



21st CENTURY

实用规划教材

# 21世纪全国应用型本科财经管理 系列实用规划教材

# 管理定量分析方法

主编 赵光华  
副主编 占绍文 段中兴



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

十一世纪全国实用型本科财经管理系列实用规划教材

## 管理定量分析方法

主 编 赵光华 副主编 占绍文 段中兴  
副主编 主编 丁燕萍 杨琅玲 参 编 方永恒 李寿国  
参 编 张惠丽 郭进平

C93-03

zh1



北京大学出版社  
PEKING UNIVERSITY PRESS

## 内 容 简 介

本书共分 10 章，系统地介绍一些常用的定量分析方法，内容包括绪论、统计数据的整理与分布、抽样分布、参数估计与假设检验、相关分析与回归分析、聚类分析、主分量分析、规划分析、层次分析法和决策分析等。本书的特点：一是加强了实践教学，将 Excel 和 SPSS 等应用软件与定量分析方法有机结合，并配有适量的上机实验题；二是加强了案例教学，在一些主要分析方法后，本书精选了部分实用案例，以便使读者能将定量分析方法与实际运用结合起来。另外，每章后面还附有适量的习题。

本书可作为高等院校财经管理类专业的本科生教材，也可作为公务员、技术人员以及管理人员的培训教材和自学参考书。

### 图书在版编目(CIP)数据

管理定量分析方法/赵光华主编. —北京：北京大学出版社，2008.6

(21 世纪全国应用型本科财经管理系列实用规划教材)

ISBN 978-7-301-13552-5

I. 管… II. 赵… III. 管理学—定量分析—高等学校—教材 IV. C93-03

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 043073 号

书 名：管理定量分析方法

著作责任者：赵光华 主编

策 划 编 辑：李 虎

责 任 编 辑：魏红梅

标 准 书 号：ISBN 978-7-301-13552-5/F · 1869

出 版 者：北京大学出版社

地 址：北京市海淀区成府路 205 号 100871

网 址：<http://www.pup.cn> <http://www.pup6.com>

电 话：邮购部 62752015 发行部 62750672 编辑部 62750667 出版部 62754962

电子邮箱：[pup\\_6@163.com](mailto:pup_6@163.com)

印 刷 者：北京宏伟双华印刷有限公司

发 行 者：北京大学出版社

经 销 者：新华书店

787 毫米×980 毫米 16 开本 18.75 印张 355 千字

2008 年 6 月第 1 版 2008 年 6 月第 1 次印刷

定 价：28.00 元

---

未经许可，不得以任何方式复制或抄袭本书之部分或全部内容。

版权所有 侵权必究

举报电话：010-62752024

电子邮箱：[fd@pup.pku.edu.cn](mailto:fd@pup.pku.edu.cn)

# 21世纪全国应用型本科财经管理系列实用规划教材

## 专家编审委员会

主任委员 刘诗白

副主任委员 (按拼音排序)

韩传模

李全喜

王宗萍

颜爱民

曾旗

朱廷珺

顾问 (按拼音排序)

高俊山

郭复初

胡运权

万后芬

张强

委员 (按拼音排序)

程春梅

邓德胜

范徵

冯根尧

冯雷鸣

黄解宇

李定珍

李相合

李小红

刘志超

沈爱华

王富华

王仁祥

吴宝华

张淑敏

赵邦宏

赵宏

赵秀玲

法律顾问 杨士富

# 从书序

我国越来越多的高等院校设置了经济管理类学科专业，这是一个包括经济学、管理科学与工程、工商管理、公共管理、农业经济管理、图书档案学 6 个二级学科门类和 22 个专业的庞大学科体系。2006 年教育部的数据表明在全国普通高校中经济类专业布点 1518 个，管理类专业布点 4328 个。其中除少量院校设置的经济管理专业偏重理论教学外，绝大部分属于应用型专业。经济管理类应用型专业主要着眼于培养社会主义国民经济发展所需要的德智体全面发展的高素质专门人才，要求既具有比较扎实的理论功底和良好的发展后劲，又具有较强的职业技能，并且又要求具有较好的创新精神和实践能力。

在当前开拓新型工业化道路，推进全面小康社会建设的新时期，进一步加强经济管理人才的培养，注重经济理论的系统化学习，特别是现代财经管理理论的学习，提高学生的专业理论素质和应用实践能力，培养出一大批高水平、高素质的经济管理人才，越来越成为提升我国经济竞争力、保证国民经济持续健康发展的重要前提。这就要求高等财经教育要更加注重依据国内外社会经济条件的变化适时变革和调整教育目标和教学内容；要求经济管理学科专业更加注重应用、注重实践、注重规范、注重国际交流；要求经济管理学科专业与其他学科专业相互交融与协调发展；要求高等财经教育培养的人才具有更加丰富的社会知识和较强的人文素质及创新精神。要完成上述任务，各所高等院校需要进行深入的教学改革和创新。特别是要搞好有高质量的教材的编写和创新。

北大出版社的领导和编辑通过对国内大学经济管理学科教材实际情况的调研，在与众多专家学者讨论的基础上，决定编写和出版一套面向经济管理学科专业的应用型系列教材，这是一项有利于促进高校教学改革发展的重要措施。

本系列教材是按照高等学校经济类和管理类学科本科专业规范、培养方案，以及课程教学大纲的要求，合理定位，由长期在教学第一线从事教学工作的教师立足于 21 世纪经济管理类学科发展的需要，深入分析经济管理类专业本科学生现状及存在问题，探索经济管理类专业本科学生综合素质培养的途径，以科学性、先进性、系统性和实用性为目标，其编写的特色主要体现在以下几个方面：

(1) 关注经济管理学科发展的大背景，拓宽理论基础和专业知识，着眼于增强教学内容的联系实际和应用性，突出创造能力和创新意识。

(2) 体系完整、严密。系列涵盖经济类、管理类相关专业以及与经济管理相关的部分法律类课程，并把握相关课程之间的关系，整个系列丛书形成一套完整、严密的知识结构体系。

(3) 内容新颖。借鉴国外最新的教材, 融会当前有关经济管理学科的最新理论和实践经验, 用最新知识充实教材内容。

(4) 合作交流的成果。本系列教材是由全国上百所高校教师共同编写而成, 在相互进行学术交流、经验借鉴、取长补短、集思广益的基础上, 形成编写大纲。最终融合了各地特点, 具有较强的适应性。

(5) 案例教学。教材具备大量案例研究分析, 让学生在学习过程中理论联系实际, 特别列举了我国经济管理工作中的大量实际案例, 这可大大增强学生的实际操作能力。

(6) 注重能力培养。力求做到不断强化自我学习能力、思维能力、创造性解决问题的能力以及不断自我更新知识的能力, 促进学生向着富有鲜明个性的方向发展。

作为高要求, 财经管理类教材应在基本理论上做到以马克思主义为指导, 结合我国财经工作的新实践, 充分汲取中华民族优秀文化和西方科学管理思想, 形成具有中国特色的创新教材。这一目标不可能一蹴而就, 需要作者通过长期艰苦的学术劳动和不断地进行教材内容的更新才能达成。我希望这一系列教材的编写, 将是我国拥有较高质量的高校财经管理学科应用型教材建设工程的新尝试和新起点。

我要感谢参加本系列教材编写和审稿的各位老师所付出的大量卓有成效的辛勤劳动。由于编写时间紧、相互协调难度大等原因, 本系列教材肯定还存在一些不足和错漏。我相信, 在各位老师的关心和帮助下, 本系列教材一定能不断地改进和完善, 并在我国大学经济管理类学科专业的教学改革和课程体系建设中起到应有的促进作用。

刘诗白

2007年8月

**刘诗白** 刘诗白教授现任西南财经大学名誉校长、博士生导师, 四川省社会科学联合会主席, 《经济学家》杂志主编, 全国高等财经院校资本论研究会会长, 学术团体“新知研究院”院长。

# 前言

以现代统计学、运筹学、现代管理学为代表的定量分析方法，应用已遍及工程技术和  
社会经济的各个方面。管理定量分析方法作为公共事业管理专业基础课程之一，目前大部  
分教材都是针对公共管理硕士(MPA)学位教育，专门为本科生编写的教材非常少。本教材  
是编者根据多年从事管理定量分析方法本科教学和科研实践经验，结合本科生教学特点而  
编写的实用教材。本书力求面向 21 世纪公共管理人才培养的新要求，系统地介绍了定量分  
析方法的基本概念、基本理论和基本方法，并尽可能反映近年来定量分析方法的新成果。

全书共分 10 章，包括绪论、统计数据的整理与分布、抽样分布、参数估计与假设检验、  
相关分析与回归分析、聚类分析、主分量分析、规划分析、层次分析法、决策分析等内容。  
本教材的主要特色：一是加强了实践教学，将 Excel 和 SPSS 等应用软件与定量分析方法有  
机结合，并配有适量的上机实验题；二是加强了案例教学，在一些主要分析方法后，本书  
精选了部分实用案例，以便使读者能将定量分析方法与实际运用结合起来。另外，每章后  
面还附有适量的习题。

本书建议授课的总学时为 60 学时，各章具体授课的学时见下表。(其中第 7、8、9、10  
章，可选择两章授课，其他自学)

章 节	授课学时	章 节	授课学时
第 1 章 绪论	6	第 6 章 聚类分析	8
第 2 章 统计数据的整理与分布	6	第 7 章 主分量分析	8
第 3 章 抽样分布	8	第 8 章 规划分析	8
第 4 章 参数估计与假设检验	8	第 9 章 层次分析法	8
第 5 章 相关分析与回归分析	8	第 10 章 决策分析	8

本书第 1 章由赵光华编写，第 2 章由赵光华、丁燕萍编写，第 3、4 章由杨琅玲编写，  
第 5 章由方永恒编写，第 6、7 章由段中兴编写，第 8 章由张惠丽编写，第 9 章由李寿国编  
写，第 10 章由占绍文、郭进平编写，全书由赵光华修改统稿。

本书可作为公共事业管理专业本科生的专业基础课程教材，也可作为高等院校、职业  
技术院校的工商管理、财经类专业本科生的教材和参考书，还可作为公务员、技术人员、  
管理人员的培训教材和自学参考书。本书的出版得到了西安建筑科技大学重点教材立项资  
助，在此表示衷心的感谢！

定量分析方法作为一个新兴学科的分支，其理论、方法、体系都在不断发展中。本

书在编写过程中借鉴了许多中外学者的研究成果，主要参考文献已列出，在此向相关作者表示衷心的感谢！本书在出版中得到了北京大学出版社编辑的大力支持和帮助，在此表示衷心的感谢！由于编者的水平有限，书中不足之处在所难免，敬请读者和各位同行批评指正。

编者 2008年3月

# 目 录

<b>第1章 绪论</b>	1
1.1 定量分析与定性分析	2
1.1.1 定量分析方法简介	2
1.1.2 定量分析与定性分析的联系与区别	2
1.1.3 定量分析方法的应用	4
1.2 线性代数知识	5
1.2.1 矩阵的定义和类型	5
1.2.2 矩阵运算	6
1.3 概率论基础	11
1.3.1 概率分布的概念和种类	11
1.3.2 两种常见的抽样概率分布	13
1.4 运筹学基础	15
1.4.1 运筹学的产生与发展	15
1.4.2 运筹学的工作步骤	16
1.4.3 运筹学应用领域	17
本章小结	17
习题	18
<b>第2章 统计数据的整理与分布</b>	19
2.1 数据整理	20
2.1.1 数据计量	20
2.1.2 数据类型	22
2.1.3 数据分组	23
2.2 数据分布	25
2.2.1 统计表与图	25
2.2.2 集中趋势分布	28

2.2.3 离中趋势分布	31
本章小结	33
习题	33
<b>第3章 抽样分布</b>	34
3.1 总体与样本	35
3.1.1 总体	35
3.1.2 样本	36
3.1.3 参数和统计量	36
3.2 抽样分布原理	37
3.2.1 基本概念	37
3.2.2 抽样误差	40
3.2.3 抽样分布定理	40
本章小结	42
习题	43
<b>第4章 参数估计与假设检验</b>	45
4.1 参数估计的基本问题	46
4.1.1 估计量与估计值	46
4.1.2 衡量估计量优劣的标准	47
4.1.3 参数估计的方法	48
4.2 点估计	48
4.3 区间估计	49
4.3.1 置信区间	49
4.3.2 正态总体均值的区间估计	50
4.4 假设检验的基本问题	53
4.4.1 假设检验的概念和种类	53

4.4.2 假设检验的基本思想 .....	54	6.4.2 动态聚类法的步骤.....	142
4.4.3 假设检验的步骤 .....	55	6.4.3 动态聚类法 SPSS 的实现.....	143
4.5 假设检验的类型 .....	56	6.5 案例应用分析 .....	148
4.5.1 Z 检验.....	56	日本章小结 .....	155
4.5.2 t 检验 .....	57	习题 .....	156
4.5.3 方差分析 .....	58		
4.5.4 $\chi^2$ 检验 .....	61		
本章小结 .....	62		
习题 .....	62		
<b>第 5 章 相关分析与回归分析 .....</b>	<b>65</b>	<b>第 7 章 主分量分析 .....</b>	<b>161</b>
5.1 相关分析 .....	66	7.1 主分量分析的特点和意义.....	162
5.1.1 关系 .....	66	7.1.1 主分量分析的意义.....	162
5.1.2 正相关与负相关 .....	68	7.1.2 主分量分析法的特点.....	164
5.1.3 相关系数 .....	70	7.2 主分量的导出 .....	165
5.2 回归分析 .....	71	7.2.1 特征根与特征向量.....	165
5.2.1 一元线性回归分析 .....	71	7.2.2 主分量的个数与解释.....	166
5.2.2 多元线性回归分析 .....	79	7.3 主分量的计算 .....	167
5.3 案例应用分析 .....	85	7.4 主分量分析在 SPSS 中的实现.....	171
本章小结 .....	94	7.5 案例应用分析 .....	177
习题 .....	94	本章小结 .....	184
		习题 .....	184
<b>第 6 章 聚类分析 .....</b>	<b>98</b>	<b>第 8 章 规划分析 .....</b>	<b>189</b>
6.1 聚类分析的目的和方法 .....	100	8.1 线性规划 .....	190
6.2 距离和相似系数 .....	101	8.1.1 线性规划问题及其数学模型 .....	190
6.2.1 距离和相似系数的定义 .....	102	8.1.2 线性规划的标准形式 .....	193
6.2.2 系统聚类方法 .....	107	8.1.3 线性规划的图解法 .....	194
6.3 系统聚类法 .....	125	8.1.4 单纯形法 .....	195
6.3.1 系统聚类法的一般步骤 .....	125	8.2 目标规划 .....	198
6.3.2 系统聚类法的基本性质 .....	128	8.2.1 目标规划的数学模型 .....	198
6.3.3 系统聚类的 SPSS 实现 .....	130	8.2.2 目标规划的图解法 .....	199
6.4 动态聚类法 .....	141	8.3 案例应用分析 .....	200
6.4.1 动态聚类法的思想 .....	141	本章小结 .....	203
		习题 .....	203

<b>第 9 章 层次分析法 .....</b>	207	10.2.1 乐观准则 .....	231
9.1 层次分析法的基本原理 .....	208	10.2.2 悲观准则 .....	232
9.1.1 问题的产生 .....	208	10.2.3 等可能准则 .....	232
9.1.2 层次分析法的基本原理 .....	209	10.2.4 后悔值准则 .....	233
9.1.3 使用层次分析法的 注意事项 .....	210	10.3 风险型决策 .....	234
9.2 层次分析法的基本步骤 .....	210	10.3.1 期望值法 .....	234
9.3 层次分析法中矩阵的求解方法 .....	217	10.3.2 决策树法 .....	235
9.4 案例应用分析 .....	221	10.4 最短路线问题 .....	236
本章小结 .....	225	10.4.1 逆序解法 .....	237
习题 .....	225	10.4.2 顺序解法 .....	240
<b>第 10 章 决策分析 .....</b>	228	10.5 案例应用分析 .....	243
10.1 决策的一般概念 .....	229	本章小结 .....	248
10.2 不确定型决策 .....	230	习题 .....	248
		<b>习题参考答案 .....</b>	251
		<b>参考文献 .....</b>	285

# 第 1 章 绪 论

**教学目标与要求**

通过本章的学习，读者应理解定量分析与定性分析的关系，掌握线性代数、概率论、运筹学等基本知识，为学习定量分析方法打下良好的基础。

(1) 能够理解定量分析与定性分析的联系与区别。  
(2) 能够掌握矩阵的基本运算。  
(3) 能够熟悉两种常见的抽样概率分布。  
(4) 能够了解运筹学的基本知识。



## 本章导读

随着科学技术的发展和社会生产力的提高，世界范围内社会公共事务管理不断变革。所谓公共管理是指社会公共组织以及其他组织为推进社会整体协调发展、增进社会共同利益实现，通过制度创新和手段创新对社会公共事务进行调节和控制的活动。如何对社会公共事务实施科学、有效地调节和控制，在很大程度上依赖于手段、工具和方法的科学性，定量分析作为一种科学的分析方法在其中扮演着不可替代的角色。

## 1.1 定量分析与定性分析

### 1.1.1 定量分析方法简介

定量分析是对一个对象内部几个因素或者几个对象之间的数量特征、数量关系与数量变化的分析。它的要点在于：运用统计学、管理学、运筹学、系统工程等科学方法，在错综复杂的问题中理清脉络，提炼要素，并理清有关要素间的逻辑和数量关系；确定量化的原则；建立相应的数学模型；运用有效算法做出合理的和符合需要的结论。对管理者而言，掌握定量分析方法，将使管理工作更加科学、准确、有效。

统计学的核心是统计数据分析，通过统计描述和统计推断的方法探索出数据内在的数量规律性。管理学强调在管理的五大基本职能中，人力、物力和财力资源的协调性，以达到有效管理的目的。运筹学强调以量化为基础的最优决策。系统工程强调在系统规划、研究、设计、制造、试验和使用的全过程建模(仿真)、分析、预测、评价、决策的科学性，其科学方法对所有系统都具有普遍意义。它们之间既有联系又有区别，组成了公共管理定量分析方法的重要基础。

### 1.1.2 定量分析与定性分析的联系与区别

定量分析与定性分析是相对而言的，它们分别从数量关系与性质特征两个不同的方面分析研究问题，被广泛地应用于其他领域。20世纪40年代前后逐步形成了一般意义上的定性分析和定量分析的理论体系，并在管理领域得到广泛应用。

#### 1. 两种分析的联系

定性分析和定量分析作为两种分析方法，有不同的思维模式，也存在着较大的区别；但是它们之间又存在密切的联系，在公共管理中更是“你中有我，我中有你”，需要时常配合使用。

定性分析仅仅分析被考察对象所包含的成分或具备的特性，它的主要功能是“解释”，

通常用描述性语句表达有关的分析结果，主要方法有历史研究、文献研究、观察研究、逻辑分析、内容分析、实地考察、个案研究等。例如，对全国2007年的交通状况可以做“较好”的评价；还可以做“比2006年更好”的比较性评价。显然，这两种评价都是对全国2007年交通状况的定性描述，而这种描述本身是建立在定性分析的基础上的。再如，可以对某个人做这样的介绍：“中等个子，较胖，工作认真负责，性格比较内向……”，其中包含对外貌特征——身材的介绍，以及对个性、工作态度的介绍都是建立在定性分析的基础上的。

随着数学的发展，特别是应用数学在科学技术和社会科学领域的广泛应用，越来越多的问题需要用“数量”来描述事物内部诸多因素之间或多个对象之间的数量特征、数量关系与数量变化。定量分析作为一门学科也迅速得到了发展，并逐步成熟。

就一般意义而言，定量分析是对一个被研究对象所包含成分的数量关系或所具备性质间的数量关系进行分析；也可以对几个对象的某些性质、特征、相互联系从数量上进行分析比较。定量分析的主要功能是“实证”，研究的结果也用“数量”加以描述。例如，可以用“2007年全国的交通事故率比2006年下降了5%”来反映“2007年的交通状况比2006年更好”。这里的5%不是任意的猜测，而是对2006年和2007年全国的交通事故做统计分析和比较的结果。由“交通事故率”的例子可见两种分析方法对同一问题有各自的分析标准，但是内在联系密切。

## 2. 两种分析的区别

定量分析在方法论、研究范式、逻辑过程、研究方式和资料获取方式等多个方面都有别于定性分析的明显特征，见表1-1。

表1-1 定量分析方法与定性分析方法的比较

	定量分析	定性分析
方法论	科学主义	人本主义
研究范式	实证预测	理解释义
逻辑过程	演绎推理	归纳推理
理论模式	假设检验	理论建构
研究目的	确定相关、因果关系	理解现象意义
研究方式	实验、调查	实地研究
资料收集	量表、问卷	参与观察、深度访谈
分析方法	统计分析等	文字描述
研究特征	客观性	主观性



定量分析遵循科学主义的方法论传统。科学主义是近代自然科学自牛顿以来确立的一种方法论观点，这种观点认为社会现象与自然现象尽管在表现形式上有所不同，但在本质上都是客观的、因果性的和有规律的，因而是可以观察、实验和概括的，可以用数学形式对社会和自然现象进行分析和概括。而定性分析则基于人本主义方法论，这种思潮认为，社会现象与自然现象根本不同，社会现象在本质上是不可能客观地进行分析和说明的，只能通过理解和释义来整体把握。定量分析着眼于对假设、理论的实证和对现象变化的预测，而定性分析更强调对现象的理解和诠释。定量分析更多地运用演绎推理，从一般假设中推出结论，再对结论进行检验，而定性分析则强调归纳和整体把握，通过对概念的分析和释义得出结论。总之，与定性分析方法相比，定量分析方法具有以下三个基本特征。

(1) 实证性：即定量分析的过程和结果是可以检验的。定量分析是运用适当的数学方法对有关特定问题的数据进行分析，分析过程的每一个阶段和结果都可以明确表示出来，接受逻辑的和事实的检验。实证性是定量分析区别于定性的、思辨的分析方法的最本质特征。

(2) 明确性：定量分析所采用的概念一般都具有明确定义，并且一般不使用模棱两可的语言来表达，因而在一般情况下不会引起歧义，从而使分析过程和分析的结果易于理解。

(3) 客观性：即定量分析的结果是独立于分析者的，不论是什么人，只要对相同的数据应用相同的方法都会得出相同的结果，这并不是说就剥夺了分析者的自由。出于不同的研究目的，对于相同的数据，分析者可以采用不同的方法处理，从而得出不同的结果。还有一种可能，即分析者对同样的数据采用不同的分析方法，得出相同或相近的结果，这就是社会科学中所谓的“三解定位”，它由美国社会科学家 D·T·坎贝尔(D.T.Campbell)提出，这种方法强调对同一对象采用多种不同的定量分析方法，结果一致则表明分析结果的有效性。

### 1.1.3 定量分析方法的应用

以统计学、运筹学、现代管理学、系统工程为代表的定量分析方法的应用遍及工程技术和社会经济的各个方面。

(1) 社会科学。社会科学的研究对象是整个社会、包括经济、政治、意识形态等各个领域，是一个开放的、复杂的系统，具有多层次、多区域、多阶段的特点。如社会保障问题、人力资源系统的开发与管理、人口预测与控制、法制建设等都是典型的研究领域。近年来，应用定性与定量相结合的方法，多种学科综合运用共同处理社会问题，已取得了许多研究成果，形成了定量社会学。

(2) 环境问题。环境生态研究包括大气生态系统、海洋生态系统、大地生态系统、流

域生态系统、森林与生物生态系统、城市生态系统等分析、规划、建设、防治等方面的问题，以及环境检测系统、环境计量预测等问题。

(3) 能源问题。主要研究能源合理结构、能源需求预测、能源开发规模预测、能源生产优化、能源合理利用和供应保障、节能、环境保护、电力规划、电力生产和传输、能源数据库等问题。

(4) 农业问题。主要研究农业发展战略、大农业及立体农业的战略规划、农业结构分析、农业区域规划、农业政策分析、农业投资规划、农产品需求预测、农业投入-产出分析、农作物合理布局、农作物栽培技术规范化、农业系统多层次开发等。

(5) 交通问题。主要研究铁路、公路、水运、航空综合运输规划及其发展战略、铁路调度系统、公路运输调度系统、水运调度系统、空运调度系统、综合运输效益分析、城市公共交通规划与监控、管理等。

(6) 科技教育与工程项目管理。科技教育管理包括科学技术发展战略研究、科学技术预测、优先发展领域分析、科学技术评价、人才需求预测、人才与教育规划、人才结构分析、科技教育政策分析、科研管理系统等。工程项目管理包括工程项目的总体设计、可行性分析、国民经济评价、工程进度管理、工程质量管理和风险管理、工程成本、效益分析等。

## 1.2 线性代数知识

矩阵是一种非常有用的数学工具。由于引入了矩阵的概念并建立了一整套矩阵运算规则，使原来复杂繁琐的代数运算问题被表达得简单清晰。本书的部分章节涉及矩阵代数的知识，为使学习方便，有必要学习或复习有关线性代数的知识。

### 1.2.1 矩阵的定义和类型

将  $n \times p$  个实数  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $j=1,2,\dots,p$ ) 排成一个  $n$  行,  $p$  列的方阵:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

则称  $A$  为  $n \times p$  矩阵，简称矩阵。 $a_{ij}$  称为矩阵  $A$  中第  $i$  行第  $j$  列上的元素。当  $p=n$  时， $A$  称为  $n$  阶方阵。

矩阵中的每一行或每一列都可以被看成是一个向量。若  $p=1$ ,  $A$  只有一列, 称为列向量, 若  $n=1$ ,  $A$  只有一行, 称为行向量。一般行向量横写, 列向量竖写。

若  $A$  的元素全为零, 则  $A$  称为零矩阵, 记作  $A=0$ 。若  $A$  为方阵, 则  $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$  称为它的对角线元素, 其他元素  $\{a_{ij}, i \neq j\}$  称为  $A$  的非对角线元素。若方阵  $A$  的非对角线元素全为零, 则称  $A$  为对角阵, 简记成:

$$A = \text{diag}(a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn})$$

进一步, 若  $a_{11} = \dots = a_{nn} = 1$ , 则称  $A$  为  $n$  阶单位矩阵, 简单记成  $A=1_n$  或  $A=1$ 。

若  $A$  为  $n \times p$  阵, 把矩阵  $A$  的行、列互换, 就得到  $A$  的转置矩阵  $A'$ :

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1p} & a_{2p} & \dots & a_{np} \end{bmatrix}$$

例如, 矩阵:

$$B = \begin{bmatrix} 6 & 5 & 7 \\ 4 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

$B$  的转置矩阵为:

$$B' = \begin{bmatrix} 6 & 4 \\ 5 & 3 \\ 7 & 6 \end{bmatrix}$$

若方阵  $A$  与自己的转置矩阵  $A'$  相等, 即  $A=A'$ , 则称  $A$  为对称矩阵。

例如, 矩阵:

$$C = C' = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

就是一个对称矩阵。

## 1.2.2 矩阵运算

### 1. 相等

当两个矩阵的行、列数目完全相等, 且所有元素都相等时, 称这两个矩阵相等。例如:

$$A = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 4 \end{bmatrix}$$