普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高等数学

下册

东南大学高等数学教研室 编

高等教育出版社
HIGHER EDUCATION PRESS

013/448
:2
2008

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

高 等 数 学

下 册

东南大学高等数学教研室 编

高等教育出版社

内容提要

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材，是按照教育部提出的高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革计划的精神，吸收了教育部立项支持的“电子与电气信息类专业人才培养改革成果的整合与深化”项目的部分研究成果，总结多年来东南大学高等数学教学改革的实践而编写的一本改革教材。

本书分为上、下两册，第一章至第四章为上册，主要内容为一元函数微积分和常微分方程，第五章至第十章为下册，主要内容为多元函数微积分、级数与复变函数等。另外还包括数学实验及三个附录，书后附有部分习题的参考答案与提示。

本书可作为理工科院校电子信息与电气学科各专业及其他需要学习复变函数的工科专业的高等数学课程教材，也可作为相关专业的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学.下册/东南大学高等数学教研室编.—北京：高等教育出版社，2008.1

ISBN 978-7-04-022662-1

Ⅰ.高… Ⅱ.东… Ⅲ.高等数学-高等学校-教材 Ⅳ.O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第190179号

策划编辑	李艳馥	责任编辑	董达英	封面设计	王凌波
责任绘图	尹文军	版式设计	史新薇	责任校对	杨雪莲
责任印制	毛斯璐				

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100011	网　　址	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	北京北苑印刷有限责任公司	畅想教育	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	版　　次	2008年1月第1版
印　　张	20.25	印　　次	2008年1月第1次印刷
字　　数	370 000	定　　价	21.40元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

版权所有　侵权必究

物料号　22662-00

目　　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

第五章　多元函数微分学及其应用

前面我们讨论的主要是依赖于一个自变量的函数(即一元函数)，但是我们遇到的许多实际问题往往涉及多方面的因素，反映到数量关系上，就是一个变量依赖于多个变量的问题，这就是本章将要讨论的多元函数. 多元函数的许多概念是一元函数相关概念的推广，处理问题的思想方法与一元函数有许多类似之处，但由于自变量个数的增多，它与一元函数也存在许多差异.

本章主要内容包括多元函数的概念，多元函数的极限与连续，多元函数微分法及其应用，复变函数的导数与解析函数. 为了简单起见，本章对多元函数的基本概念的阐述主要限于二元函数，因为这些概念不做任何本质上的改变就可从二元函数推广到二元以上的多元函数中去.

第一节　预 备 知 识

本节介绍 n 维实空间 $\mathbf{R}^n$、多元函数及复变函数的基本概念.

1.1　n 元(实)函数

在第一章中，我们已介绍了实数集 $\mathbf{R}$，并定义了 $\mathbf{R}^n$ 为 n 个实数集 $\mathbf{R}$ 的 Descartes 乘积，即

$$\mathbf{R}^n=\underbrace{\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times\cdots\times\mathbf{R}}_{n}=\{\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\mid x_i\in\mathbf{R}(i=1,\cdots,n)\}.$$

我们称一个 $n(n\geqslant2)$元有序实数组

$$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n),\quad x_i\in\mathbf{R}\quad(i=1,2,\cdots,n)$$

为一个 n 维实向量(n 维实向量 $\boldsymbol{x}$ 有时也记作 $\boldsymbol{x}=\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$). n 维实空间 $\mathbf{R}^n$ 中的向量也称为点，向量 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个分量 x_i 也称为点 $\boldsymbol{x}$ 的第 i 个坐标，向量通常用小写黑体英文字母表示，如 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 等，有时也用大写英文字母 P，Q 等表示 $\mathbf{R}^n$ 中的点.

设 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in\mathbf{R}^n$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)\in\mathbf{R}^n$，定义两个向量的加法为

$$\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$

定义向量 $\boldsymbol{x}$ 与数 $\alpha\in\mathbf{R}$ 的数乘为

$$\alpha\boldsymbol{x}=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),$$

此时，由于 $\boldsymbol{x}+\boldsymbol{y}\in\mathbf{R}^n$，$\alpha\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n$，则称 $\mathbf{R}^n$ 构成一个 n 维实向量空间.

我们经常用到的是 $n=2$ 或 $n=3$ 的情形，即二维实空间 $\mathbf{R}^2$ 和三维实空间 $\mathbf{R}^3$. 读者在理解 $\mathbf{R}^n$ 的有关概念时如发生困难，不妨视 $n=2$ 或 $n=3$.

两点 $\boldsymbol{x}$ 与 $\boldsymbol{y}$ 之间的距离仿照 $\mathbf{R}^2$ 的情形定义为

$$\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}.$$

可以证明，距离函数 ρ 满足以下性质：

1) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})\geqslant 0$（非负性）；

2) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x})$（对称性）；

3) $\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{z})\leqslant\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})+\rho(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$（三角不等式）.

设 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，则集合 $\{\boldsymbol{x}\in\mathbf{R}^n \mid \rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})<\delta\}$ 称为点 $\boldsymbol{a}$ 的 δ 邻域，记为 $N(\boldsymbol{a},\delta)$，集合 $N(\boldsymbol{a},\delta)\setminus\{\boldsymbol{a}\}$ 称为点 $\boldsymbol{a}$ 的去心 δ 邻域，记为 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)$. 点集 $N(\boldsymbol{a},\delta)$ 与 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)$ 有时也简记为 $N(\boldsymbol{a})$ 与 $\mathring{N}(\boldsymbol{a})$，分别称为点 $\boldsymbol{a}$ 的邻域与点 $\boldsymbol{a}$ 的去心邻域.

在直线 $\mathbf{R}$ 上，邻域 $N(a,\delta)$ 就是开区间 $(a-\delta,a+\delta)$；在平面 $\mathbf{R}^2$ 上，邻域 $N(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}$ 为圆心，δ 为半径的圆 $\{(x_1,x_2) \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2}<\delta\}$；在空间 $\mathbf{R}^3$ 上，邻域 $N(\boldsymbol{a},\delta)$ 就是以 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^3$ 为球心，δ 为半径的球

$$\{(x_1,x_2,x_3) \mid \sqrt{(x_1-a_1)^2+(x_2-a_2)^2+(x_3-a_3)^2}<\delta\}.$$

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，点 $\boldsymbol{a}\in\mathbf{R}^n$，若对 $\forall\delta>0$，使得 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A\neq\varnothing$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**聚点**. 若 $\exists\delta>0$，使得 $N(\boldsymbol{a},\delta)\subseteq A$，则称 $\boldsymbol{a}$ 为 A 的**内点**. 如 A 的点都是 A 的内点，则称 A 是**开集**. 若对 $\forall\delta>0$，$\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A\neq\varnothing$，且 $\mathring{N}(\boldsymbol{a},\delta)\cap A^c\neq\varnothing$，则称 $\boldsymbol{a}$ 是 A 的**边界点**. A 的边界点的全体叫做 A 的**边界**，记为 ∂A.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若存在原点 O 的某个 r 邻域 $N(O,r)$，使得 $A\subseteq N(O,r)$，则称 A 是**有界集**，反之，称 A 是**无界集**.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的有界点集，$D=\{\rho(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) \mid \boldsymbol{x}\in A,\boldsymbol{y}\in A\}$ 是一个有上界的实数集，称 $\sup D$ 为点集 A 的**直径**，记为 $d(A)$. 我们约定，无界点集的直径是无穷大，用记号 ∞ 表示.

设 A 是 $\mathbf{R}^n$ 中的点集，若 A 中的任意两点 $\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y}$ 都可用一条完全含于 A 内的折线相连接，则称 A 是**连通集**. $\mathbf{R}^n$ 中连通的开集称为 $\mathbf{R}^n$ 中的**区域**，区域连同其边界组成的集合称为**闭区域**.

例 1.1 设 $A=\{(x,y) \mid (x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ 且 } 1\leqslant x^2+y^2<4\}$，$A$ 的内点组成的集合为 $\{(x,y) \mid (x,y)\in\mathbf{R}^2 \text{ 且 } 1<x^2+y^2<4\}$，$A$ 的边界 $\partial A=\{(x,y) \mid (x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $x^2+y^2=1,x^2+y^2=4\}$，A 是一有界点集，A 的直径 $d(A)=4$，A 是连通集，但 A 不是开集，当然 A 也不是区域.

例 1.2 点集 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $a^2<x^2+y^2<b^2\}$ 是区域，点集 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $a^2\leqslant x^2+y^2\leqslant b^2\}$ 是闭区域，它们都是有界集，点集 $\{(x,y)\mid(x,y)\in\mathbf{R}^2$ 且 $xy>0\}$ 是开集但不连通，它不是区域，且它是无界集.

在实践中，许多量的变化、计算与测定常常受多个因素的影响. 例如圆柱体的体积 V 与底半径 r 及高度 h 有关，所以 V 是两个变量 r 和 h 的函数. 现给出 n 元实函数的定义.

定义 1.1 设 $A\subseteq\mathbf{R}^n$，$B\subset\mathbf{R}$ 是两个非空集合，若存在一个从 A 到 B 的映射 $f:A\to B$，则称 f 为 n 元实函数，常记作

$$f:\boldsymbol{x}\mapsto y=f(\boldsymbol{x}),\quad \boldsymbol{x}\in A,$$

其中 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)\in A$ 称为**自变量**，$y\in B$ 称为**因变量**，$f(\boldsymbol{x})$ 表示函数 f 在点 $\boldsymbol{x}$ 处的值，A 称为 f 的**定义域**，常记为 $D(f)$，$f(A)=\{y\mid y=f(\boldsymbol{x}),\boldsymbol{x}\in A\}$ 称为 f 的**值域**，常记为 $R(f)$.

习惯上，二元函数常记成 $z=f(x,y)$，$(x,y)\in A\subseteq\mathbf{R}^2$；三元函数常记成 $u=f(x,y,z)$，$(x,y,z)\in A\subseteq\mathbf{R}^3$.

当我们用某个算式表达多元函数时，凡是使算式有意义的自变量所组成的点集称为这个多元函数的自然定义域. 我们约定，凡用算式表达的多元函数，除另有说明外，其定义域都是指自然定义域.

例 1.3 求下列函数的定义域：

(1) $z=\sqrt{1-x^2}+\sqrt{y^2-1}$；　　(2) $u=\ln(1-x^2-y^2-z^2)$.

解 (1) 函数的定义域 $A=\{(x,y)\in\mathbf{R}^2\mid |x|\leqslant1,|y|\geqslant1\}$，它表示 xOy 面上的两个无界区域(图 1.1 中的阴影部分).

(2) 函数 u 的定义域 $A=\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\mid x^2+y^2+z^2<1\}$，它表示一个中心在原点的单位球的内部区域(图 1.2).

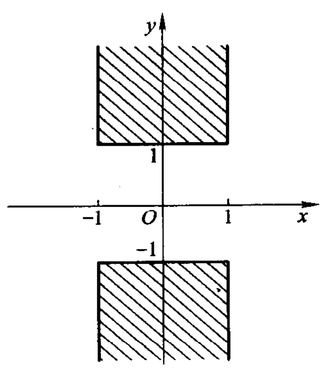

图 1.1

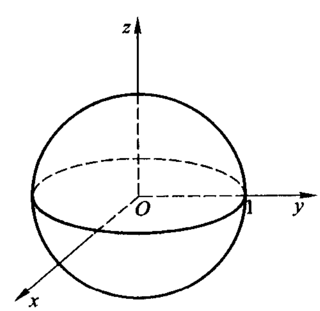

图 1.2

1.2 n 元 m 维向量值函数

若在定义 1.1 中，令 $B\subset\mathbf{R}^m(m\geqslant 2)$，则称映射 $\boldsymbol{f}:A\to B$ 为定义在 $A\subseteq\mathbf{R}^n$ 上的一个 **n 元 m 维向量值函数**.

一个 n 元 m 维向量值函数 $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ 对应于 m 个 n 元实函数：

$$\begin{cases} y_1=f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ y_2=f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_m=f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n). \end{cases}$$

利用向量的记号，也可把 n 元 m 维向量值函数写成如下形式：

$$\boldsymbol{y}=\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ \vdots \\ f_m(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{pmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{y}=(y_1,\cdots,y_m)^{\mathrm{T}}$，$\boldsymbol{f}=(f_1,\cdots,f_m)^{\mathrm{T}}$.

例 1.4 一元三维向量值函数 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=(x(t),y(t),z(t))^{\mathrm{T}}$，也可表示为

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \quad t\in[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}. \\ z=z(t), \end{cases} \tag{1.1}$$

如果用 t 表示时间，(x,y,z) 表示运动质点的位置，则 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 在物理上表示质点的运动方程. 在直角坐标系中，点集 $\{(x,y,z)\mid x=x(t),y=y(t),z=z(t),t\in[\alpha,\beta]\subset\mathbf{R}\}$ 表示该质点的运动轨迹，它通常是 $\mathbf{R}^3$ 中的一条曲线，因此 (1.1) 式在几何上也可看作是空间曲线的参数方程，其中的参数 t 不一定表示时间，也可以是角度，长度等.

例 1.5 将点电荷 q 放置于空间 $\mathbf{R}^3$ 的坐标原点处，根据 Coulomb 定律，它在空间 $\mathbf{R}^3$ 中任一点 (x,y,z) 处产生的电场强度为

$$\boldsymbol{E}=kq\frac{x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k},$$

它表示了电场强度向量 $\boldsymbol{E}=(P,Q,R)$ 对空间位置的坐标 x，y，z 的依赖关系，这是一个三元三维向量值函数.

1.3 复变函数

若在定义 1.1 中，令点集 $A\subset\mathbf{C}$，$B\subset\mathbf{C}$ 是两个非空复数集，则称映射 $f:A\to B$ 为定义在 $A\subset\mathbf{C}$ 上的**复变函数**，通常用 $z\in\mathbf{C}$ 表示自变量，$w\in\mathbf{C}$ 表示因变

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

量，复变函数常记为：$w=f(z)$，$z\in A$.

若对于 z 的一个值，对应唯一的一个 w 值，则称 $w=f(z)$ 为**单值函数**，如果对应多个 w 值，则称 $w=f(z)$ 为**多值函数**. 今后若无特别声明，所讨论的函数均为定义在某区域上的单值函数.

关于复变函数的定义域与值域的概念与实函数的相关概念类似，不再叙述.

从几何的角度看，$\mathbf{C}$ 与 $\mathbf{R}^2$ 是等价的，因此复变函数

$$w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$$

等价于两个二元实函数 $u=u(x,y)$，$v=v(x,y)$，此时 $w=u+\mathrm{i}v$，$z=x+\mathrm{i}y$，复变函数的几何意义可理解为两个复平面之间的映射.

在理论研究或工程实践中，许多量都与复变函数有关. 例如在电视中转站用的波导中，在分析其电力线与等位线的分布情况时，就出现了函数

$$z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy.$$

又如，流动的水面上不同的点处，其流速的大小与方向一般不相同，因此流速 $\boldsymbol{v}$ 是平面上变动的向量，它的两个分量 $g(x,y)$，$h(x,y)$ 都是 x，y 的函数，利用复变函数，可将流速 $\boldsymbol{v}$ 表示为 $\boldsymbol{v}=\boldsymbol{v}(z)=g(x,y)+\mathrm{i}h(x,y)$，$z=x+\mathrm{i}y$. 类似地，平面上的电场强度 $\boldsymbol{E}$ 也可用复变函数表示为

$$\boldsymbol{E}=\boldsymbol{E}(z)=P(x,y)+\mathrm{i}Q(x,y),\ z=x+\mathrm{i}y.$$

由于复变函数在几何上可理解为 z 平面与 w 平面之间的映射，用 z 平面上的点表示自变量 z 的值，用 w 平面上的点表示函数 w 的值，复变函数 $w=f(z)$ 即可看成是把 z 平面上的一个点集 A(定义集合)映到 w 平面上的一点集 A^*(函数值集合)的映射，在映射 $w=f(z)$ 下，$w_0=f(z_0)$ 及 $A^*=f(A)$ 分别称为 z_0 及 A 的**像**，z_0 与 A 称为 w_0 与 A^* 的**原像**.

例 1.6 讨论复变函数 $w=z^2$ 的映射性质.

解 通过函数 $w=z^2$，将点 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=1+2\mathrm{i}$ 和 $z_3=-1$ 分别映射到点 $w_1=-1$，$w_2=-3+4\mathrm{i}$ 和 $w_3=1$. 由乘法的模与辐角的定理可知，通过映射 $w=z^2$，z 的辐角增长一倍，因此，映射 $w=z^2$ 将 z 平面上与实轴交角为 α 的角形区域映射成 w 平面上与实轴交角为 2α 的角形区域(如图 1.3).

由于 $u=x^2-y^2$，$v=2xy$，因此，函数 $w=z^2$ 还将 z 平面的两族双曲线 $x^2-y^2=C_1$ 和 $2xy=C_2$ 分别映射成 w 平面上的两族平行直线 $u=C_1$ 和 $v=C_2$(如图 1.4).

与实变函数一样，复变函数也有反函数的概念. 若 A^* 中每一个点 w，通过关系式 $w=f(z)$ 只有一个点 $z\in A$ 与之相对应，则在 A^* 也确定了一个单值函数，记作 $z=f^{-1}(w)$，称为函数 $w=f(z)$ 的反函数，或称为映射 $w=f(z)$ 的逆映射.

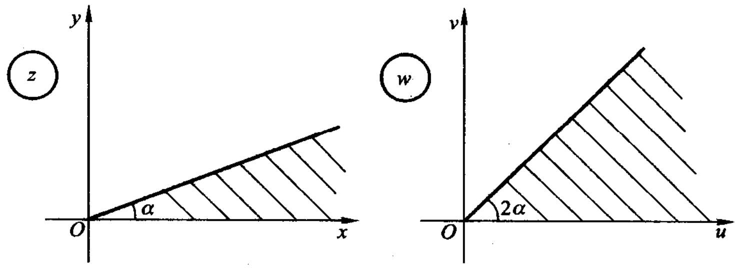

图 1.3

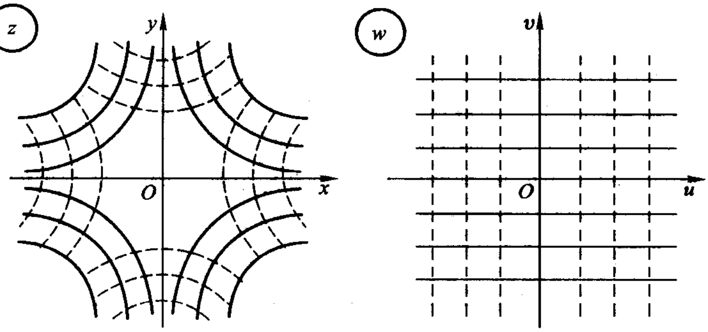

图 1.4

习 题 5.1

1. 求下列函数的定义域：

(1) $f(x,y)=\dfrac{\sqrt{1-x^2-y^2}}{x+y}$； (2) $z=\ln(1-|x|-|y|)$；

(3) $z=\arcsin\dfrac{x}{y^2}+\arcsin(1-y)$； (4) $u=\sqrt{y^2-1}+\ln(4-x^2-y^2-z^2)$.

2. 已知 $f\left(x+y,\dfrac{y}{x}\right)=x^2-y^2$，试求 $f(x,y)$.

3. 画出下列不等式所确定的区域或闭区域，并指明是有界的还是无界的.

(1) $|z-1|>4$； (2) $0<\mathrm{Re}\,z<1$；

(3) $2\leqslant|z|\leqslant3$； (4) $|z-1|<|z+3|$；

(5) $-1<\arg z<-1+\pi$； (6) $|z-2|+|z+2|\leqslant6$.

4. 写出下列函数表示式：

(1) 将圆锥体的体积 V 表示为圆锥体斜高 l 和高 h 的函数；

（2） 在半径为 1 的球面内内接长、宽、高为 x，y，z 的长方体，将其体积表示为 x，y 的函数.

5. 已知映射 $w=z^3$，求：

（1） 点 $z_1=\mathrm{i}$，$z_2=1+\mathrm{i}$，$z_3=\sqrt{3}+\mathrm{i}$ 在 w 平面上的像；

（2） 区域 $0<\arg z<\frac{\pi}{3}$ 在 w 平面上的像.

第二节　极限与连续

本节介绍多元函数及复变函数的极限与连续的概念与性质.

2.1　多元函数的极限与连续

定义 2.1　设二元函数 $f(M)=f(x,y)$ 定义在点集 $E\subseteq\mathbf{R}^2$ 上，点 $M_0(x_0,y_0)$ 是 E 的聚点，$a\in\mathbf{R}$ 是常数，若对 $\forall\varepsilon>0$，存在 $\delta>0$，使得当 $M\in\mathring{N}(M_0,\delta)\cap E$ 时，恒有

$$|f(M)-a|<\varepsilon,$$

则称 a 为二元函数 f 在点 M_0 处的**极限**，记为

$$\lim_{M\to M_0}f(M)=a,$$

即

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=a \quad 或 \quad \lim_{\substack{x\to x_0\\ y\to y_0}}f(x,y)=a.$$

这个极限常称为**二重极限**.

定义 2.2　设二元函数 $f(x,y)$ 在点集 $E\subseteq\mathbf{R}^2$ 上定义，点 $M_0(x_0,y_0)$ 为 E 的聚点，且 $M_0\in E$，如果

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}f(x,y)=f(x_0,y_0),$$

则称函数 f 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处**连续**，并称 M_0 为 f 的**连续点**.

如果 M_0 为 E 的聚点，且 M_0 不是 f 的连续点，则称 M_0 为函数 f 的**间断点**. 如果 $f(x,y)$ 在点集 E 上每一点处都连续，则称 $f(x,y)$ 为 E 上的**连续函数**，记作 $f\in C_E$.

二重极限的定义在形式上与一元函数极限的定义并无多大差异，因此，一元函数极限的有关性质（如唯一性、局部有界性、局部保号性、夹逼准则及 Heine 定理等）和运算法则都可以推广到二重极限中来，这里不再一一重述.

但是在二重极限中，由于自变量的增多，产生了一些与一元函数极限的本质差异. 在一元函数极限中，点 x 只能在数轴上从 x_0 左右趋于 x_0；在二重极限中，点 (x,y) 在平面集合 E 中趋于 (x_0,y_0) 的方式可以是多种多样的，例如，

方向可以任意多，路径也可以各不相同. 所谓 $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y)=a$ 是指当点 (x,y) 在集 E 中从 (x_0,y_0) 的四面八方以可能有的任意方式和任意路径趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 都趋于同一个常数 a. 因此如果 (x,y) 以两种不同的方式或路径趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 趋于不同的数，或者 (x,y) 按某一种方式或路径趋于 (x_0,y_0) 时，$f(x,y)$ 不趋于一个确定的数，那么即可断定 $f(x,y)$ 在点 $M_0(x_0,y_0)$ 处的极限不存在.

例 2.1 证明 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}=0.$

证 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$ 的定义域为 $E=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$，点 $(0,0)$ 为 E 的聚点，由于

$$|f(x,y)-0|=\left|\frac{x^2y}{x^2+y^2}\right|\leqslant|y|\leqslant\sqrt{x^2+y^2},$$

所以对于 $\forall\varepsilon>0$，$\exists\delta=\varepsilon$，当 $0<\sqrt{x^2+y^2}<\delta$，即 $(x,y)\in\mathring{N}(0,\delta)\cap E$ 时，有

$$|f(x,y)-0|<\varepsilon,$$

故有 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0.$

例 2.2 设 $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$，讨论极限 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 是否存在.

解 设点 (x,y) 沿直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$，则

$$\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{kx^2}{(1+k^2)x^2}=\frac{k}{1+k^2},$$

上式表明，当 k 不同，即当 (x,y) 沿着不同的直线 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 趋于不同的常数，因此 $\lim\limits_{\substack{x\to0\\y\to0}}f(x,y)$ 不存在.

若令
$$g(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq0,\\ 0, & x^2+y^2=0,\end{cases}$$

根据定义 2.2 知，$g(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处不连续，点 $(0,0)$ 是函数 $g(x,y)$ 的间断点.

例 2.3 设 $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^4+y^2}$，讨论极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}f(x,y)$ 是否存在.

解 当点沿 $y=kx$ 趋于 $(0,0)$ 时，有

$$\lim_{x\to0}f(x,kx)=\lim_{x\to0}\frac{kx^3}{x^4+k^2x^2}=\lim_{x\to0}\frac{kx}{x^2+k^2}=0,$$

这表明点 (x,y) 沿任意直线趋于点 $(0,0)$ 时，$f(x,y)$ 都以 0 为极限，然而，这

还不能断言$f(x,y)$以 0 为极限，事实上，当点(x,y)沿曲线 $y=x^2$ 趋于$(0,0)$时，有

$$\lim_{x\to 0}f(x,x^2)=\lim_{x\to 0}\frac{x^4}{2x^4}=\frac{1}{2},$$

由此可见，当(x,y)以不同的方式趋于$(0,0)$时，$f(x,y)$趋于不同的值，所以极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}f(x,y)$不存在.

由连续的定义及极限的运算法则可知，多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍为连续函数；多元连续函数的复合函数也是连续函数.

例如，函数 $z=\cos\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$可看成是由 $z=\cos u$ 与 $u=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$复合而成的，而 $z=\cos u$ 是连续函数，$u=\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$除圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点之外在平面 $\mathbf{R}^2$ 上处处连续，因而复合函数 $z=\cos\dfrac{1}{1-x^2-y^2}$在它的定义域 $E=\{(x,y)\mid x^2+y^2\neq 1\}$上是连续的，圆周 $x^2+y^2=1$ 上的点都是间断点，也称该圆周是函数的间断线.

我们已经知道，在闭区间上连续的一元函数有许多很好的性质，在有界闭区域 E 上连续的多元函数也具有类似于闭区间上连续的一元函数的性质.

定理 2.1 设$f(x,y)$是有界闭区域 E 上的连续函数，则

(1)（**有界性**） f 在 E 上有界；

(2)（**最大最小值定理**） f 在 E 上能取到它的最大值与最小值.

证明略.

其他性质在此不再一一叙述.

2.2 复变函数的极限与连续

设复变函数 $w=f(z)=u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y)$在区域 E 上定义，由本章第一节知，$w=f(z)$实际上是两个二元实函数 $u(x,y)$与 $v(x,y)$的一种组合，所以可以利用二元实函数的极限、连续等概念来定义复变函数的极限、连续等概念.

设 $u(x,y)$和 $v(x,y)$分别在点(x_0,y_0)有极限 a 和 b，则称 $f(z)$在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$有极限 $c=a+\mathrm{i}b$，即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y))=a+\mathrm{i}b=c.$$

特别，当 $a=u(x_0,y_0)$，$b=v(x_0,y_0)$时，若 $u(x,y)$和 $v(x,y)$在点(x_0,y_0)连续，则称 $f(z)$在点 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 连续，即

$$\lim_{z\to z_0}f(z)=\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)}(u(x,y)+\mathrm{i}v(x,y))=u(x_0+y_0)+\mathrm{i}v(x_0,y_0)=f(z_0).$$

若函数 $w=f(z)$ 在区域 E 上每一点处都连续，则称 $f(z)$ 是 E 上的连续函数.

由以上定义知，有关实函数的极限、连续的所有性质都可以相应地搬到复变函数中来. 但需要指出，由于复数不能比较大小，其中连续函数在闭区域上的最大最小值定理，应理解为连续的复变函数模的最大最小值定理，闭区域上连续函数的有界性定理和介值定理也应作相应的理解.

此外，函数 $w=\arg z$ 在原点及负实轴上不连续，这是因为

$$\lim_{\substack{y\to 0^-\\ x<0}} \arg z = -\pi,\quad \lim_{\substack{y\to 0^+\\ x<0}} \arg z = \pi.$$

在复变函数中，往往将 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)|=+\infty$ 记为 $\lim\limits_{z\to z_0}f(z)=\infty$.

习　题　5.2

1. 用定义证明 $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)}(2x^2+3y)=5$.

2. 当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，下列函数的极限是否存在？若存在，求其极限.

(1) $\dfrac{\arcsin(x^2+y^2)}{x^2+y^2}$;　　(2) $\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$;

(3) $(x^2+y^2)e^{-(x+y)}$;　　(4) $\dfrac{x+y}{|x|+|y|}$;

(5) $\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$;　　(6) $\dfrac{(x+y)^2}{x^2+y^2}$.

3. 设 $x=\rho\cos\theta$，$y=\rho\sin\theta$，问点 (x,y) 沿怎样的方向 θ 变化时，下列极限有确定的值：

(1) $\lim\limits_{\rho\to 0^+} e^{\frac{x}{x^2+y^2}}$;　　(2) $\lim\limits_{\rho\to+\infty} e^{x^2-y^2}\sin 2xy$.

4. 证明：下列函数当 (x,y) 沿任何直线趋于 $(0,0)$ 时，函数趋于零，但当 $(x,y)\to(0,0)$ 时，其极限不存在.

(1) $\dfrac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$;　　(2) $\dfrac{x^2}{x^2+y^2-x}$.

5. 设 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=0$，且 $g(M)$ 在 M_0 的某一去心邻域内有界，证明：$\lim\limits_{M\to M_0}f(M)g(M)=0$.

6. 设在 M_0 的某一去心邻域内有 $g(M)\leqslant f(M)\leqslant h(M)$，且 $\lim\limits_{M\to M_0}g(M)=\lim\limits_{M\to M_0}h(M)=a$，证明 $\lim\limits_{M\to M_0}f(M)=a$.

7. 计算下列二重极限：

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com