概率论与数理统计

陈内萍　罗智明　主　编
姚落根　杨　刚　胡桔州　副主编

清华大学出版社
http://www.tup.tsinghua.edu.cn
北京交通大学出版社
http://press.bjtu.edu.cn

概率论与数理统计

陈内萍　罗智明　主　编
姚落根　杨　刚　胡桔州　副主编

清 华 大 学 出 版 社
北京交通大学出版社
·北京·

内容简介

本书以适应概率统计教学为宗旨，系统地阐述了概率论与数理统计的基本理论、基本知识和基本方法. 本书系统性强，结构严谨，布局合理，概念清晰. 全书共 9 章，内容包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机向量、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理、参数估计、假设检验、方差分析和回归分析等.

本书体系完善，内容丰富，实例较多，能够适应概率统计的教学需要，可作为高等院校非数学专业本科学生的概率论与数理统计教材或教学参考书，也可供高职高专、自学考试的学生及从事数学和统计工作的实际工作者作为参考书籍.

图书在版编目（CIP）数据

概率论与数理统计/陈内萍，罗智明主编. —北京：清华大学出版社；北京交通大学出版社，2007.6

ISBN 978－7－81123－113－7

Ⅰ. 概…　Ⅱ. ①陈…　②罗…　Ⅲ. ①概率论 ②数理统计　Ⅳ. O21

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 077790 号

责任编辑：周益丹
出版发行：清华大学出版社　邮编：100084　电话：010－62776969
　　　　　北京交通大学出版社　邮编：100044　电话：010－51686414
印 刷 者：北京鑫海金澳胶印有限公司
经　　销：全国新华书店
开　　本：185×260　印张：11.75　字数：280 千字
版　　次：2007 年 6 月第 1 版　2007 年 6 月第 1 次印刷
书　　号：ISBN 978－7－81123－113－7/O·47
印　　数：1～6 000 册　定价：19.00 元

本书如有质量问题，请向北京交通大学出版社质监组反映. 对您的意见和批评，我们表示欢迎和感谢.
投诉电话：010－51686043，51686008；传真：010－62225406；E-mail：press@bjtu.edu.cn.

前　言

概率论与数理统计是研究随机现象规律的一门学科，是高等学校经济学、管理学、统计学、工学等各专业本科阶段开设的一门必修的数学课程. 由于随机现象的普遍存在性、研究方法的独特性和教学内容的实用性，这门课越来越受到人们的重视. 在科技高速发展的今天，概率论的理论和数理统计的方法已渗透到许多学科领域，它的应用日益广泛，成为数学在实际应用中最活跃的学科之一.

本书为高等院校非数学专业，特别是为财经类院校概率论与数理统计本科教学编写，以系统性、科学性为原则，并以实际应用为目标. 教材力求结构严谨、布局合理、概念清晰、内容全面.

本书以实用为原则，内容体系整体优化，突出“用数学”能力的培养，使读者实现由知识向能力的转化.

本书以实际为背景，概念阐述简明，例题贴近生活，消除学生对数学的陌生感、抽象感，激活学生的求知欲，增强学生学好数学、用好数学的信心.

为了方便读者自学，还提供了丰富的例题和习题，并配有习题答案.

第 1 章　随机事件及其概率. 主要阐述概率论的基本概念、概率的定义、概率计算的方法和公式（概率的加法公式、乘法公式、全概率公式和贝叶斯公式、贝努里公式）.

第 2 章　随机变量及其分布. 主要阐述随机变量的分布函数、离散型和连续型随机变量及其分布、几种重要的分布、随机变量函数的分布.

第 3 章　随机向量及其分布. 主要阐述二维随机向量及分布函数、二维离散型和连续型随机向量及其分布、随机向量函数的分布.

第 4 章　随机变量的数字特征. 主要阐述随机变量的数学期望、方差、协方差和相关系数等数字特征.

第 5 章　大数定律与中心极限定理. 主要阐述车贝谢夫不等式、车贝谢夫大数定理、贝努里大数定理、中心极限定理.

第 6 章　参数估计. 主要阐述数理统计的基本概念及常用分布、点估计的类型及评价标准、正态总体统计量的分布、正态总体下的区间估计.

第 7 章　假设检验. 主要阐述假设检验的基本概念及基本思想、正态总体下参数的假设检验、总体分布的假设检验.

第 8 章　方差分析. 主要阐述方差分析的基本概念、单因素方差分析、双因素方差分析.

第 9 章　回归分析. 主要阐述回归分析的基本思想、一元线性回归模型及相关性检验、预测与控制、非线性回归、二元线性回归.

本书由陈内萍、罗智明任主编，姚落根、杨刚、胡桔州任副主编. 其中陈内萍负责第 1 章和第 5 章的撰写工作，杨刚负责第 2 章和第 3 章的撰写工作，胡桔州负责第 4 章的撰

写工作，姚落根负责第6章~第9章的撰写工作，陈内萍总纂全书. 在书的成稿过程中得到了湖南商学院数学教研室全体老师的大力支持，特别是段玉副教授为本书提出了许多宝贵的意见，在此特表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免有不足之处，恳请广大读者批评指正.

编　者

2007年6月

目　　录

第 1 章　随机事件及其概率

1.1　随 机 事 件

1.1.1　随机现象

通常，人们观察到的现象可归结为两类．一类是可以事前预言的只有一个结果，这一类现象称为确定性现象或必然现象．例如，重物在高处总是垂直落到地面；在标准大气压下，水在 100℃时会沸腾等．另一类现象是事前不可准确预言的，并不总是出现相同结果．这一类现象称为随机现象．例如，抛掷一个均匀对称的硬币，结果可能是正面向上或背面向上；新生的婴儿可能是男或女；一天内进入某商场的人数；某种型号电视机的寿命．

是不是这些随机现象都没有什么规律可寻呢？人们通过反复观察和实践发现，在相同条件下进行大量观测时，随机现象可呈现某种规律，也即随机现象具有统计规律性．概率论与数理统计就是研究随机现象统计规律的一门数学学科．

1.1.2　随机事件

把对自然现象进行观察或进行一次科学试验，统称为一个**试验**．如果这个试验在相同条件下可以重复进行，而且每次试验的结果事前不可预言，但事先可以知道试验的一切可能结果，就称它为一个**随机试验**．

在随机试验中，可能出现也可能不出现的结果称为随机事件，简称为事件．一般用字母 $A,B,C,\cdots$ 表示事件．

【例 1.1】　在 $0,1,2,\cdots,9$ 十个数字中任意选取一个，可有十种不同的结果：$A_i=\{$取得一个数是 $i\}$ $(i=0,1,2,\cdots,9)$，A_i 是随机事件．但还有其他可能的结果：$C=\{$取得一个是奇数$\}$，$D=\{$取得一个是大于4 的数$\}$，$E=\{$取得一个数是3 的倍数$\}$．C,D,E 也是随机事件．

不可能再分的事件称为**基本事件**．在例 1.1 中，A_i 都是基本事件．由若干基本事件组合而成的事件称为复合事件．例如，E 是一个复合事件，它由“取得一个数是 3”、“取得一个数是 6”、“取得一个数是 9” 三个基本事件组合而成．

在一定条件下必然发生的事件称为**必然事件**（用 Ω 表示）；在一定条件下必然不发生的事件称为不可能事件（用 $\varnothing$ 表示）．

1.1.3　样本空间

对于随机试验的每一基本事件，用只包含一个元素 ω 的单点集 $\{\omega\}$ 表示；由若干基本事件组成的复合事件，则用包含若干个元素的集合表示；由所有基本事件对应的全部元素组成

的集合,称为**样本空间**.

由于任一随机试验的结果必然出现全部基本事件之一,因此样本空间是必然事件. 样本空间仍以 Ω 表示. 样本空间中的每一个元素称为**样本点**.

【例 1.2】 下面给出某些随机现象的样本空间.

(1) 抛一枚硬币的样本空间为:$\Omega_1 = \{\omega_1;\omega_2\}$,其中 ω_1 表示正面朝上,ω_2 表示反面朝上.

(2) 掷一颗骰子的样本空间为:$\Omega_2 = \{\omega_1,\omega_2,\cdots,\omega_6\}$,其中 ω_i 表示出现 i 点,$i = 1,2,\cdots,6$. 也可更直接明了地记此样本空间为: $\Omega_2 = \{1,2,\cdots,6\}$.

(3) 一天内进入某商场的顾客数的样本空间为: $\Omega_3 = \{0,1,2,\cdots,50,\cdots,10^4,\cdots\}$,其中“0” 表示“一天内无人光顾此商场”,而“$10^4$” 表示“一天内有 1 万人光顾此商场”. 虽然这两种情况很少发生,但无法肯定说这两种情况不发生,甚至于不能确切地说出一天内进入该商场的最多人数,所以该样本空间用非负整数集表示,既不脱离实际情况,又合理抽象,便于数学上的处理.

(4) 电视机寿命的样本空间为: $\Omega_4 = \{t:t \geqslant 0\}$.

(5) 测量误差的样本空间为: $\Omega_5 = \{x: -\infty < x < +\infty\}$.

需要注意的是:

① 样本空间中的元素可以是数也可以不是数;

② 样本空间至少有两个样本点,仅含两个样本点的样本空间是简单的样本空间;

③ 从样本空间含有样本点的个数来区分,样本空间可分为有限与无限两类. 譬如以上样本空间 Ω_1 和 Ω_2 中样本点的个数为有限个,而 Ω_3、Ω_4 及 Ω_5 中样本点的个数为无限个. 但 Ω_3 中样本点的个数为可列个,而 Ω_4 和 Ω_5 中的元素个数为不可列无限个. 在以后的数学处理上往往将样本点的个数为有限个或可列个的情况归为一类,称为离散样本空间. 而将样本点的个数为不可列无限个的情况归为另一类,称为连续样本空间.

1.1.4 事件的关系与运算

(1) 包含关系

如果事件 A 发生必然导致事件 B 发生,则称事件 A 含于事件 B,或称事件 B 包含事件 A,记为 $A \subset B$.

在例 1.1 中,{取得一数为 4 的倍数} $\subset$ {取得一数为偶数}.

显然,对任一事件 A,有 $\varnothing \subset A \subset \Omega$.

$A \subset B$ 也可说成: 如果事件 B 不发生,则事件 A 必然不发生.

(2) 相等关系

如果 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,则称 A 与 B 相等,记为 $A = B$.

(3) 互不相容事件

如果两个事件 A 与 B 不可能同时发生,则称事件 A 与 B 互不相容. 例如 Ω 与 $\varnothing$ 是互不相容的,例 1.1 中的 A_1 与 A_2 是互不相容的.

如果 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 中的任意两个事件是互不相容的,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 两两互不相容.

(4) 事件 A 与 B 的并(和)

$A+B$ 表示“事件 A 与 B 中至少有一个发生”.

例如,{取出一数为 1} + {取出一数为 2} = {取出一数为 1 或 2}.

(5) 事件 A 与 B 的积

AB 表示“事件 A 与 B 同时发生”.

例如,{取得一数为 2 或 8}{取得一数为 2} = {取得一数为 2}.

① 对任一事件 A,有 $A\Omega=A, A\varnothing=\varnothing$;

② 若 A_1 与 A_2 互不相容,则 $A_1A_2=\varnothing$.

(6) 事件 A 与 B 之差

$A-B$ 表示“事件 A 发生而事件 B 不发生”. 例如,{取得一个数为 2 或 4} − {取得一个数为 2} = {取得一个数为 4}. 显然,对任意事件 A

$$A-A=\varnothing, A-\varnothing=A, A-\Omega=\varnothing$$

(7) 事件的逆

Ω 与 A 之差 $\Omega-A$ 称为 A 的逆事件,记为 $\overline{A}$. 它表示“A 不发生”这一事件,$\overline{A}$ 也称为 A 的对立事件,$\overline{\overline{A}}=A$. 显然

$$A+\overline{A}=\Omega, A\overline{A}=\varnothing$$

事件的和与事件的积都可以推广到有限多个的情况. 即

$$A=\sum_{i=1}^{n}A_i \text{ 表示“}A_1,A_2,\cdots,A_n \text{ 中至少有一事件发生”}$$

$$B=\prod_{i=1}^{n}B_i \text{ 表示“}B_1,B_2,\cdots,B_n \text{ 同时发生”}$$

(8) 完备事件组

若事件 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为两两互不相容事件,即 $A_iA_j=\varnothing \quad (i\neq j, i,j=1,2,\cdots,n)$,且 $A_1+A_2+\cdots+A_n=\Omega$,则称 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 构成一个完备事件组.

可以验证如下关系式成立:

① 交换律　$A+B=B+A, AB=BA$

② 结合律　$A+(B+C)=(A+B)+C$

　　　　　$A(BC)=(AB)C$

③ 分配律　$A(B+C)=(AB)+(AC)$

　　　　　$A+(BC)=(A+B)(A+C)$

④ $A-B=A\overline{B}$

⑤ 对偶律　$\overline{A+B}=\overline{A}\,\overline{B}, \overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$

这些关系可推广到有限个或可列无穷个的情形.

集合论的知识也可用于解释事件,如表 1-1 所示.

表 1-1

符号	集合论	概率论
Ω	空间	样本空间,必然事件
$\varnothing$	空集	不可能事件

续表

符号	集合论	概率论
$\omega \in \Omega$	Ω 中的点(或称元素)	样本点
$\{\omega\}$	单点集	基本事件
$A \subset \Omega$	Ω 的子集 A	事件 A
$A \subset B$	集合 A 包含在集中 B 中	事件 A 含于事件 B
$A = B$	集合 A 与 B 相等(或等价)	事件 A 与 B 相等(或等价)
$A + B$	集合 A 与 B 之和(或并)	事件 A 与 B 至少有一个发生(事件 A 与 B 之和或并)
AB	集合 A 与 B 之积(或交)	事件 A 与 B 同时发生(事件 A 与 B 之积或交)
$\overline{A}$	集合 A 之余集	事件 A 的逆事件
$A - B$	集合 A 与 B 之差	事件 A 发生而事件 B 不发生(事件 A 与 B 之差)
$AB = \varnothing$	集合 A 与 B 没有公共元素	事件 A 与 B 互不相容

【例 1.3】 掷一颗骰子的试验,观察出现的点数:$A = \{$奇数点$\}$,$B = \{$点数小于 5$\}$,$C = \{$小于 5 的偶数点$\}$. 用集合列举法表示下列事件:$\Omega, A, B, C, A + B, A - B, AB, AC, C - A, \overline{A} + B$.

解 $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$,$A = \{1,3,5\}$

$B = \{1,2,3,4\}$,$C = \{2,4\}$,$A + B = \{1,2,3,4,5\}$,$A - B = \{5\}$

$AB = \{1,3\}$,$C - A = \{2,4\}$,$AC = \varnothing$,$\overline{A} + B = \{1,2,3,4,6\}$

【例 1.4】 向指定的目标射三枪,以 A_1, A_2, A_3 分别表示事件"第一、二、三枪击中目标". 试用 A_1, A_2, A_3 表达以下事件:

(1) 只击中第一枪;

(2) 只击中一枪;

(3) 三枪都未击中;

(4) 至少击中一枪;

(5) 最多击中一枪.

解 (1) $A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3}$

(2) $A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3$

(3) $\overline{A_1}\, \overline{A_2}\, \overline{A_3}$

(4) $A_1 + A_2 + A_3$ 或 $A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3 + A_1 A_2 \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2} A_3 + \overline{A_1} A_2 A_3 + A_1 A_2 A_3$

(5) $\overline{A_1}\, \overline{A_2} + \overline{A_1}\, \overline{A_3} + \overline{A_2}\, \overline{A_3}$ 或 $\overline{A_1}\, \overline{A_2}\, \overline{A_3} + A_1 \overline{A_2}\, \overline{A_3} + \overline{A_1} A_2 \overline{A_3} + \overline{A_1}\, \overline{A_2} A_3$

【例 1.5】 如果 x 表示一个沿数轴随机运动的质点的位置,试说明下列各事件的关系.

$A = \{x: x \leqslant 10\}$,$B = \{x: x > 3\}$,

$C = \{x: x < 8\}$,$D = \{x: x < -3\}$,

$E = \{x: x \geqslant 8\}$

解 在数轴上作出相应于事件的图,即可推知

(1) $A \supset C \supset D$,$B \supset E$;

(2) D 与 B,D 与 E 互不相容;

(3) C 与 E 为对立事件;

(4) B 与 C,B 与 A,E 与 A 相容.

1.2　概　　率

概率论研究的是随机现象量的规律,因此仅仅知道试验中可能出现哪些事件是不够的,还必须对事件发生的情况进行量的描述,如事件发生的可能性大小的问题.

把刻划事件发生可能性大小的数量指标称为**事件的概率**. 事件 A 的概率以 $P(A)$ 表示,并且规定 $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$.

1.2.1　统计概率

先看两个具体问题.

【例 1.6】　考虑某种子的发芽率,从一大批种子中抽取 10 批种子做发芽试验,其结果列于表 1-2.

表 1-2

种子粒数	2	5	10	70	130	310	700	1500	2000	3000
发芽粒数	2	4	9	60	116	282	639	1339	1806	2715
发芽率	1	0.8	0.9	0.857	0.892	0.910	0.913	0.893	0.903	0.905

从表 1-2 中可以看出,发芽率在 0.9 附近摆动.

【例 1.7】　历史上几位数学家抛掷硬币的试验结果列于表 1-3.

表 1-3

试验者	抛掷次数(n)	正面出现次数(m)	正面出现频率(m/n)
摩尔根	2048	1061	0.518
蒲　丰	4040	2048	0.5069
皮尔逊	12000	6019	0.5069
皮尔逊	24000	12012	0.5005
维　尼	30000	14994	0.49998

由表 1-3 可知,出现正面的频率接近 0.5,并且抛的次数越多,频率越接近 0.5.

从上面例子可以看到,它们具有如下特点:当考虑事件 A 发生的可能性大小时,只要在同一条件组下做大量的重复试验,事件 A 发生的次数与试验的总次数之比(即 A 发生的频率)就呈现某种稳定现象. 当试验的次数增加时,A 发生的频率总是稳定于某一常数 p 附近,即频率具有稳定性,这个常数 p 称为频率的稳定中心.

定义 1.1　设在同一条件下进行了 n 次试验,事件 A 发生了 m 次,则事件 A 发生的频率

$$f(A) = \frac{m}{n}$$

称$f(A)$ 的稳定中心 p 为事件 A 的统计概率,即 $P(A) = p$.

这种确定概率的方法称为概率的频率方法. 在现实世界中,人们无法把一个试验无限次地重复下去,因此要精确获得频率的稳定值是困难的,但频率方法提供了概率的一个可供想像的具体值,并且在试验次数较多时可用频率给出概率的近似值,这一点是频率方法最有价值的地方. 在统计学中就是如此做的,且称频率为概率的估计值.

例如,一个射手射击1 000次,中靶600次,就说他中靶的概率为0.6;新生儿10 000人中死亡2人,就说其死亡的概率为万分之二.

1.2.2 古典概率

直接计算某一事件的概率有时是非常困难的,甚至是不可能的. 请看试验: 掷一颗质地均匀的骰子,观察出现的点数. 在这个试验中显然有:

(1) 所有可能的试验结果是有限个(有限性);

(2) 每个可能结果在一次试验中出现的可能性相同(等可能性).

把具有这两个特点的试验称为古典概型试验. 在古典概型试验中,假定能知道有利于某一事件 A 的基本事件数,那么就可以通过这个数与试验基本事件总数之比计算出概率$P(A)$.

定义 1.2 对于某一随机试验,如果它的全体基本事件 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 是有限的,且具有等可能性,而事件 A 由其中某 k 个基本事件组成,则称事件 A 的概率 $P(A)$ 为

$$P(A) = \frac{\text{事件}A\text{包含的基本事件数}(k)}{\text{基本事件总数}(n)} = \frac{k}{n}$$

把它称为古典概率. 这里 $E_1, E_2, \cdots, E_n$ 构成一个等概完备事件组.

【例 1.8】 一个口袋装有4个白球和2个红球,从中任抽二个,抽球方式分下面3种情况: (1) 第一次取球后再放回袋中,第二次再取一球,这种情况称为有放回抽样;(2) 第一次取球后不放回袋中,第二次再取一球,这种情况称为不放回抽样;(3) 一次抽球两个,此情况称为一次性抽样. 试根据上面3种情况分别求取到两个球都是白色球的概率和取到的两个球为异色球的概率.

解 设样本空间为 Ω,A 为取到的两个球都是白球的事件,B 为取到两个异色球的事件.

(1) 放回抽样

第一次袋中有6个球可供抽取,第二次也有6个球可供抽取,由组合法的乘法原理,共有$C_6^1C_6^1$种取法,每种取法是一个基本事件,所以Ω中基本事件总数为6×6个. 又由于第一次与第二次均有4个白球可供抽取,故 A 中所含基本事件个数为 $C_4^1C_4^1$. 于是

$$P(A) = \frac{C_4^1C_4^1}{C_6^1C_6^1} = \frac{4 \times 4}{6 \times 6} = 0.444$$

同理,事件 B 所含基本事件个数为 $C_4^1C_2^1 + C_2^1C_4^1$ 个,则

$$P(B) = \frac{C_4^1C_2^1 + C_4^1C_2^1}{C_6^1C_6^1} = \frac{16}{6 \times 6} = 0.444$$

(2) 不放回抽样

第一次取出一球后不放回,故Ω中基本事件总数为$C_6^1C_5^1$个,A与B中所含本事件个数分

别为 $C_4^1C_3^1$ 与 $2C_4^1C_2^1$,故

$$P(A)=\frac{C_4^1C_3^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{4\times3}{6\times5}=0.4$$

$$P(B)=\frac{2C_4^1C_2^1}{C_6^1C_5^1}=\frac{2\times4\times2}{6\times5}=0.533$$

(3) 一次性抽样

从6个球中任抽两个,故 Ω 中基本事件总数为 C_6^2,A 中所含基本事件个数为 C_4^2 个. 而 B 中所含基本事件个数为 $C_4^1C_2^1$. 故

$$P(A)=\frac{C_4^2}{C_6^2}=\frac{\frac{4\times3}{2}}{\frac{6\times5}{2}}=\frac{4\times3}{6\times5}=0.4$$

$$P(B)=\frac{C_4^1C_2^1}{C_6^2}=\frac{4\times2}{\frac{4\times5}{2}}=\frac{16}{6\times5}=0.553$$

从上例可看出,后面两种抽样情况所求概率一致,说明这两种情况彼此有类同之处,所抽的球都不能重复.

【例1.9】 两封信随机地向4个邮筒投寄,求:

(1) 第二个邮筒恰好投入一封信的概率;

(2) 前两个邮筒各有一封信的概率.

解 (1) 设 $A=\{$第二个邮筒恰好投入一封信$\}$,两封信投入4个邮筒的投法有 $4^2=16$ 种,构成事件 A 的不同投法有 $C_2^1C_3^1=6$ 种,故

$$P(A)=\frac{C_2^1C_3^1}{4^2}=\frac{3}{8}$$

(2) 同理设 $B=\{$前两个邮筒各有一封信$\}$,前两个邮筒各有一封信的概率

$$P(B)=\frac{C_2^1}{4^2}=\frac{1}{8}$$

【例1.10】 随机地将15名财会班毕业生平均分配到3个贸易公司当会计,这15名学生中有3名是优秀生,问:(1) 每一个公司各分配到一名优秀生的概率 P_1 是多少?(2)3名优秀生分配在同一个公司的概率 P_2 是多少?

解 这15名学生平均分到3个公司中的方法总数

$$C_{15}^5C_{10}^5C_5^5=\frac{15!}{5!10!}\cdot\frac{10!}{5!5!}\cdot\frac{5!}{5!}=\frac{15!}{5!5!5!}$$

(1) 将3名优秀生平均分到每个公司,其分法共有3!种;对于每种分法,其余12名学生均分到3个公司中的分法共有 $C_{12}^4C_8^4C_4^4=\frac{12!}{4!4!4!}$ 种,因此每个公司各分配到一名优秀生的分法共有 $\frac{3!\times12!}{4!4!4!}$ 种,故

$$P_1=\frac{3!\times12!}{4!4!4!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{25}{91}=0.2747$$

(2) 将3名优秀生分配在同一个公司内的分法共有3种，对于每种分法，其余12名学生的分法(一个公司2名，另两个公司各5名)有 $C_{12}^{2}C_{10}^{5}C_{5}^{5}=\dfrac{12!}{2!5!5!}$ 种，因此3名优秀生分配在同一个公司的分法共有$\dfrac{3!\times 12!}{2!5!5!}$种，于是

$$P_2=\frac{3!\times 12!}{2!5!5!}\Big/\frac{15!}{5!5!5!}=\frac{6}{91}=0.0659$$

【例1.11】 n个旅客随机地分到N个房间中去($n\leqslant N$)，设每个房间可足够容纳n个旅客，求下列事件概率

(1) $A=\{$某指定n个房间各有1人$\}$;

(2) $B=\{$恰有n个房间各有1人$\}$;

(3) $C=\{$某指定房间有m个人$\}(m\leqslant n)$;

(4) $D=\{$某房间是空的$\}$.

解 n个旅客随机分到N个房间，共有N^n种分法，每种分法作为一个基本事件，故基本事件总数共有N^n个.

n个人分配到指定的n个房间其分法共有$n!$种分法；恰有n个房间各有一人共有$n!C_N^n$种分法；某指定房间有m人，即从n个人选取m个人分到某房间后，余下的$n-m$个人随机分到$N-1$个房间中去，故C中所含基本事件共有$C_n^m(N-1)^{n-m}$个；某房间是空的，即n个人随意分配到其余$N-1$个房间去住，共有$(N-1)^n$种分法. 故所求事件概率

$$P(A)=\frac{n!}{N^n}$$

$$P(B)=\frac{n!C_N^n}{N^n}$$

$$P(C)=\frac{C_n^m(N-1)^{n-m}}{N^n}$$

$$P(D)=\frac{(N-1)^n}{N^n}$$

上面介绍了两种计算随机事件概率的方法. 实际上，由于问题的不同及处理问题的角度不同，因此还有许多计算事件概率的方法. 但不管用什么方法计算概率，它们都要求具有下面3个基本性质.

(1) **非负性**　$O\leqslant P(A)\leqslant 1$

(2) **规范性**　$P(\Omega)=1, P(\varnothing)=0$

(3) **可加性**　若$A_i(i=1,2,\cdots)$是两两互不相容的事件，则$P(\sum\limits_{i=1}^{\infty}A_i)=\sum\limits_{i=1}^{\infty}P(A_i)$.

以上3个性质也称为概率的公理化定义.

1.3　概率的加法定理

为了计算复杂事件的概率，也为了揭露概率的本质，证明下面的定理.

定理1.1　若A与B为互不相容事件，即$AB=\varnothing$，则