】 本题可用推演法解:

由于 M 是 $P \cap Q$ 的位于 S 的补集之中的部分,所以 $M = (P \cap Q) \cap \complement_I S$.

1.14 满足条件 $A \subseteq \{1,2,3,4\}$,且 $A \cap \{x \mid x^2 \leqslant 2x, x \in \mathbf{N}\} \neq \varnothing$ 的集合 A 的个数为 (　　)

A. 4　　B. 6　　C. 8　　D. 12

【分析】 用推演法解本题. 先确定 $B = \{x \mid x^2 \leqslant 2x, x \in \mathbf{N}\}$ 中包含的元素,然后计算使 $A \cap B \neq \varnothing$ 的集合 $\{1,2,3,4\}$ 的子集 A 的个数.

【详解】 记 $B = \{x \mid x^2 \leqslant 2x, x \in \mathbf{N}\}$,则 $B = \{0,1,2\}$,所以使

$$A \cap B \neq \varnothing$$

的 A 为 $\{1\}$, $\{1,2\}$, $\{1,3\}$, $\{1,4\}$, $\{1,2,3\}$, $\{1,2,4\}$, $\{1,3,4\}$, $\{1,2,3,4\}$, $\{2\}$,

$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{2,3,4\}$，共 12 个.

故选 D.

【评注】 上述求得的 12 个 A 是集合 $\{1,2,3,4\}$ 所有子集中的一部分，$\{1,2,3,4\}$ 的所有子集共 16 个，它们为

$\varnothing$，$\{1\}$，$\{2\}$，$\{3\}$，$\{4\}$，$\{1,2\}$，$\{1,3\}$，$\{1,4\}$，$\{2,3\}$，$\{2,4\}$，$\{3,4\}$，$\{1,2,3\}$，$\{1,2,4\}$，$\{1,3,4\}$，$\{2,3,4\}$，$\{1,2,3,4\}$.

1.15 已知集合 $A = \{x \mid x^2 + \sqrt{m}x + 1 = 0\}$，如果 $A \cap R = \varnothing$，则实数 m 的取值范围为 （ ）

A. $m < 4$ B. $m > 4$ C. $0 < m < 4$ D. $0 \leqslant m < 4$

【分析】 由题设 $A \cap R = \varnothing$ 知本题就是确定使方程 $x^2 + \sqrt{m}x + 1 = 0$ 无实根的 m 取值范围，据此用推演法解本题.

【详解】 使方程 $x^2 + \sqrt{m}x + 1 = 0$ 无实根的 m 应满足

$$\begin{cases} m \geqslant 0, \\ (\sqrt{m})^2 - 4 \cdot 1 < 0. \end{cases}$$

解此不等式组得 $0 \leqslant m < 4$.

故选 D.

【评注】 在本题中，集合 A 有一个明显的特征：它的元素与 m 的取值有关.

1.16 设 $\mathbf{R}$ 的子集 $A = \{x \mid x^2 + 4x = 0\}$ 和 $B = \{x \mid x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0\}$，若 $A \cap B = B$，则实数 a 的取值范围为 （ ）

A. $(-\infty, -1]$ B. $\{1\}$

C. $\varnothing$ D. $(-\infty, -1] \cup \{1\}$

【分析】 用赋值法解本题，即利用 a 取特殊值，例如 1，-1 等排除其中三个不正确的选项.

【详解】 显然 $A = \{0, -4\}$. 将 $a = 1$ 代入方程

$$x^2 + 2(a+1)x + a^2 - 1 = 0 \quad ①$$

得 $x = 0, -4$，此时 $B = A$. 由此可知 1 应在 a 的取值范围内，所以排除选项 A、C.

将 $a = -1$ 代入①得 $x = 0$（二重根），此时 $B \subseteq A$. 由此可知 -1 也应在 a 的取值范围内，所以排除选项 B.

故选 D.

【评注】 对 R 的子集 A、B，以下三个命题是等价的：

(1) $A \cap B = B$；

(2) $A \cup B = A$；

(3) $B \subseteq A$.

1.17 已知 $\mathbf{R}$ 的子集 $A = \{x \mid x^2 + px + q \leqslant 0\}$，$B = \left\{x \left| \frac{x-3}{x+1} > 0\right.\right\}$，且 $A \cup B = \mathbf{R}$，$A \cap B = \{x \mid 3 < x \leqslant 4\}$，则 p，q 的值分别为 （ ）

A. $-3, 4$ B. $-3, -4$ C. $3, 4$ D. $3, -4$

【分析】 用逆推法解本题，即逐一将选项中的 p、q 值代入集合 A，检验是否满足 $A \cup$