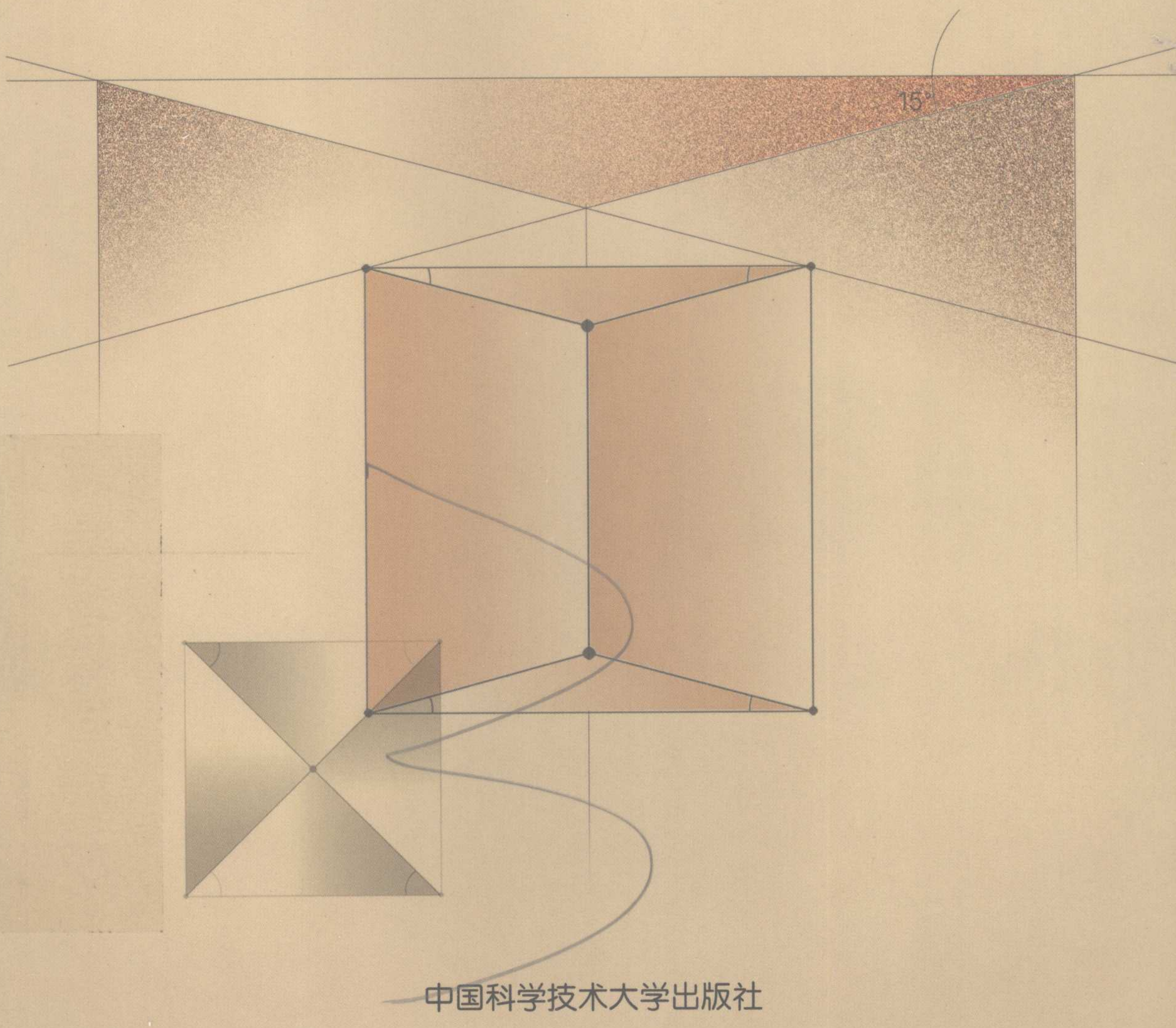
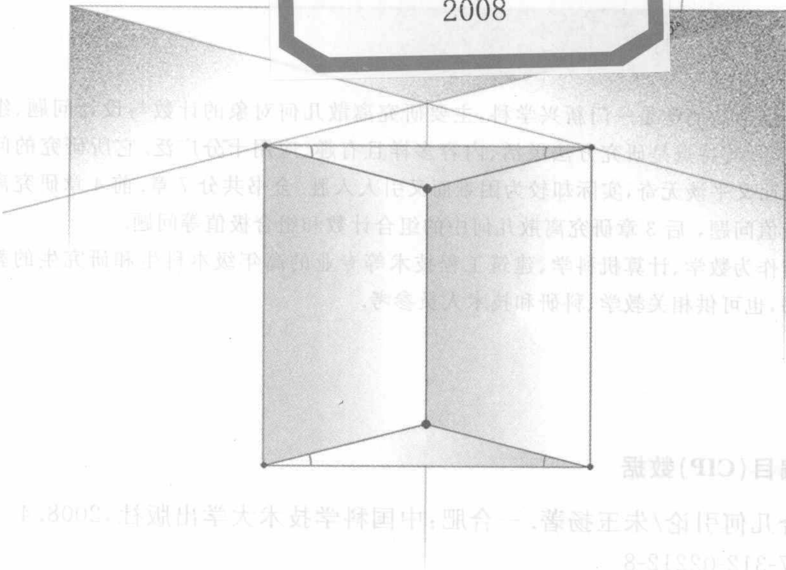
◉朱玉扬 著

离散与组合几何引论

LISAN YU
ZUHE JIHE
YINLUN



中国科学技术大学出版社



LISAN YU ZUHE JIHE YINLUN

◉ 朱玉扬 著

离散与组合几何引论

中国科学技术大学出版社

内容简介

离散与组合几何学是一门新兴学科，主要研究离散几何对象的计数与设计问题、组合与极值问题.其特点是研究方法灵活、内容多样且有趣、应用十分广泛.它所研究的问题看似简单而又平淡无奇，实际却较为困难而又引人入胜.全书共分7章.前4章研究离散点集的极值问题，后3章研究离散几何中的组合计数和组合极值等问题.

本书可作为数学、计算机科学、建筑工程技术等专业的高年级本科生和研究生的教材或参考书，也可供相关教学、科研和技术人员参考.

图书在版编目(CIP)数据

离散与组合几何引论/朱玉扬著.—合肥:中国科学技术大学出版社,2008.4
ISBN 978-7-312-02212-8

Ⅰ.离…　Ⅱ.朱…　Ⅲ.①离散数学—高等学校—教材 ②组合几何—高等学校—教材　Ⅳ.O158　O157.3

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第043794号

出版　中国科学技术大学出版社
安徽省合肥市金寨路96号,邮编:230026
http://press.ustc.edu.cn
印刷　合肥学苑印务有限公司
发行　中国科学技术大学出版社
经销　全国新华书店
开本　710 mm×960 mm　1/16
印张　14.5
字数　298千
版次　2008年4月第1版
印次　2008年4月第1次印刷
定价　26.00元

前　言

离散与组合几何学主要研究几何对象的组合设计、计数与极值问题.人们对它的研究由来已久,如等球装箱及 Steiner 树问题等.人们在社会生产实践中,发现许多问题实际上是某些几何对象的安排与计数问题,这就产生了离散与组合几何学.

离散与组合几何学的深入研究始于 20 世纪.1964 年,H. Hadwiger,H. Debrunner 与 V. Klee 合著的 *Combinatoril Geometry in the Plane* 一书的出版,标志着这门学科的真正诞生.P. Brass,W. Mose,J. Pach 合著的 *Research Problems in Discrete Geometry* 一书更体现了这门学科中丰富的内容与问题,其内容涉及计算与算法几何、初等与凸几何、微分几何、分析学、代数学、图论、数论、组合数学等.对此学科的研究,不仅需要相关的基础理论知识,而且还需要一定的几何直觉与构造能力.组合方法与技巧的运用对这门学科的研究是至关重要的.时至今日,这门学科的发展,不仅丰富了相关的数学理论知识,而且还形成了自身的特色.

目前,现代数学已被广泛应用于一些长期悬而未决的离散与组合几何的问题,同时,一些新的问题又不断产生,使这门学科极具生命力,发展异常迅猛.由于人们很容易掌握这类问题的陈述,同时它的解决往往又体现出创造性的数学思想与精神,所以它深受人们喜爱.

由于每个人都生活在几何空间之中,都有其自身的几何感受,这些感受往往又能从离散与组合几何学中反映出来;另一方面,创新性与现实性是这门学科的主要特点,所以离散与组合几何在数学教育及实际应用方面也凸显重要.

本书第 1 章介绍一种场站设置及平面上的点—线选址问题;第 2 章讨论关于点集间距离的 Heilbronn 型问题;第 3 章介绍 Steiner 树;第 4 章研究正四边形与三角形上的 Heilbronn 数;第 5 章介绍正多边形的一种最优分割;第 6 章讨论某些点集的构造与离散计数的问题;第 7 章介绍格点上的组合数学.

由于等圆覆盖与球的装箱问题篇幅较大,故未将此内容列入书中.这方面的内容可参见宗传明教授与单墫教授相关的著作.

从 20 世纪 90 年代以来,我开始从事这方面的研究与教学工作,搜集整理相关文献,逐渐形成本书,其中很多内容都是作者的科研成果.由于作者的能力与学识水平所限,书中的错误在所难免.加之离散与组合几何的内容极其广泛,不可能在

一本书中充分体现其全貌，书中内容与作者的兴趣有关，难免有失偏颇. 恳请读者批评指正.

本书的出版得到安徽省教育厅自然科学基金项目(2005KJ220)的资助及合肥学院创新教学研究基金项目(2005027)的资助，在此表示感谢.

目　　录

前言 …… I

第 1 章　场站设置与点线选址问题 …… 1

1.1　场站设置问题 …… 1

1.2　平面上的点一线选址问题 …… 29

第 2 章　Heilbronn 型问题 …… 42

2.1　$\inf\lambda_4=\sqrt{2}$的证明 …… 42

2.2　$\inf\lambda_n\geqslant 2\sin\dfrac{n-2}{2n}\pi$ 的证明 …… 43

2.3　$\inf\lambda_6=2\sin 72^\circ$的证明 …… 45

2.4　$\inf\lambda_7=2$ 的证明 …… 49

2.5　$\inf\lambda_8=\dfrac{1}{2}\csc\dfrac{\pi}{14}$的证明及高维空间的几个结果 …… 54

2.6　Heilbronn 型问题又一猜测的证明及其量化 …… 61

2.7　Heilbronn 型问题一个猜测的否定 …… 65

2.8　Heilbronn 型问题的几个估计 …… 70

2.9　平面等圆与 Heilbronn 型问题的下界 …… 71

2.10　$\inf\lambda_n$ 的一个上界 …… 73

2.11　高维空间 Heilbronn 型问题的几个结论 …… 77

2.12　$\mathbb{R}^3$ 中的一个结论 …… 87

第 3 章　Steiner 树 …… 97

3.1　三点的加权 Steiner 树 …… 99

3.2　再论三点 Steiner 问题及 GP 猜想 …… 103

3.3　四点与五点的 GP 猜想 …… 108

第 4 章　关于面积的 Heilbronn 数 …… 112

4.1　正方形区域的 Heilbronn 数 …… 112

4.2　三角形区域的 Heilbronn 数 …… 124

4.3　$\bar{\mu}_6=3$ 与 $\bar{\mu}_n>\dfrac{n}{4}$的证明 …… 131

4.4　$\bar{\mu}_7$ 一个下界的改进 …… 132

第5章　正多边形的最优分割问题 …… 139
5.1　定义与最优分割的一个上下界 …… 139
5.2　正六边形的最优分割 …… 141
5.3　正方形的最优分割 …… 146
5.4　正三角形的最优分割 …… 151
5.5　正多边形等积分割线长的下确界 …… 155
5.6　长方形的一个正方形分割问题 …… 158
5.7　正方形的整数边直角三角形的最优剖分 …… 160
第6章　点集构造与离散计数 …… 162
6.1　祖点集的一种构造方法 …… 162
6.2　Z图形的存在性与点集距离的几个定理 …… 164
6.3　空间分割的计数 …… 167
6.4　直线与曲线划分平面区域个数的上确界 …… 173
6.5　平行线束交点个数下确界的估计 …… 176
6.6　直线划分平面的三角形区域的计数 …… 180
6.7　平面三角网络的几个计数问题 …… 181
6.8　非锐角三角形个数的讨论 …… 183
6.9　数论在一个三角形计数问题中的应用 …… 187
6.10　扩充欧空间中单纯复形的一个计数问题 …… 189
6.11　九点十线问题的解决 …… 194
第7章　单位网格上的组合数学 …… 202
7.1　$\mathbb{R}^n$中的一个计数问题的解决 …… 202
7.2　三角形网格中多边形的计数 …… 205
7.3　定积网格线长的最小值 …… 209
7.4　T路的计数 …… 212
7.5　格点间定长路的计数 …… 215
7.6　格点上一个与距离有关的问题 …… 217
7.7　格点凸多边形内含格点数的下确界 …… 219
参考文献 …… 222

第 1 章　场站设置与点线选址问题

本章主要讨论如下几类问题：(1)对于$\mathbb{R}^m$中n个不同的点$A_1,A_2,\cdots,A_n$，$d(A_i,A_j)(i,j\in\{1,2,\cdots,n\})$表示$A_i$与$A_j$两点之间的距离，记

$$\mu(m,n)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} d(A_i,A_j)},$$

那么$\inf\mu(m,n)$的值是什么？(2)平面上给定n个点$A_1,A_2,\cdots,A_n$，求一直线L，使$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i d(A_i,L)$为最小. 这里$\omega_i$表示点$A_i$的权，$d(A_i,L)$表示点$A_i$到直线$L$的距离. (3)平面上给定$n$条直线$L_1,L_2,\cdots,L_n$，求点$P$，使$\sum\limits_{i=1}^{n}\omega_i d(P,L_i)$及$\max\omega_i d(P,L_i)$为最小.

1.1　场站设置问题

在现实中我们会遇到这样的离散几何规划问题：在平面内需设置n个不同的场站$A_1,A_2,\cdots,A_n$，它们之间的距离都不小于某个常数(否则它们之间就可能产生某种干扰)，另外因保密等要求，每两个场站之间须且只须架设一条线，那么应如何设置这n个场站，才能使得所架设各线长之和最小？此问题可推广到一般更高维空间中. 其数学模型是：设$A_1,A_2,\cdots,A_n$为m维空间$\mathbb{R}^m$中的n个不同点，$d(A_i,A_j)$表示A_i与A_j两点之间的距离，记

$$\mu(m,n)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n} d(A_i,A_j)},$$

$\mu(m,n)$的下确界$\inf\mu(m,n)$的值即为所求问题的解.

定理 1　$\inf\mu(m,m+1)=\mathrm{C}_{m+1}^2$.

证明　因$\mathbb{R}^m$中$m+1$个点$A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$总有

$$\mu(m,m+1)=\frac{\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}\geqslant\frac{\mathrm{C}_{m+1}^2\min\limits_{1\leqslant i<j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}{\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant m+1} d(A_i,A_j)}=\mathrm{C}_{m+1}^2,$$

即 $\inf\mu(m,m+1)\geqslant C_{m+1}^2$.

另一方面，当 $A_1,A_2,\cdots,A_{m+1}$ 恰为 $\mathbb{R}^m$ 中 m 维的正则单形的顶点时，那么它们每两点之间距离皆相等，所以此时有 $\mu(m,m+1)=C_{m+1}^2$，故又有

$$\inf\mu(m,m+1)\leqslant C_{m+1}^2.$$

总之，我们证明了 $\inf\mu(m,m+1)=C_{m+1}^2$.

对于 1 维空间，我们易得如下结果：

定理 2 $\inf\mu(1,n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$.

证明 设 $\mathbb{R}^1$（直线）上 n 个不同点 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 依次从左至右分布. 记 $t=\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant n}d(A_i,A_j)$. 间隔 $n-2$ 个点的两点有 1 对（即 A_1 与 A_n），其距离 $\geqslant 1\times(n-1)t$；间隔 $n-3$ 个点的两点共 2 对，其距离和 $\geqslant 2\times(n-2)t$；……；间隔 0 个点的两点共有 $n-1$ 对，其距离和 $\geqslant(n-1)\times 1t$. 故

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}d(A_i,A_j)&\geqslant 1(n-1)t+2(n-2)t+\cdots+(n-1)1t\\&=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1),\end{aligned}$$

即 $\mu(1,n)\geqslant\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$. 所以 $\inf\mu(1,n)\geqslant\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$.

另一方面，当 n 个点在 $\mathbb{R}^1$ 上均匀分布时，恰有 $\mu(1,n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$. 于是又有 $\inf\mu(1,n)\leqslant\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$.

总之，我们有 $\inf\mu(1,n)=\frac{1}{6}(n+1)n(n-1)$. 证毕.

在平面中，当 n 较大时，求 $\inf\mu(2,n)$ 的值是很困难的. 显然当 $n=2,3$ 时，有 $\inf\mu(2,2)=1$，$\inf\mu(2,3)=3$. 当 $n=4$ 时，我们有

定理 3 $\inf\mu(2,4)=5+\sqrt{3}$.

证明 对平面内的 4 个不同点 A_1,A_2,A_3,A_4，可分以下三种情形来证明：(1) 有三点在一条直线上；(2) 四点为凹四边形的顶点；(3) 四点为凸四边形的顶点.

先证(1)时有 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$. 为方便计，不妨设 $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4}d(A_i,A_j)$ 为单位长 1，不妨设 A_1,A_2,A_3 在一条直线上. 那么

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}d(A_i,A_j)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3}d(A_i,A_j)+\sum_{i=1}^{3}d(A_i,A_4)\geqslant 4+3=7,$$

即 $\mu(2,4)\geqslant 7>5+\sqrt{3}$.

(2) A_1,A_2,A_3,A_4 为凹四边形的顶点，如图 1-1 所示. 因

$$\min_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4} d(A_i,A_j)=1,$$
$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi,$$

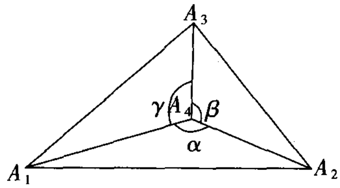


图 1-1

所以 α,β,γ 中至少有一个角不小于$\frac{2\pi}{3}$且小于 π，不妨设 $\frac{2\pi}{3}<\alpha<\pi$. 由于 γ 和 β 所对边 $A_1A_3,A_2A_3\geqslant 1$，于是

$$\begin{aligned}
d(A_1,A_2)&\geqslant \sqrt{d^2(A_1,A_4)+d^2(A_2,A_4)-2d(A_1,A_4)d(A_2,A_4)\cos\alpha}\\
&\geqslant \sqrt{d^2(A_1,A_4)+d^2(A_2,A_4)-2d(A_1,A_4)d(A_2,A_4)\cos\frac{2\pi}{3}}\\
&\geqslant \sqrt{1^2+1^2+1\times 1}=\sqrt{3},
\end{aligned}$$

即

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j)&=d(A_1,A_2)+\sum_{i=3}^{4}d(A_1,A_i)+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant 4}d(A_i,A_j)\\
&\geqslant \sqrt{3}+2+3=5+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

故此时也有 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$.

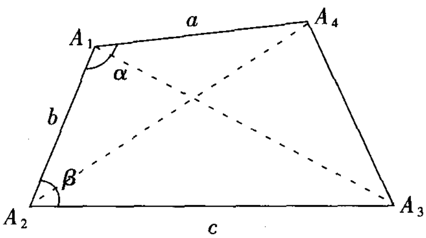


图 1-2

(3) 设 A_1,A_2,A_3,A_4 为凸四边形的顶点，如图 1-2 所示. 设两顶点之间距离最小者为单位 1. 因凸四边形的每个内角$<\pi$，若有一内角$\geqslant\frac{2\pi}{3}$，不妨设 $\alpha\geqslant\frac{2\pi}{3}$，此时$\frac{2\pi}{3}\leqslant\alpha<\pi$，则有

$$\begin{aligned}
d(A_2,A_4)&=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha}\\
&\geqslant \sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\frac{2\pi}{3}}\\
&=\sqrt{a^2+b^2+ab}\geqslant\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

所以

$$\begin{aligned}
\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j)&=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)+d(A_1,A_4)+d(A_3,A_4)+d(A_2,A_4)\\
&\geqslant 3+1+1+\sqrt{3}=5+\sqrt{3}.
\end{aligned}$$

若每个内角都$\leqslant\frac{2\pi}{3}$，因凸四边形必有两邻角和$\geqslant\pi$，不妨设 $\alpha+\beta\geqslant\pi$，此时 $\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3}$，则有

$$d(A_2,A_4)=\sqrt{a^2+b^2-2ab\cos\alpha},$$
$$d(A_1,A_3)=\sqrt{b^2+c^2-2bc\cos\beta}.$$

因为

$$a^2+b^2-2ab\cos\alpha-(1^2+1^2-2\cos\alpha)=(a^2+b^2-2)-2(ab-1)\cos\alpha$$

$$\geqslant(2ab-2)-2(ab-1)\cos\alpha=2(ab-1)(1-\cos\alpha)\geqslant 0,$$

所以

$$d(A_2,A_4)\geqslant\sqrt{1^2+1^2-2\cos\alpha}=2\sin\frac{\alpha}{2}.$$

同理有 $d(A_1,A_3)\geqslant 2\sin\frac{\beta}{2}$. 于是

$$d(A_2,A_4)+d(A_1,A_3)\geqslant 2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}.$$

现要证 $|\alpha-\beta|\leqslant\frac{\pi}{3}$.

若 $|\alpha-\beta|>\frac{\pi}{3}$,不妨设 $\alpha-\beta>\frac{\pi}{3}$,则 $\frac{2\pi}{3}\geqslant\alpha>\frac{\pi}{3}+\beta$,从而 $\beta<\frac{\pi}{3}$. 又 $\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$,故有 $\alpha+\beta<\pi$. 此与条件 $\alpha+\beta\geqslant\pi$ 矛盾,所以 $|\alpha-\beta|\leqslant\frac{\pi}{3}$. 又 $\pi\leqslant\alpha+\beta\leqslant\frac{4\pi}{3}$,于是

$$d(A_2,A_4)+d(A_1,A_3)\geqslant 4\sin\frac{\alpha+\beta}{4}\cos\frac{\alpha-\beta}{4}\geqslant 4\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\frac{\pi}{3}}{4}=1+\sqrt{3},$$

所以

$$\begin{aligned}\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4}d(A_i,A_j)&=[d(A_1,A_2)+d(A_1,A_4)+d(A_2,A_3)+d(A_3,A_4)]\\&\quad+[d(A_2,A_4)+d(A_1,A_3)]\\&\geqslant 4+1+\sqrt{3}=5+\sqrt{3},\end{aligned}$$

即 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$.

综合(1),(2),(3),总有 $\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$,故 $\inf\mu(2,4)\geqslant 5+\sqrt{3}$. 另一方面,从(3)的证明知,当 A_1,A_2,A_3,A_4 恰为两个正三角形合在一起构成的菱形的顶点时,有 $\mu(2,4)=5+\sqrt{3}$,所以又有 $\inf\mu(2,4)\leqslant 5+\sqrt{3}$.

综之,$\inf\mu(2,4)=5+\sqrt{3}$. 证毕.

定理 4 $\inf\mu(2,5)=9+2\sqrt{3}$.

为证明此定理,先证如下几个引理.

引理 1 若 $a,b\geqslant 1,c\in\mathbb{R}^+$,则 $\forall\theta\in\mathbb{R}$,有

$$(a^2+b^2-2ab\cos\theta)^c\geqslant[2(1-\cos\theta)]^c,$$

等号取得当且仅当 $a=b=1$.

证明 因

$$a^2+b^2-2ab\cos\theta\geqslant 2ab-2ab\cos\theta=2ab(1-\cos\theta)\geqslant 2(1-\cos\theta),$$

由指数函数的单调性即证毕.

引理 2 若 A_4 为 $\triangle A_1A_2A_3$ 内或边上一点,且 $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4}d(A_i,A_j)=1$,则

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)\geqslant 3+\sqrt{3},$$

等号取得当且仅当 A_4 恰在有一内角为$\frac{\pi}{3}$的 $\mathrm{Rt}\triangle A_1A_2A_3$ 的斜边的中点上.

证明　设点 A_4 对$\triangle A_1A_2A_3$ 三边所张的三个角分别是 α，β,γ，如图 1-3 所示. 不妨设 $\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma$，则 $\alpha=\min\{\alpha,\beta,\gamma\}$. 因 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$，所以 α 不可能$>\frac{2\pi}{3}$，故只需分(1) $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$及(2) $\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$两种情形来证明.

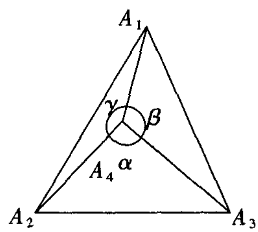


图 1-3

(1) $0<\alpha\leqslant\frac{\pi}{3}$时，则 $\beta+\gamma=2\pi-\alpha\geqslant\frac{5\pi}{3}$，而 $0<\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$，于是$\frac{5\pi}{6}\leqslant\gamma\leqslant\pi$，从而$\frac{2\pi}{3}\leqslant\beta\leqslant\pi$，故$\frac{5\pi}{3}\leqslant\beta+\gamma\leqslant 2\pi$，$0\leqslant\gamma-\beta\leqslant\frac{\pi}{3}$，即

$$\begin{cases}\dfrac{5\pi}{12}\leqslant\dfrac{\beta+\gamma}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{2},\\[2mm] 0\leqslant\dfrac{\gamma-\beta}{4}\leqslant\dfrac{\pi}{12}.\end{cases}\tag{1}$$

由余弦定理及引理 1 知

$$\begin{aligned}d(A_1,A_2)&=\sqrt{d^2(A_1,A_4)+d^2(A_2,A_4)-2d(A_1,A_4)d(A_2,A_4)\cos\gamma}\\&\geqslant\sqrt{2\left(1-\cos\frac{\gamma}{2}\right)}=2\sin\frac{\gamma}{2}.\end{aligned}$$

同理有 $d(A_1,A_3)\geqslant 2\sin\frac{\beta}{2}$. 所以

$$d(A_1,A_2)+d(A_1,A_3)\geqslant 2\left(\sin\frac{\gamma}{2}+\sin\frac{\beta}{2}\right)=4\sin\frac{\beta+\gamma}{4}\cos\frac{\beta-\gamma}{4}.\tag{2}$$

由 $\sin x$ 与 $\cos x$ 在$\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$上的单调性及(1)，(2)式知

$$d(A_1,A_2)+d(A_1,A_3)\geqslant 4\sin\frac{5\pi}{12}\cos\frac{\pi}{12}=2+\sqrt{3}.$$

故

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)\geqslant 2+\sqrt{3}+d(A_2,A_3)\geqslant 2+\sqrt{3}+1=3+\sqrt{3}.\tag{3}$$

根据引理 1 及(1)，(2)，(3)式知，等号取得当且仅当 $d(A_1,A_4)=d(A_2,A_4)=d(A_3,A_4)=d(A_2,A_3)=\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4} d(A_i,A_j)=1$，且 $\alpha=\frac{\pi}{3}$，$\beta=\frac{2\pi}{3}$，$\gamma=\pi$. 此时 A_4 恰在有一内角为$\frac{\pi}{3}$的 $\mathrm{Rt}\triangle A_1A_2A_3$ 斜边的中点上.

(2) 当$\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3}$时，$\alpha+\beta+\gamma=2\pi$，$0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$. 同上，由余弦定理及引理 1 知

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)\geqslant \sqrt{2(1-\cos\alpha)}+\sqrt{2(1-\cos\beta)}+\sqrt{2(1-\cos\gamma)}$$

$$=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right). \tag{4}$$

记(4)式的右端为 $f(\alpha,\beta,\gamma)$，则 $f(\alpha,\beta,\gamma)$定义在区域 D：

$$\frac{\pi}{3}\leqslant\alpha\leqslant\frac{2\pi}{3},0\leqslant\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi,\alpha+\beta+\gamma=2\pi.$$

显然 $f(\alpha,\beta,\gamma)=2\left(\sin\frac{\alpha}{2}+\sin\frac{\beta}{2}+\sin\frac{\gamma}{2}\right)$在区域 D 上连续，且对 α,β,γ 的各阶偏导都连续. 现求 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在区域 D 内的稳定点：

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial\alpha}=\cos\dfrac{\alpha}{2}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial\beta}=\cos\dfrac{\beta}{2}=0,\\[2mm] \dfrac{\partial f}{\partial\gamma}=\cos\dfrac{\gamma}{2}=0.\end{cases} \tag{5}$$

因 $0<\alpha,\beta,\gamma\leqslant\pi$，由(5)式知 $\alpha=\beta=\gamma=\pi$. 但点(π,π,π)不在 D 内(因 $\alpha+\beta+\gamma=2\pi$)，故 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在 D 内无稳定点. 又 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在 D 内偏导连续，所以 $f(\alpha,\beta,\gamma)$只能在 D 的边界∂D 上取得最小值. 因此我们只要考虑边界$\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2$(这里$\partial D_1$：$\alpha=\frac{\pi}{3},\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi,\alpha+\beta+\gamma=2\pi$；$\partial D_2$：$\alpha=\frac{2\pi}{3},\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi,\alpha+\beta+\gamma=2\pi$)上的函数值.

在∂D_2 上，因 $\alpha=\frac{2\pi}{3},\alpha\leqslant\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi,\alpha+\beta+\gamma=2\pi$，所以 $2\pi=\alpha+\beta+\gamma\geqslant3\alpha=3\cdot\frac{2\pi}{3}=2\pi$. 故此时必须 $\alpha=\beta=\gamma=\frac{2\pi}{3}$，即在边界$\partial D_2$ 上实际只有一点$\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)$，而 $f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right)=3\sqrt{3}$.

在∂D_1 上，$\alpha=\frac{\pi}{3},\beta+\gamma=2\pi-\alpha=\frac{5\pi}{3},\beta\leqslant\gamma\leqslant\pi$，于是$\frac{5\pi}{6}\leqslant\gamma\leqslant\pi$. 因 $\beta=\frac{5\pi}{3}-\gamma$，所以 $f(\alpha,\beta,\gamma)=\left(\frac{\pi}{3},\frac{5\pi}{3}-\gamma,\gamma\right)=2\left[\sin\frac{\pi}{6}+\sin\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)+\sin\frac{\gamma}{2}\right]\overset{\text{def}}{=\!=}g(\gamma)$. 故 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在∂D_1 上的最小值即是 $g(\gamma)$在$\frac{5\pi}{6}\leqslant\gamma\leqslant\pi$ 上的最小值.

因在$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$上 $g'(\gamma)=\cos\frac{\gamma}{2}-\cos\left(\frac{5\pi}{6}-\frac{\gamma}{2}\right)=0$ 的唯一解是 $\gamma=\frac{5\pi}{6}$，而 $g'(\pi)<0$，故在$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$上 $g'(\gamma)\leqslant0$，即 $g(\gamma)$在$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$上单调减，故 $g(\gamma)$在$\left[\frac{5\pi}{6},\pi\right]$上的最小值为 $g(\pi)=3+\sqrt{3}$. 此时 $\alpha=\frac{\pi}{3},\beta=\frac{2\pi}{3},\gamma=\pi$.

总之，$f(\alpha,\beta,\gamma)$在$\partial D_1\cup\partial D_2$ 上的最小值为

$$\min\left\{f\left(\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\frac{2\pi}{3}\right),f\left(\frac{\pi}{3},\frac{2\pi}{3},\pi\right)\right\}=3+\sqrt{3},$$

所以 $f(\alpha,\beta,\gamma)$在 D 上的最小值为 $3+\sqrt{3}$.

由(4)式知

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)\geqslant f(\alpha,\beta,\gamma)\geqslant 3+\sqrt{3}.$$

综合(1)与(2),命题获证.

引理 3　若在凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中, $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 4} d(A_i,A_j)=1$,则其对角线和 $d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)\geqslant 1+\sqrt{3}$,等号取得当且仅当凸四边形是有一内角为$\frac{\pi}{3}$的菱形.

此引理的证明同定理 3 的证明中(3)的情形. 略.

引理 4　若凸五边形各边长$\geqslant 1$,则其对角线长之和$>4+2\sqrt{3}$,且 $4+2\sqrt{3}$为最大下界.

证明　如图 1-4 所示. 记凸五边形的对角线长之和为 σ,各边长分别为 a_1,a_2,a_3,a_4,a_5. 由余弦定理得

$$\begin{aligned}\sigma&=d(A_5,A_2)+d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)+d(A_3,A_5)+d(A_4,A_1)\\&=\sqrt{a_5^2+a_1^2-2a_5a_1\cos\theta_1}+\sqrt{a_1^2+a_2^2-2a_1a_2\cos\theta_2}+\sqrt{a_2^2+a_3^2-2a_2a_3\cos\theta_3}\\&\quad+\sqrt{a_3^2+a_4^2-2a_3a_4\cos\theta_4}+\sqrt{a_4^2+a_5^2-2a_4a_5\cos\theta_5}.\end{aligned}$$

不妨设$\max\limits_{1\leqslant i\leqslant 5}\theta_i=\theta_1$,因 $\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi$,所以$\frac{3\pi}{5}\leqslant\theta_1<\pi$. σ 是关于 $\theta_i(i=1,2,\cdots,5)$的多元函数,现要证在区域 D: $\frac{3\pi}{5}\leqslant\theta_1<\pi$, $\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi,0<\theta_i\leqslant\theta_1(2\leqslant i\leqslant 5)$中有 $\sigma>4+2\sqrt{3}$. 由 $0<\theta_i<\pi$ 知 σ 在 D 内可微,先求 σ 在 D 内的稳定点.

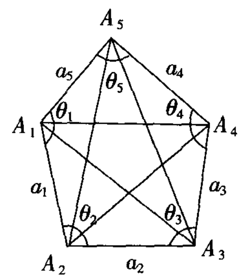


图 1-4

令 $\frac{\partial\sigma}{\partial\theta_1}=0$, 得 $\frac{a_5a_1\sin\theta_1}{\sqrt{a_5^2+a_1^2-2a_5a_1\cos\theta_1}}=0$, 于是 $\sin\theta_1=0$.

而 $0<\theta_1<\pi$,故此方程在 D 内无解. 同理,方程$\frac{\partial\sigma}{\partial\theta_i}=0(i=2,3,4,5)$在 D 内也无解. 因此 σ 在 D 内无稳定点. 故 σ 在 D 内的最小值只能在其边界∂D 上获得.

现考虑 σ 在∂D 上函数值的变化情况. $\partial D=\partial D_1\cup\partial D_2$,其中$\partial D_1:\theta_1=\frac{3\pi}{5}$, $\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi,0<\theta_i\leqslant\theta_1(2\leqslant i\leqslant 5)$;$\partial D_2:\theta_1=\pi,\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i=3\pi,0<\theta_i\leqslant\theta_1(2\leqslant i\leqslant 5)$.

在∂D_1 上,因 $3\pi=\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i\leqslant 5\theta_1=3\pi$,故 $\theta_i=\theta_1=\frac{3\pi}{5}(i=2,3,4,5)$,即边界$\partial D_1$ 实

际上只有一点$\left(\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5},\frac{3\pi}{5}\right)$. 故由引理 1 的证明知

$$\sigma \geqslant (\sqrt{a_5a_1}+\sqrt{a_1a_2}+\sqrt{a_2a_3}+\sqrt{a_3a_4}+\sqrt{a_4a_5})\sqrt{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)}$$

$$\geqslant 5\sqrt{2\left(1-\cos\frac{3\pi}{5}\right)} = 10\sin\frac{3\pi}{10} > 4+2\sqrt{3}.$$

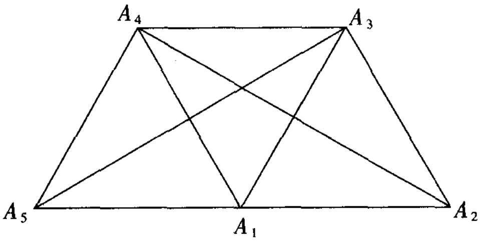


图 1-5

在∂D_2 上，因 $3\pi=\sum\limits_{i=1}^{5}\theta_i$，$\theta_1=\pi$，故得 $\theta_2+\theta_3+\theta_4+\theta_5=2\pi$. 此时图 1-4 退化为图 1-5，即 A_1 在凸四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 边上. 由于$d(A_2,A_5)\geqslant 2$，在凸四边形 $A_1A_3A_4A_5$ 中，由引理 3 知

$$d(A_1,A_4)+d(A_3,A_5)>1+\sqrt{3}.$$

同理在凸四边形 $A_1A_2A_3A_4$ 中有

$$d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)>1+\sqrt{3}.$$

故 $\sigma\geqslant d(A_2,A_5)+2(1+\sqrt{3})\geqslant 4+2\sqrt{3}$. 等号取得当且仅当 $a_i=1(i=1,2,\cdots,5)$，且 $\theta_1=\pi$，$\theta_2=\theta_5=\frac{\pi}{3}$，$\theta_3=\theta_4=\frac{2\pi}{3}$. 其图形由 3 个正三角形拼成.

总之，边界∂D 上总有 $\sigma\geqslant 4+2\sqrt{3}$. 因 σ 的最小值只能在∂D 上取得，故在 D 上总有 $\sigma\geqslant 4+2\sqrt{3}$. 而等号取得当且仅当在$\partial D_2$ 上，但∂D_2 不在 D 上，即总有 $\sigma>4+2\sqrt{3}$. 又 σ 在 $D\cup\partial D$ 上连续，故 $4+2\sqrt{3}$是 σ 在 D 内的最大下界. 证毕.

定理 4 的证明 为方便计，不妨设平面中 5 个不同点 A_1,A_2,A_3,A_4,A_5 中 $\min\limits_{1\leqslant i\neq j\leqslant 5} d(A_i,A_j)=1$. 平面中 5 点只有以下 4 种可能：(1) 至少有四点在同一直线上；(2) 有两点在另外三点为顶点的三角形内或边上且无四点共线；(3) 五点中有一点在另外四点为顶点的凸形内或其边上；(4) 五点为一凸形的顶点. 我们将逐一证明这 5 种情况下都有 $\mu(2,5)\geqslant 9+2\sqrt{3}$.

(1) 不妨设 A_1,A_2,A_3,A_4 在一条直线上，所以 $\sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j)\geqslant 10$，因此

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} d(A_i,A_j)=\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j)+\sum_{i=1}^{4} d(A_i,A_5)\geqslant 10+4>9+2\sqrt{3}.$$

此时 $\mu(2,5)>9+2\sqrt{3}$.

(2) 此时可分为有三点共线与无三点共线来处理.

若无三点共线，则有两点在另外三点为顶点的三角形内，不妨设为如图 1-6 的情形. 因 A_5 在$\triangle A_2A_3A_4$ 内，A_4 在$\triangle A_1A_2A_5$ 内，由引理 2 知

$$\sum_{i,j\neq 1,5} d(A_i,A_j)+\sum_{i,j\neq 3,4} d(A_i,A_j)\geqslant (3+\sqrt{3})+(3+\sqrt{3}).$$

故

$$\begin{aligned}\mu(2,5) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} d(A_i,A_j) \\ &= \sum_{i,j\neq 1,5} d(A_i,A_j) + \sum_{i,j\neq 3,4} d(A_i,A_j) + d(A_1,A_3) + d(A_1,A_4) \\ &\quad + d(A_4,A_5) + d(A_3,A_5) \\ &\geqslant 2(3+\sqrt{3}) + 4 = 9 + 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

若有三点共线但无四点共线且有两点在另外三点为顶点的三角形内或其边上，可分如下几种情形来考虑：

① A_4,A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 内，且 A_4,A_5 与一个顶点同在一直线上. 不妨设为如图 1-7 所示情形.

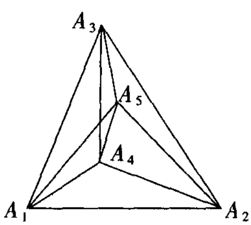


图 1-6

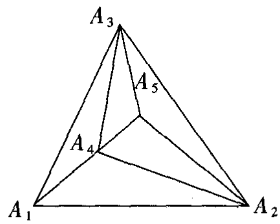


图 1-7

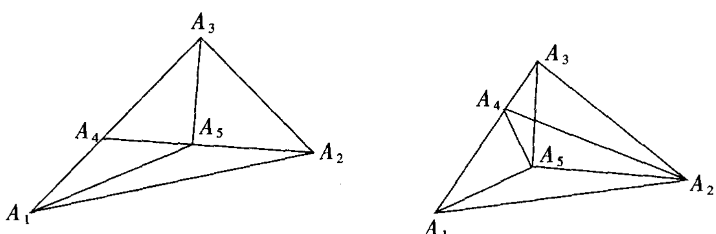
因 $d(A_1,A_5)\geqslant 2$，A_5 在$\triangle A_2A_3A_4$ 内，由引理 2 得

$$\sum_{2\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j) \geqslant 3+\sqrt{3}.$$

故

$$\begin{aligned}\mu(2,5) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} d(A_i,A_j) \\ &= d(A_1,A_5) + \sum_{2\leqslant i<j\leqslant 4} d(A_i,A_j) + \sum_{i=2}^{4} d(A_i,A_5) + \sum_{i=2}^{4} d(A_i,A_1) \\ &\geqslant 2 + (3+\sqrt{3}) + 3 + 3 > 9 + 2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

② A_4,A_5 两点分别在$\triangle A_1A_2A_3$ 的边上及内部. 此时有两种情形，如图 1-8 所示.



(a)　　(b)

图 1-8

在图 1-8(a)中，同情形①可证. 因点 A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 内，由引理 2 知

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j) \geqslant 3+\sqrt{3}.$$

又 $d(A_2,A_4)\geqslant 2$. 故有

$$\begin{aligned}\mu(2,5) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} d(A_i,A_j)\\ &\geqslant d(A_2,A_4)+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant 3} d(A_i,A_j)+6\min_{1\leqslant i<j\leqslant 5} d(A_i,A_j)\\ &\geqslant 2+(3+\sqrt{3})+6>9+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

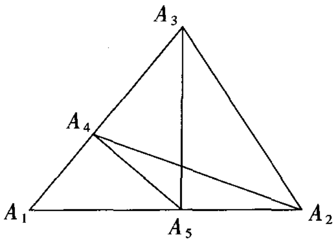


图 1-9

在图 1-8(b)中,同样 A_5 在$\triangle A_1A_2A_4$ 内,由引理 2 得 $\sum_{i,j\neq 3,5} d(A_i,A_j)\geqslant 3+\sqrt{3}$. 而 $d(A_1,A_3)\geqslant 2$. 故同理有 $\mu(2,5)>9+2\sqrt{3}$.

③ A_4, A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 不同的边上. 不妨设为如图 1-9所示情形.

因 $d(A_1,A_2)\geqslant 2$, $d(A_1,A_3)\geqslant 2$, 在凸四边形 $A_2A_3A_4A_5$ 中, 由引理 3 知对角线长之和

$$d(A_2,A_4)+d(A_3,A_5)\geqslant 1+\sqrt{3}.$$

故

$$\begin{aligned}\mu(2,5) &= \sum_{1\leqslant i<j\leqslant 5} d(A_i,A_j)\\ &\geqslant d(A_1,A_2)+d(A_1,A_3)+d(A_2,A_4)+d(A_3,A_5)+6\min_{1\leqslant i\neq j\leqslant 5} d(A_i,A_j)\\ &\geqslant 2+2+(1+\sqrt{3})+6>9+2\sqrt{3}.\end{aligned}$$

至此,我们已证在(2)情形下有 $\mu(2,5)\geqslant 9+2\sqrt{3}$.

(3) 此时可分如下 3 种情况证明.

① 一点在另外四点为顶点的凸形的某对角线上,则它可分为如图 1-10(a),(b)两种情形.

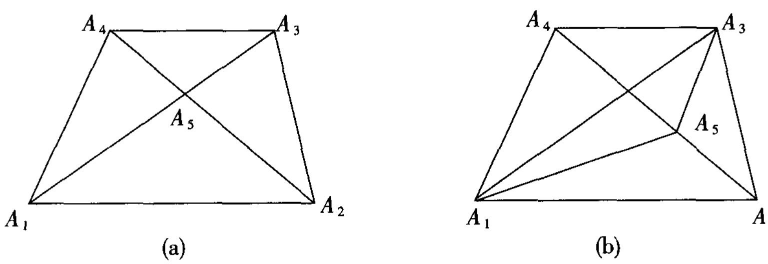


图 1-10

在图 1-10(a)情形中,点 A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 的边上;在图 1-10(b)情形中,A_5 在$\triangle A_1A_2A_3$ 内(如点 A_5 在$\triangle A_1A_3A_4$ 内同理可证). 故由引理 2,总有