实变函数论

SHIBIAN
HANSHU LUN

魏勇 · 编著

西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

实变函数论

实变函数论

魏　勇　编著

西南交通大学出版社
·成　都·

图书在版编目（CIP）数据

实变函数论/魏勇编著．一成都：西南交通大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-81104-696-0

Ⅰ．实… Ⅱ．魏… Ⅲ．函数－高等学校－教材 Ⅳ.0174

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 126206 号

实变函数论

魏　勇　编著

*

责任编辑　张宝华

封面设计　本格设计

西南交通大学出版社出版发行

（成都二环路北一段 111 号　邮政编码: 610031　发行部电话: 87600564）

http: //press.swjtu.edu.cn

四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸: 170 mm×230 mm　印张: 8.5

字数: 153 千字

2007 年 8 月第 1 版　2007 年 8 月第 1 次印刷

ISBN 978-7-81104-696-0

定价: 15.00 元

前　　言

作者于 1982 年开始上《实变函数论》辅导课，1986 年开始主讲《实变函数论》课程，先后采用过多种教材. 然而，学生都有一共同的感觉，就是《实变函数论》内容深奥难学，方法多变莫测，再加之扩招以后学生水平参差不齐，针对这一现实，结合师范院校学生的使命及特点，作者早就想写一本介于《实变函数论》教材和《数学思维方法论》之间的读物，以达既能系统传授《实变函数论》知识，又能以该学科知识为载体，还原数学家在当时知识背景下的原始创新过程，进而剖析定义的引入、方法的产生、定理的发现等过程的自然性，以展示数学创新思维方法参考书的目的.

本教材基于上述理念作了初步尝试. 如第一章在对无限集的势知之甚少时，利用了建立 1-1 对应比较其元素个数多少的方法，正如原始人在只能数 1，2 而无法数到 3 及以上时，只能将 3 个及以上统统称为“许多”的情况下，利用“你给我一个苹果我才给你一个梨子”的方法一样；又如第二章在中学“不包含任一端点的区间叫开区间，包含所有端点的区间叫闭区间”的概念基础上，首先将“端点”自然平移为一般集合的“边界点”，然后规定“不包含任一边界点的集合叫开集，包含所有边界点的集合叫闭集”；再如第三章既然研究测度理论的目的是将“体积”概念拓展到一般集合，自然的想法是将区间的测度直接规定为“体积”，由于开集可以表示成互不相交的区间之并，所以可以规定开集的测度就是这些区间的“体积”之和，对于不规则集合可以用与之接近的规则集合——开集的“体积”取而代之，为了保证取代值的确定性利用了下确界概念.

对于有些问题仅仅还原为原始创新过程是不够的，还必须随着研究的深入、新结果的发现而与时俱进. 如第四章在通过对传统 Riemann 积分弊病的剖析后，介绍了 Lebesgue 对症下药的新思路，进而得出结论：究竟哪些函数能保证形如 $E[b>f\geqslant a]$的集合是可以求测度的，成了问题的关键. 而 $E[b>f\geqslant a]=E[f\geqslant a]-E[f\geqslant b]$，所以问题又归结为研究哪些函数能保证形如 $E[f\geqslant a]$的集合可测. 随着对新积分性质的深入研究，发现 Lebesgue 积分的几何意义是函数图形与定义域所在“坐标平面”围成的上下方图形“体积”之代数和. 于是改变积分定义的关键就成了研究哪些函数的上下方图形可测，于是函数 f 可测可

以通过f上下方图形可测来定义，进而产生了第五章的积分新定义

$$\int_E f(x)\mathrm{d}x = mG_{(f^+,\ E)} - mG_{(f^-,\ E)}$$

当然必须要求$mG_{(f^+,\ E)}$，$mG_{(f^-,\ E)}$至少一个有限.

概念的产生尚且如此，定理结论的发现更是类似. 鲁津定理从形式上看很抽象，从证明过程看更是复杂冗长. 学生自然要问，这么复杂的东西，鲁津是如何想到的呢？作者采用合乎逻辑的推理、猜测、想象还原了鲁津定理被发现的背景：Dirichlet 函数在[0，1]上处处间断，然而，去掉[0，1]中的有理数集后能保证每点相对连续. 人们自然联想到对于一般的可测函数，尽管可能处处间断，然而，是否也可以去掉一个恰当的零测度集后相对连续呢？遗憾的是，这一猜测并未得到证明！于是退而求其次，得到了"对任意$\varepsilon>0$，存在可测集$F_\varepsilon \subseteq E$满足$m(E-F_\varepsilon)<\varepsilon$，$f$在$F_\varepsilon$上连续，根据可测集的构造，可以进一步要求$F_\varepsilon$为闭集". 这便是著名的鲁津定理. 鲁津定理的证明过程从方法论角度看也具有代表性. 先证与 Dirichlet 函数类似的简单函数的结论成立，然后，通过非负可测函数能表示成非负简单函数的极限再证结论也成立，最后将一般可测函数表示成正部、负部两个非负可测函数之差，从而结论成立. 这种将复杂转化为简单、通过简单把握复杂的解决问题的方法在《实变函数论》中颇具普遍性. 如直接积的测度定理、积分可加性证明、截面定理、"不定积分的导函数刚好是被积函数"定理本身和引理的证明均为此法. 开集的构造定理、可测集的构造定理、可测函数的构造定理为这类将复杂转化为简单提供了行之有效的工具.

新概念的提出与新结果的产生是不可截然分割的，往往交替出现互为因果. 如 Riemann 积分与极限交换顺序有一个相当苛刻的条件 —— "一致收敛"，欲去掉这个苛刻条件是一件并不容易的事，因为由《数学分析》知，加此条件完全是不得已而为之. 因为 Dirichlet 函数

$$\mathrm{D}(x) = \sum_{i=1}^{\infty} f_i(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$$

其中$F_n = \sum_{i=1}^{n} f_i(x)$，$f_i(x) = \begin{cases} 1, & x = r_i \\ 0, & x \neq r_i \end{cases}$，$\{r_1, r_2, r_3, \cdots, \cdots\}$为[0，1]中的有理数全体. 虽然所有$f_i(x)$，$F_n(x)$都是（R）可积函数，但其极限、无穷和$\mathrm{D}(x)$却不再是（R）可积函数. 其根本原因仍然在于 Riemann 积分的定义条件太苛刻. Lebesgue 改造了积分定义：去掉了苛刻条件、拓展了可积范围，即当每个$f_i(x)$，$F_n(x)$都是（L）可积函数时，其极限、无穷和$\mathrm{D}(x)$也可以证明是（L）可积函

数. 从而获得了 Levi 定理、Fatou 引理、Lebesgue 逐项积分定理、Lebesgue 控制收敛定理. 然而，人们并不满足于这点收获，还想扩大战果，不局限于去掉“一致收敛”中的“一致”而字，还想拓展“收敛”二字的内涵，那么如何拓展“收敛”二字的内涵呢？下面先从集合论角度对“一致收敛”的实质作一剖析：

$$f_n \xrightarrow{n\to+\infty} f \Leftrightarrow \forall\sigma>0,\ \exists N, \text{当 } n>N \text{ 时，有 } E[|f_n-f|\geqslant\sigma]=\varnothing$$

这里要求当 $n>N$ 时，有 $E[|f_n-f|\geqslant\sigma]=\varnothing$ 仍然有苛刻之嫌，能否将 $E[|f_n-f|\geqslant\sigma]=\varnothing$ 改为 $mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]=0$ 呢？甚至放得更宽一点，只求 $mE[|f_n-f|\geqslant\sigma]\to 0$（$n\to+\infty$）呢？这就导致了依测度收敛这个全新概念的产生. 将 Lebesgue 控制收敛定理中的收敛拓展为依测度收敛大大提高了 Lebesgue 积分的灵活性.

由于本人才疏学浅，尝试仅仅起抛砖引玉之作用，未能完全如愿以偿地地实现初衷，可能导致了非驴非马、不伦不类的局面，故请各位同仁海涵，并望不吝赐教.

《实变函数论》课程建设与教学改革一直得到西华师范大学和四川省教育厅的高度重视和支持，1990 年，《实变函数论》获四川师范学院基础课程评估一等奖；2000 年，《实变函数论课程体系与教法改革》获四川师范学院教学成果二等奖；2003 年，《实变函数论》被评为西华师范大学精品课程，2004 年，《实变函数论》被评为四川省省级精品课程，本次教材出版得到四川省教育厅精品课程建设项目资助.

该教材的形成与完善得益于我校数学与信息学院的众多老前辈和同仁的帮助、指点. 如作者早在承担助理教学工作期间对某些问题的处理就得到过当时的主讲教师顾永兴、陈国先、邓坤贵老师的指点，在形成讲义初稿后除了作者本人外，还承蒙王庆平、何中全老师的试用，在试用过程中老师同学都提出了许多宝贵的修改意见. 借此机会向试用本教材的老师、同学表示衷心的感谢，感谢他们为本教材日趋成熟所作的贡献，同时也表示诚挚的歉意，因为不成熟的讲义给他们的教与学带来了不少的困难和麻烦.

尽管如此，由于作者水平有限，错误在所难免，再次敬请各位专家、同仁及读者多提宝贵意见，以便进一步完善.

魏　勇

2007 年 6 月于四川南充

目　　录

绪　论

一、《实变函数论》的内容

顾名思义，《实变函数论》即讨论以实数为变量的函数. 这样的内容早在中学都已学过，中学所学的函数概念都是以实数为变量的函数，大学的数学分析、常微分方程也是研究以实数为变量的函数，那么《实变函数论》还有哪些内容可学呢？简单地说，《实变函数论》只做一件事，即恰当地改造积分定义使得更多的函数可积，使得积分的操作更加灵活.

何以说明现有的积分范围狭窄呢？因为像 Dirichlet 函数

$$\mathrm{D}(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 为 }[0\ \ 1]\text{ 中无理数}\\ 1, & x\text{ 为 }[0\ \ 1]\text{ 中有理数}\end{cases}$$

这种形式极为简单的函数按现有积分定义也不可积，所以，可以有足够理由认为现有可积范围确实太狭窄.

如何改造积分定义来达到拓展积分范围的目的呢？下面先剖析一下造成这一缺陷的根本原因，只有找准病根，才能对症下药. 由数学分析知，对任意分划 T: $0=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=1$，由于任意一个正长度区间内既有有理数又有无理数，因此，关于 Dirichlet 函数在[0，1]上的大小和之差恒有

$$S(T,\ \mathrm{D})-s(T,\ \mathrm{D})\equiv 1-0\equiv 1\nrightarrow 0$$

从而不可积. 如果分划不是这样呆板且如此苛刻地要求一定要分成区间的话，则还是有可能满足大小和之差任意小的. 比如，只要允许将函数值为 1 的有理数点分在一起，将函数值为 0 的无理数点分在一起，那么大小和之差就等于零了. 法国的著名数学家 Lebesgue 就抓住这个着眼点，首先让分化概念更加广泛，更加灵活，从而将函数值接近的分在一起以保证大小和之差任意小，即

$$T:\ E=\bigcup_{i=1}^{n}E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$$

其中，$m\leqslant f<M$，$m=y_0<y_1<\cdots<y_n=M$ 时，要使

$$S(\mathrm{D},\ f)-s(\mathrm{D},\ f)=\sum_{i=1}^{n}[y_i-y_{i-1}]\,mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]\leqslant\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_i-y_{i-1}]mE<\varepsilon$$

只须

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}[y_i-y_{i-1}]<\varepsilon$$

而 y_i-y_{i-1} 正是新思维分划下可以人为控制的重要因素，这里 $mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 相当于集合 $E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 的长度.

思路非常简单，但要实现并非易事. 鉴于 $E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 可能很不规则，那么如何求 $mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 呢？这就是一般集合的测度问题，将在第三章讨论. 而测度理论所度量的对象是集合，尤其是多元函数定义域所在空间 R^n 的子集. 因此，必须先介绍集合与点集知识，即第一章、第二章内容. 测度理论本来是为了将长度、面积、体积概念推广到一般集合，然而在实施过程中却非常遗憾，无法对直线上所有集合规定恰当测度使其满足以下两点基本要求：① 落实到具体区间的测度就是长度，即测度确为长度概念的推广；② 总体测度等于部分测度之和，即可列可加性成立. 只有对部分集合规定满足这两点基本要求的测度，才能使这一部分集合成为所谓的可测集合. 那么哪些函数才能保证形如 $E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]$ 的集合均可测呢？这就是可测函数理论问题，即第四章内容. 由于 $E[y_{i-1}\leqslant f<y_i]=E[f\geqslant y_{i-1}]-E[f\geqslant y_i]$，故可将“对任意 a，有 $E[f\geqslant a]$ 可测”作为函数 f 可测的定义.

有了上面的准备，才能根据前述思路对可测集 E 上定义的可测函数先定义大（小）和

$$S(\mathrm{D},\ f)=\sum_{i=1}^{n}y_i mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]\quad\left(s(\mathrm{D},\ f)=\sum_{i=1}^{n}y_{i-1}mE[y_{i-1}\leqslant f<y_i]\right)$$

然后规定 $\inf\limits_{\mathrm{D}} S(\mathrm{D},\ f)$（$=\sup\limits_{\mathrm{D}} s(\mathrm{D},\ f)$）为积分值，最后再定义并讨论新积分的性质，这就是第五、第六章内容.

以上所述，凭着基于直观集合概念的深刻洞察，放弃对函数定义域直接分割进而求和的方法，转而对函数值域进行分割以达对定义域间接分割的目的，然后再求和，这既是 20 世纪初法国著名数学家 Lebesgue 创立新型积分的原始思路，也是传统教材介绍 Lebesgue 积分定义的常见的普遍方法.

鉴于人们在研究可测函数时发现，可测函数的本质特征是正、负部函数的下方图形均为可测集. 结合 Riemann 积分的几何意义，使我们自然想到：与其说测度推广了定义域的长度（面积、体积）概念后，使得我们作大、小和更加

灵活多样，以达到推广积分的目的，不如说由于定义域与实数域的乘积空间的面积（体积）概念的推广，使得大量的像 Dirichlet 函数那样图形极其不规则的下方图形也可以求面积（体积）了，从而拓宽了可积范围. 于是在本书中采取直接规定其测度之代数和为积分值（如果代数和存在的话）的办法. 该定义简单、明了、直观，既有效地避免了分划、大（小）和、确界概念的繁琐，又成功地回避了先在测度有限、函数有界条件下讨论积分性质，然后推广到测度无限，函数无界的一般情形的重复、啰嗦.

二、《实变函数论》的特点

由以上叙述可以看出《实变函数论》内容单纯，学习起来应该简单，然而实际情况却大相径庭，各届同学都感到学习《实变函数论》有一定困难. 原因何在呢？从学生反映的意见看集中在两点：

(1) 高度抽象，防不胜防.

抽象到什么程度呢？有人用八个字概括为："似是而非，似非而是"，现举例说明：

例 1　若许多同学站成一列，且男女生交叉排列，任意两个男生中间有女生，任意两个女生中间有男生，在其中任取一个片段，男女生的个数关系无非只有三种可能：或男女生一样多，或男生比女生多一个，或女生比男生多一个. 也就是说在任一片段中男女生个数至多相差一个. 直线上的有理数、无理数排列表面看来很类似，任意两个有理数中间有无理数，任意两个无理数中间有有理数，在直线上任取一节线段，有理数、无理数的个数似乎无非只有三种可能：或有理数、无理数一样多或有理数多一个或无理数多一个. 也就是说，在任一片段中有理数、无理数个数至多相差一个. 但严密的逻辑推理告诉我们：这种说法是完全错误的. 事实上，有理数相对无理数而言少得多. 少到什么程度？即使是有理数开头有理数结尾这样对有理数最有利的情形，有理数与无理数相比也是那样的微不足道，"有它不多，无它不少"，即去掉有理数后的无理数居然还与所有实数一样多，这就是所谓"似是而非".

例 2　有理数在直线上密密麻麻，自然数在直线上稀稀拉拉，如果在学习《实变函数论》以前有人说自然数与有理数一样多的话，谁也不会承认，而《实变函数论》却严密论证该结论无可非议. 这就是所谓"似非而是".

(2) 定理、定义、引理、推论多，例题、计算内容少，理论性强.

理论性强是由实变函数论的内容结构所决定的，因它只做一件事：恰当地

改造积分定义使得更多的函数可积. 这就使得《实变函数论》的绝大部分篇幅是在做理论上的准备，很少有应用与例题. 但从另一个角度讲，《实变函数论》的习题几乎全是证明题，而定理、引理、推论的证明本身就是一些典型的、带示范性的解剖证明题的例子.

三、学习《实变函数论》的方法

针对《实变函数论》的特点，下面介绍几种学习本门课程较为独特的方法：

(1) 由于《实变函数论》高度抽象、理论性强，对于每一个尚未证明的结论都应持谨慎态度，不能简单类比后就盲目承认和否定，必须严格论证或举出反例，否则就有可能出现例 1、例 2 类似的错误.

(2) 对于每一个已经证明的结论不仅仅是记住，更重要的是理解其证明，只有理解其证明才能借鉴其方法. 有人将“可数集并上至多可数集仍为可数集”记得滚瓜烂熟，但无法自己证明“无限集并上一个至多可数集后其势不变”；也有人在听懂、看懂“无限集并上一个至多可数集后其势不变”的证明后，对“直接建立 (0, 1) 与[0, 1]之间的 1-1 对应”仍束手无策，根本想不到应该用证明定理的思想方法，而不是直接用结论本身，其原因在于未消化其证明，从而未能达到借鉴方法解决类似问题之目的. 有人知道“可数个可数集之并仍为可数集”，但不知道反过来如何将一个可数集分解成可数个互不相交的可数集之并，原因也是类似.

(3) 尽管凭直观想象可能会出现例 1、例 2 那样“似是而非，似非而是”的结论，但也不能因噎废食. 在对每一个定理、引理、推论作证明之前，都应尽量想象其合理的直观意义. 直观解释虽然不能代替严格的论证，但会给证明带来开阔思路的启迪，直观想象永远是数学各分支发现联系、揭示规律、猜测命题的重要依据和行之有效的手段之一.

(4) 既然《实变函数论》是《数学分析》研究范围、内容的扩展，研究方法的改进和完善，因此，新旧知识之间就难免存在诸多内在联系，所以需要及时复习相关旧知识以达温故而知新的目的，注重体会如何借鉴旧方法来解决新问题的思路，同时特别注意新方法与旧方法实质区别之处，把握创新点.

(5) 注意“下连上串，左顾右盼”. 如在学习 R^n 中两点之间的距离时，请先复习初中学的直线上两点间的距离公式，高中学的平面上两点间的距离公式，大学学的空间中两点间的距离公式，即“下连”，然后浏览本课程的后继课程《泛函分析》的度量空间中的距离，即“上串”，从而把握距离概念的实

质. 又如，在学习抽象测度μ的定义时，验证概率统计中的概率是一种测度，子集中元素的个数是一种测度，非负可测函数关于任一种抽象测度在子集上的积分也是测度，并思考还有哪些问题实质上是测度论问题，即“左顾右盼”.

(6) 无论是个案形式出现的例题解法，还是为主线服务的定理、引理、推论，还是本门课程的核心结论，都得将具体方法通过抽象化、一般化转变成带普遍性的一般方法，从而实现通过一门课、甚至仅仅只是一个定理、公式的学习，达到掌握一类问题的解决方法之目的.

(7) 遇到困难及时与同学讨论、或请老师释疑，不要拖延到问题成堆才来梳理，造成时间紧迫来不及、或见问题太多而丧失攻克难关的勇气.

四、本教材的几点特色处理

本教材的几点特色处理:

(1) 在过去“区间体积”概念和“开集构造”理论基础上，引入了开集“体积”概念，为简化测度定义及性质的讨论奠定了基础.

(2) 用

$$m^*E=\inf\{|G| \mid G\text{ 开，且 }G\supset E\}$$

取代

$$m^*E=\inf\left\{\sum_{i=1}^{+\infty}|I_i| \mid \bigcup_{i=1}^{+\infty}I_i\supset E,\ I_i\text{为区间}\right\}$$

不仅使测度概念在保证实质不发生变化的前提下，形式上得到简化、直观化，更重要的是使得诸如$m^*I=|I|$等一系列命题的证明过程得到大大简化.

(3) 将常用的传统教材中留到学了截面定理时才讲的乘积空间的测度，提前到紧接着测度的概念和性质讲，保证了在讲可测函数时能证明可测函数的下方图形可测，从而最终保证直接用非负可测函数下方图形的测度规定其积分值.

(4) 直接用正、负部函数下方图形的测度之差规定积分值，不仅使积分概念简单、直观、明了，而且学生易于接受. 同时，也使得诸如并集上的积分等于各子集上的积分求和、Levi 定理等一系列命题的证明过程得到大大简化.

(5) 在本书中不依赖 Riemann 积分定义，直接从 Lebesgue 积分定义出发证明计算积分的重要工具——牛顿-莱布尼兹公式，为将来实现 Lebesgue 积分取代 Riemann 积分做必要的准备. 同时，在学生学了 Riemann 积分的前提下，

再研究 Riemann 积分、广义 Riemann 积分与 Lebesgue 积分的关系.

(6) 将“不含端点的区间为开区间，包含所有端点的区间为闭区间”一般化为“不含边界点的集合为开集，包含所有边界点的集合为闭集”，从而使概念直观化，学生易于理解其实质，开集与闭集的对偶性等定理证明被简化，思路直观化.

(7) 既注重知识的传授，又注重数学创新思维方法的挖掘和点拨. 由于篇幅所限在此仅举部分例子予以说明.

如在引入“依测度收敛”概念时，先讲“改造积分定义的目的：一是为了扩展可积范围，二是为了使操作更方便. 对（R）积分而言，积分与极限交换顺序需要一个苛刻条件：‘$f_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$’. 从集合论的角度讲：‘$f_n(x)$ 在 E 上一致收敛于 $f(x)$’是指 $\forall\sigma>0$，$\exists N_0>0$，当 $n>N_0$ 时，

$$E[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]=\varnothing$$

之所以认为‘一致收敛’条件苛刻，就在于它要求

$$E[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]$$

从某项以后永远为空集. 能否改成允许不空，甚至可以允许为正测度集，但必须满足

$$mE[|f_n(x)-f(x)|\geqslant\sigma]\to 0\ (n\to+\infty)$$

呢？这就导致了‘依测度收敛’这个新概念的产生”，从而展示了数学创新过程中一些重要的新概念引入时的直观思维方法.

又如，在引入叶果落夫定理时，引入实例

$$f(x)=x^n\xrightarrow[\text{处处}]{n\to+\infty}0\ \text{于}\ [0,1)$$

却不一致收敛，究其原因是自变量越靠近 1，收敛速度越慢，因只有更慢没有最慢，从而不可能一致收敛. 但不难看出，只要挖去一个以 1 为右端点的小区间（$1-\delta$, 1）后就有收敛最慢点 $x=1-\delta$ 了，从而可以保证一致收敛了. 著名的俄国数学家叶果落夫（Егоров）发现任何几乎处处收敛的可测函数列都有类似的相应结果，这就是著名的叶果落夫定理. 展示了数学中一些重要结果的发现来源于常见简单例子的启发，即将特例抽象化、一般化后就会得出重要的带普遍性的结果这一思维模式.

再如，对 Lebesgue 积分定义，先在绪论中指出 Riemann 积分的弊病，分析了产生弊病的原因，提出了解决此弊病的方法，即对 Lebesgue 改造积分定义的原始思路作了概括性介绍. 当在第五章通过几何意义直接定义 Lebesgue 积分时，唯恐掩盖 Lebesgue 原始创新思路，及时指出“$mG_{(\Phi_n,E)}$ 便是 f 在分划

T_n：$E=\bigcup\limits_{k=1}^{n2^n+1} E_k$ 下的小和 $s(f,\ T_n)$，即

$$\int_E f\,\mathrm{d}x=\lim_{n\to\infty} mG_{(\Phi_n,\,E)}=\lim_{n\to\infty} s(f,\ T_n)$$

这与定义(R)积分的分割、求和、取极限三大步骤基本相似；区别仅在于，(R)积分直接将定义域分成区间，无法保证每一子集上函数振幅足够小.(L)积分可能是通过将值域分成区间后，反过来将定义域分成有限个不一定是区间的集合，从而有效地保证了每一子集上函数振幅要多小，有多小.”不仅达到了前后呼应的目的，更重要的是展示了数学新体系形成过程中的“提出问题、分析问题、克服障碍、解决问题、完善方法、简化思路”这一数学创新过程.

第一章　集合论

本章先介绍集合的概念、表示方法、例子、关系、运算及其规律；然后以集合间的一一对应为工具定义集合的势，及势的大、小、相等关系；最后讨论两类特殊势的集合——可数集与 c 势集的定义、性质、例子、运算封闭性，证明无最大势的集合存在. 其目的是为研究点集及其测度做必要的准备，当然，它又是众多数学分支的共同基础.

第一节　集合概念与运算

一、集合的概念

集合是数学中最基本、最原始、最简单的概念之一，它与中、小学已经学过的点、面、线概念一样，不能用其他已有概念来定义. 严格的定义只能采用一组公理来刻画，这里只采用下述朴素的说法予以描述.

所谓的集合是指一定范围内研究对象的全体，其中每一个对象称为元素. 可以约定用小写字母表示元素，大写字母表示集合. 元素 a 在集合 A 中时，记为 $a\in A$，读作 a 属于 A，或 A 包含 a；元素 a 不在集合 A 中时，记为 $a\notin A$，读作 a 不属于 A，或 A 不包含 a.

例 1　全体实数构成一个集合，常用 R^1 记之.

全体 n 元实数组构成一个集合，用 R^n 记之.

$[a, b]$上所有连续函数构成一个集合，记为 $c[a, b]$.

E 中满足 $f(x)\geqslant a$ 的所有 x 构成一个集合，记为 $E[f\geqslant a]$.

在一定范围内包含了所有研究对象的集合，称为全集，记为 S. 为了形式上的方便，引入不含任何元素的集合，称为空集，记为$\varnothing$.

集合中的元素具有三条基本性质：① 明确性：一个元素 a 要么属于 A，