

06

第二辑

数学科学文化理念传播丛书

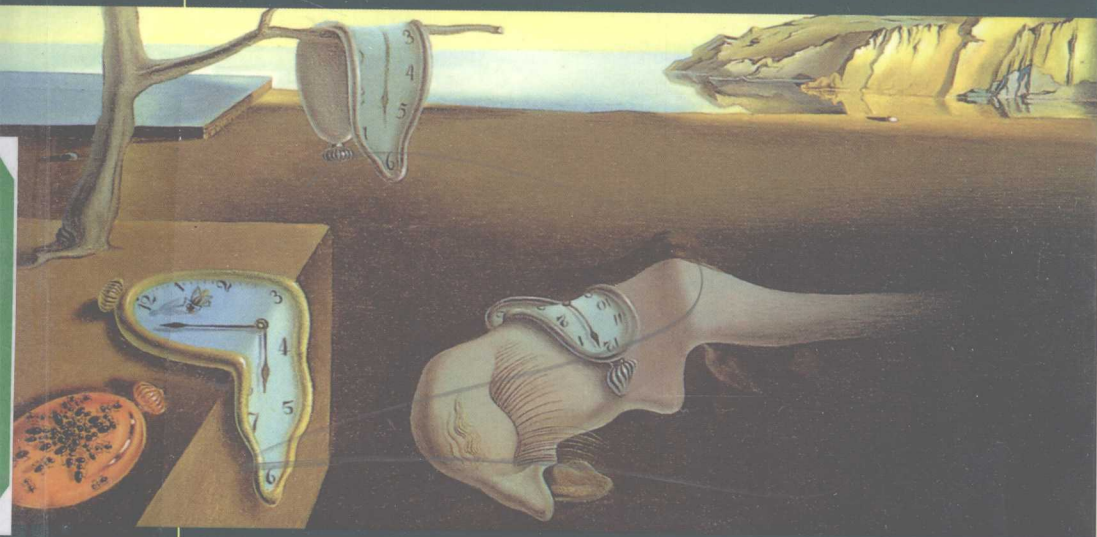
丛书主编 丁石孙



数学与哲学

MATHEMATICS AND PHILOSOPHY

著 张景中



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS



01-0/48
:2(6)
2008

数学科学文化理念传播丛书
丛书主编 丁石孙

06
第二辑

数学与哲学

MATHEMATICS AND PHILOSOPHY

著 张景中



大连理工大学出版社
DALIAN UNIVERSITY OF TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

数学与哲学/张景中著. —大连:大连理工大学出版社,
2008.7

(数学科学文化理念传播丛书)

ISBN 978-7-5611-4284-4

I. 数… II. 张… III. 数学哲学问题—研究 IV. O1-0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 109661 号

大连理工大学出版社出版

地址:大连市软件园路 80 号 邮政编码:116023

发行:0411-84708842 邮购:0411-84703636 传真:0411-84701466

E-mail:dutp@dutp.cn URL:<http://www.dutp.cn>

大连图腾彩色印刷有限公司印刷 大连理工大学出版社发行

幅面尺寸:147mm×210mm 印张:6.5 字数:116千字
2008年7月第1版 2008年7月第1次印刷

责任编辑:刘新彦 梁 锋 责任校对:知 轩
封面设计:宋 蕾

ISBN 978-7-5611-4284-4

定价:22.00元



数学科学文化理念传播丛书·第二辑

编写委员会

丛书主编 丁石孙

委 员(按姓氏笔画排序)

王 前	史树中	刘新彦
齐民友	张祖贵	张景中
张楚廷	汪 浩	孟实华
胡作玄	徐利治	



写在前面*

—

20世纪80年代钱学森同志曾在一封信中提出了一个观点,他认为数学应该与自然科学和社会科学并列,他建议称之为数学科学。当然,这里问题并不在于是用“数学”还是用“数学科学”,他认为在人类整个知识系统中,数学不应该被看成是自然科学的一个分支,而应提高到与自然科学和社会科学同等重要的地位。

我基本上同意钱学森同志的这个意见。数学不仅在自然科学的各个分支中 useful,同时在社会科学的很多分支中也有用。随着科学的飞速发展,不仅数学的应用范围日益广泛,同时数学在有些学科中的作用也愈来愈深刻。事实上,数学的重要性不只在它于它与科学的各个分支有着广泛而密切的联系,而且数学自身的发展水平也在影响着人们

* “一”为丁石孙先生于1989年4月为《数学·我们·数学》丛书出版所写,此处略有改动;“二”为丁先生为本丛书此次出版而写。



的思维方式,影响着人文科学的进步。总之,数学作为一门科学有其特殊的重要性。为了使更多人能认识到这一点,我们决定编辑出版《数学·我们·数学》这套小丛书。与数学有联系的学科非常多,有些是传统的,即那些长期以来被人们公认与数学分不开的学科,如力学、物理学以及天文学等。化学虽然在历史上用数学不多,不过它离不开数学是大家都看到的。对这些学科,我们的丛书不打算多讲,我们选择的题目较多的是那些与数学的关系虽然密切,但又不大被大家注意的学科,或者是那些直到近些年才与数学发生较为密切关系的学科。我们这套丛书并不想写成学术性的专著,而是力图让更大范围的读者能够读懂,并且能够从中得到新的启发。换句话说,我们希望每本书的论述是通俗的,但思想又是深刻的。这是我们的目的。

我们清楚地知道,我们追求的目标不容易达到。应该承认,我们很难做到每一本书都写得很好,更难保证书中的每个论点都是正确的。不过,我们在努力。我们恳切希望广大读者在读过我们的书后能给我们提出批评意见,甚至就某些问题展开辩论。我们相信,通过讨论与辩论,问题会变得愈来愈清楚,认识也会愈来愈明确。

二

大连理工大学出版社的同志看了《数学·我们·数学》这套丛书,认为本套丛书的立意与该社目前正在策划的《数



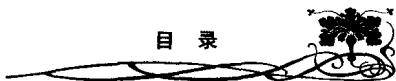
学科学文化理念传播丛书》的主旨非常吻合,因此出版社在征得每位作者的同意之后,表示打算重新出版这套书。作者经过慎重考虑,决定除去原版中个别的部分在出版前要做文字上的修饰,并对诸如文中提到的相关人物的生卒年月等信息作必要的更新之外,其他基本保持不动。

在我们正准备重新出版的时候,我们悲痛地发现我们的合作者之一史树中同志因病于上月离开了我们。为了纪念史树中同志,我们建议在丛书中仍然保留他所做的工作。

最后,请允许我代表丛书的全体作者向大连理工大学出版社表示由衷的感谢!

丁石孙

2008年6月



目 录

一 “万物皆数”观点的破灭与再生	
——第一次数学危机与实数理论	1
1.1 毕达哥拉斯学派的信条——万物皆数	2
1.2 第一个无理数	3
1.3 无理数之谜	5
1.4 连续性的奥秘	6
1.5 戴德金分割	8
1.6 连续归纳原理	11
1.7 “万物皆数”的再生	13
二 哪种几何才是真的	
——非欧几何与现代数学的“公理”	15
2.1 欧几里得的公理方法	15
2.2 欧几里得的几何定理是真理吗	17
2.3 非欧几何的发现	19
2.4 哪一个是真的	21
2.5 公理是什么	24
三 变量·无穷小·量的鬼魂	
——第二次数学危机与极限概念	27



3.1	数学怎么描述运动与变化	29
3.2	瞬时速度	32
3.3	微分是量的鬼魂吗	34
3.4	无穷小量的再生	38
四	自然数有多少	
	——数学中的“实在无穷”概念	41
4.1	伽利略的困惑	42
4.2	康托, 闯入无穷王国的先锋	44
4.3	希尔伯特的“无穷旅店”	48
4.4	所有的无穷都一样吗	50
4.5	自然数究竟有多少	56
五	罗素悖论引起的轩然大波	
	——第三次数学危机	59
5.1	逻辑——集合——数	60
5.2	罗素悖论	62
5.3	集合的层次理论	64
5.4	集合论的公理化	65
5.5	连续统假设	67
5.6	地平线仍在前方	69
六	数是什么	
	——对数学对象本质的几种看法	73
6.1	1是什么	74
6.2	柏拉图主义——数存在于理念世界	77
6.3	唯名论观点	



—数是纸上的符号或头脑中特定的概念	81
6.4 康德:数是思维创造的抽象实体	82
6.5 约定论的观点——数学规则不过是人的约定	84
6.6 逻辑主义——算术是逻辑的一部分	85
6.7 直觉主义——数学概念是自主的智力活动	87
6.8 形式主义——把数学化为关于有限符号排列的操作	90
七 是真的,但又不能证明	
—哥德尔定理	95
7.1 哥德尔定理	98
7.2 说谎者悖论与理查德悖论	99
7.3 算术有多少种	101
7.4 数学的力量与局限	104
八 数学与结构——布尔巴基学派的观点	107
8.1 在逻辑长链的背后	110
8.2 形形色色的加法	113
8.3 基本的结构	118
8.4 分析与综合的艺术	122
九 命运决定还是意志自由	
—必然性与偶然性的数学思考	127
9.1 两种对立的哲学观点	129
9.2 从偶然产生必然	137
9.3 从必然产生偶然	140
9.4 一场风或一口痰能影响民族的命运吗	143



9.5 什么叫必然 什么叫偶然	147
十 举例子能证明几何定理吗	
——演绎与归纳的对立与统一	151
10.1 例证法——用演绎支持归纳	152
10.2 几何定理也能用例子证明	154
10.3 进一步的思考	159
十一 数学与哲学随想	164
11.1 数学的领域在扩大 哲学的地盘在缩小	164
11.2 数学始终在影响着哲学	166
11.3 抽象与具体	169
11.4 涉及具体问题时 语言必须精确严格	170
11.5 个别与一般	172
11.6 事物与概念	175
11.7 “我不需要这个假设”	176
11.8 证实与证伪	179
11.9 数学世界是人的创造 但它是客观的	180
11.10 事物的总体性	182
11.11 变化中的不变	183
11.12 预言	185
11.13 “没有两件事物完全一样”	187
11.14 物极必返	188
11.15 量变与质变	189
11.16 罗素与“事素”	191



一 “万物皆数”观点的破灭与再生

——第一次数学危机与实数理论



古代的哲学家们往往是博学多才的人。他们不但能滔滔不绝地讲他们的哲学道理，也能讲自然科学、社会科学，特别是数学。你不要以为这是因为古人特别聪明，或是后来哲学家们退化了。那时，各门科学还没有分家，哲学是包罗万象的知识部门。而且那时人类的知识比现在贫乏得多。所谓博学，是相对于当时多数人知识贫乏而言的。实际上，古代所谓精通数学的哲学家，他的数学知识未必赶得上今天的一般中学生。

在古希腊，哲学家大都格外重视数学。最早的唯物主义哲学家泰勒斯，提出了原子唯物论的德谟克里特，最早的唯心主义哲学家毕达哥拉斯，都曾到埃及学习几何知识。创立理念论唯心主义体系的柏拉图，也特别推崇数学知识。在这些人当中，最强调数学的，在数学上成就最大的，当推



毕达哥拉斯。

1.1 毕达哥拉斯学派的信条——万物皆数

毕达哥拉斯曾游历埃及、波斯学习几何、语言和宗教知识。回意大利后在一个名叫克罗顿的沿海城市定居。他招收了三百门徒,建立了一个带有神秘色彩的团体,被称为毕达哥拉斯学派。

毕达哥拉斯被他的门徒们奉为圣贤。凡是该学派的发明、创见,一律归功于毕达哥拉斯。这个学派传授知识,研究数学,还很重视音乐。“数”与“和谐”,是他们的主要哲学思想。

他们沉醉于数学知识带给他们的快慰,产生了一种幻觉:数是万物的本原。数产生万物,数的规律统治万物。

他们认为:1是最神圣的数字。1生2,2生诸数,数生点,点生线,线生面,面生体,体生万物。首先生出水、火、气、土四大元素,四大元素又转化出天、地、人及万事万物。

现在看来,“万物皆数”的说法当然是荒唐可笑的。但是,毕达哥拉斯在古代哲学中最早指出事物间数量关系所起的重要作用,这在人类认识史上是一个进步。

与此类似,中国古代有“一生二、二生三、三生万物”的说法。这也是万物皆数的哲学思想。但不像毕达哥拉斯那么认真,那么明确,那么系统。

有趣的是,正是毕达哥拉斯自己的发现,导致“万物皆



数”观点的破灭。

1.2 第一个无理数

毕达哥拉斯在欧洲是第一个发现了勾股定理并给出了证明的人。据说,他是观察地板上的方形图案时,发现直角三角形斜边上正方形的面积恰好是两条直角边上正方形面积之和,于是受到启发,进一步找出了一般证明的。(图 1)

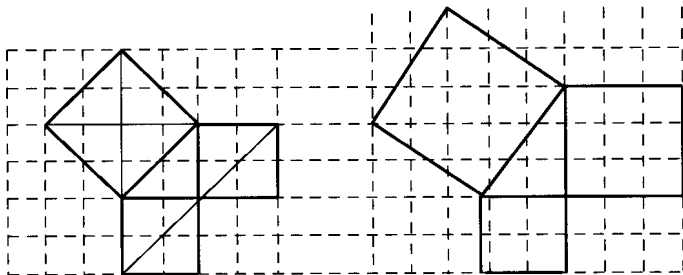


图 1

根据勾股定理,边长为 1 的正方形,其对角线的长度应当是 $\sqrt{2}$ 。毕达哥拉斯(也许是他的门徒)发现, $\sqrt{2}$ 既不是自然数,也不是分数。因为,如果有两个自然数 m 和 n 使

$$\sqrt{2} = \frac{n}{m}, (\frac{n}{m} \text{ 既约}) \quad (1.1)$$

则两端平方以后便可得

$$2m^2 = n^2 \quad (1.2)$$

从(1.2)可见 n 是偶数,因为 $\frac{n}{m}$ 既约,所以 m 是奇数。于是(1.2)左端不能被 4 整除,右端可以被 4 整除。这是个



矛盾。

这个事实的发现，是毕达哥拉斯学派的一大成就。因为它不能从经验与观察得出，只能靠抽象的思考证明。它标志着人类的思维有了更高的抽象能力。

关于勾股定理，在中国、巴比伦，有数学家比毕达哥拉斯知道得早得多。但东方数学家始终没有发现 $\sqrt{2}$ 不能表为分数这一矛盾。这也许与东方数学仅着重于解决实际问题，忽视抽象思维有关。这一现象颇有趣。也许数学史与哲学史的研究者能从社会、政治、文化的角度作更好的说明。

但这一发现引起了毕达哥拉斯学派的惶恐不安。因为他们心目中的数只有自然数与自然数之比——分数。万物皆数，就是万物皆可用自然数或分数表示。如今发现边长为1的正方形的对角线这个明明白白地摆在那里的东西竟不能用“数”表示，岂不证明自己学派的信条不是真理吗？

毕达哥拉斯学派千方百计封锁，不让这一发现传出去。甚至把泄露了这一秘密的一位青年门徒抛入大海（另一说法是这一门徒发现了 $\sqrt{2}$ ，因而对“万物皆数”有异议，被抛入海），但这个发现最后终于被传播开来。

当时研究数学的希腊学者们，虽然不一定赞同“万物皆数”的观点，但却仍认为在数学当中，算术比几何更基本，更重要。现在知道了有些几何线段不能用数表示，便对数的重要性有了怀疑，转而把几何看成更基本的数学了。于是，几何学的研究便繁荣昌盛起来。直到非欧几何被发现，几



何在数学中的基础地位才又让位于算术。

1.3 无理数之谜

本来,哲学家们认为世界上的量都可以用数表示。因为分数可以描述极小极小的量。在一根长度为 1 的线上,中点可以用 $\frac{1}{2}$ 表示,把线分成 3 段,分点可以用 $\frac{1}{3}$ 和 $\frac{2}{3}$ 表示,分成 5 段,分点可用 $\frac{1}{5}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{3}{5}$ 、 $\frac{4}{5}$ 表示。这样,用分数可以表示的点是密密麻麻的。任何两个分数,无论多么近,它们之间还有无穷多个分数。这么多的数,居然还不能表示出线段上某些点的长度,这一事实当时的哲学家感到难以理解。数的万能的力量被否定了。这便是所谓第一次数学危机。

还有,边长为 1 的正方形的对角线的长度是什么呢?是 $\sqrt{2}$ 。 $\sqrt{2}$ 又是什么呢?它是不是数?不是数,它为什么能表示确定的几何量?是数,为什么求不出它的准确值?在这个问题上,欧洲哲学家与数学家在两千多年中一直陷在迷雾之中。数学家们一方面为了解题不得不使用根式,另一方面又说不清带根号而得不出准确值的东西是不是数。直到 17 世纪,还有一些数学家坚决不承认无理数是数。

无理数之谜与连续性的概念密切相关。



1.4 连续性的奥秘

世界上有些平平常常的事,仔细想想又有点怪。比如说,两个朋友几天不见了,偶然在街上碰见,彼此马上就能认出来,打招呼。能认出来,似乎是当然的事。但细追究起来,这又很怪。几天之内,两人的模样变了没有呢?当然变了。要是几天之内不变,那几年、几十年也不会变,人怎么能由小到大,到老呢。既然变了,又为什么能认出来呢?只能说,变化很小。变化小到什么程度呢?时间越短,变得越小。如果你盯着一个婴儿不停地看,你简直不可能说他在变。但几年之后,他确实明显变大了。这变化是逐渐地,不间断地。

世界上的事物在不停地变化。但我们仍能知道甲是甲,乙是乙,这就是因为事物的变化大多是一点一点改变的,通常不会一下子突然变个样。这就给我们一个感觉:许多变化是连续的。

事物变化的连续性是我们的感觉。感觉不一定准确。电影实际上是由许多不同的画面构成的,它不是连续变化的。但因为相继的两个画面相差甚微,我们便以为它是连续的了。我们的直觉告诉我们,世界上许多事物的变化是真正连续的,不是像电影那样由微小的跃变所组成的。测量技术永远不可能证实这种直觉。事实上,如果物质由分子、原子组成,事物的成长是不可能连续进行的。但这仍不妨碍我们形成“连续”的概念。我们可以想:时间的变化是