普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导

# 线性代数学习指导

张小向　陈建龙　编

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育"十一五"国家级规划教材配套辅导

# 线性代数学习指导

张小向　陈建龙　编

科学出版社
北京

# 内 容 简 介

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《线性代数》(陈建龙等编)的配套教学辅导用书,同时其内容又自成相对独立的体系,因而适合更多读者的需要.

本书按《线性代数》的编排顺序逐章编写,共五章,每章的主体内容分为四节,分别是“预习建议”、“友情提醒”、“典型例题赏析”和“习题答案”.其中“友情提醒”包含了一些值得学生注意的地方,让初学者少走弯路.“典型例题赏析”收集了经典的题目作为例题,配以详细的讲解和点评,帮助学生巩固所学的知识、举一反三.“习题答案”注重阐明解题的思想方法,部分例题和习题还给出了多种解法,有助于教材内容的融会贯通.在附录中介绍了本课程的学习方法、解题方法以及初等变换的8个应用,并通过框图和表格的形式对本课程的知识点进行了概括,为学习线性代数课程的学生提供帮助.

本书可作为高等院校工科和其他非数学类专业线性代数课程的学习参考书,也可作为考研的复习指导书.

**图书在版编目(CIP)数据**

线性代数学习指导/张小向,陈建龙编.—北京:科学出版社,2008
普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套辅导
ISBN 978-7-03-021177-4

Ⅰ.线… Ⅱ.①张…②陈… Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料
Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第025054号

责任编辑:赵 靖 / 责任校对:陈玉凤
责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版
北京东黄城根北街16号
邮政编码:100717
http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008年3月第 一 版 开本:B5(720×1000)
2008年3月第一次印刷 印张:10
印数:1—5 000 字数:189 000

**定价:17.00元**

# 前　　言

普通高等教育"十一五"国家级规划教材《线性代数》(陈建龙等编)已于 2007 年 2 月由科学出版社出版. 本书是该教材的配套教学辅导用书.

和上述教材的内容相对应,本书共分五章,并安排了附录. 每章开头配有一首"诗",旨在帮助读者领会本章的主题. 每章的主体内容分为四节,分别是"预习建议"、"友情提醒"、"典型例题赏析"和"习题答案". 其中的"预习建议"非常简短,为初学者预习教材提供一些建议."友情提醒"包含了一些值得学生注意的地方,目的是让初学者少走弯路. 至于"典型例题赏析",顾名思义,它收集了本课程中一些经典的题目作为例题,配以详细的讲解和点评,帮助学生巩固所学的知识. 考虑到上述教材中的课后习题比较丰富,有些习题具有一定的难度,而且很多使用该教材的读者建议我们给出参考答案,因此,我们在"习题答案"中对于其中部分中等难度的题目给出了提示,对于难度偏大的题目给出了详细解答,其余较为容易的题目我们也给出简略的答案. 为了方便读者,我们把习题(A)中的选择题和习题(C)的题目也附上. 在附录中我们介绍了本课程的学习方法,解题方法,以及初等变换的 8 个应用,并通过框图和表格的形式对本课程的知识点进行了概括.

我们编写本书的主要目的是为初学《线性代数》的同学以及需要系统复习《线性代数》的同学提供帮助. 我们的指导思想是帮助学生掌握有效的学习方法,化被动地接受知识为主动地吸取知识,从而使学生在学习过程中处于主体地位.

周建华教授对本书提出了许多宝贵的意见和建议,我们在此向他表示感谢.

我们希望读者在使用本书的时候,心情是轻松愉快的,收获是超乎预料的. 如果事实上达不到这样的效果,也请读者提出宝贵的意见和建议.

编　者

2007 年 12 月于南京

# 目　　录

# 第1章 矩　　阵

凡物皆数千古传，数系几度被拓展.
矩阵代数为哪般？莫过集成数与算[①].
加减数乘尚简单，矩阵乘除非等闲.
深究子式可得秩，初等变换不变量[②].

## 1.1 预习建议

### 一、初级目标

1. 明白矩阵概念的来源与定义.
2. 知道几类特殊的矩阵.
3. 明白矩阵的加法、数乘、转置等简单的运算.
4. 了解矩阵乘积的实际意义.
5. 能利用对角线法则计算 2 阶行列式与 3 阶行列式的值.

### 二、思考

1. 比较“数”与“矩阵”，考察这两个概念的区别与联系.
2. 从定义和性质这两个方面比较“数”的加法与“矩阵”的加法.
3. 从定义和性质这两个方面比较“数”的乘法与“矩阵”的数乘.
4. 从定义和性质这两个方面比较“数”的乘法与“矩阵”的乘法.
5. 通过上述比较，你是否觉得“矩阵”是“数”的推广？
6. 如果说“矩阵”的数乘和“矩阵”的乘法都是“数”的乘法的推广，那么你认为是否还可以做其他推广（比如说对于两个同类型的矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$，是否可以用对应元素相乘来定义一种新的运算）？

---

① 自古希腊哲学家、数学家、天文学家——毕达哥拉斯（约公元前 580 年～公元前 500 年）提出“凡物皆数”的观点以来，人们对数的认识不断深入. 从有理数到实数再到复数，“数”的家族不断扩展. 近代数学已经开始讨论更抽象的“数”了. 与单个的“数”相比，矩阵可以看成“批量”的数. 这里所讨论的矩阵主要是元素取自实数集的情形，其运算可以看成是以前所学的“数”的运算的集成. 而我们随后所要讨论的正是这种“集成运算”的性质和应用.

② 矩阵的秩是初等变换下的不变量，也就是说，初等变换不改变矩阵的秩.

## 1.2 友情提醒

### 一、善用矩阵益处多

1. **矩阵是一种很好的数学对象.**“数”在刻画量的多少与规模方面扮演着重要的角色,但实际问题中往往需要“成批”的“数”来表达某些信息. 这时单个的“数”显得有些不足. 当“一批”有内在联系或具有一定规律的“数”被用来表达某些相对复杂一点的信息的时候,“矩阵”的概念就“横空出世”了. 从这个角度来说,“矩阵”是“批量”表达信息的. 矩阵的运算就是对“成批”的“数”进行处理. 如果把单个的数看成单个的电子元件,那么矩阵就可以被看成是集成模块. 同时矩阵的运算也具有“集成”的特点. 比如说矩阵的乘法运算就集成了数的乘法和加法.

2. **矩阵是一种很好的数学工具.** 以后我们将会看到矩阵在线性代数中的角色就如同数在中小学数学中的角色一样. 很多相对复杂一点的问题都可以用矩阵来表达,从而用有关矩阵的理论和方法来解决. 后面我们将会看到,有关线性方程组、向量组、二次型等方面的问题都可以用矩阵的语言来描述,并且可以用矩阵的理论来解决.

3. **与矩阵有关的术语丰富了数学语言体系.** 以后我们将会看到矩阵及其运算的有关术语对于描述很多客观规律起到了很大的作用. 当我们把关于矩阵的语言翻译成关于方程组或向量组的语言时,我们会对有关的事实认识得更加清楚、更加深刻.

因此,我们从矩阵的基本概念与基本运算入手向大家介绍线性代数知识是很有道理的.

### 二、对付矩阵有诀窍

1. **退一步海阔天空,进一步柳暗花明.** 当我们处理关于矩阵以及行列式的问题时,如果对于高阶的情形觉得有困难,我们可以退一步,看看对于低阶的情形,问题变成什么样子. 简单的情形有时能够帮助我们看出一般规律. 一旦其中的一般规律被我们证明了,问题也就迎刃而解了. 这里举几个例子.

(1) 我们容易算出 2 阶范德蒙德行列式 $D_2=\begin{vmatrix}1 & 1\\ x_1 & x_2\end{vmatrix}=x_2-x_1$. 再看 3 阶范德蒙德行列式 $D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}$. 我们把 $D_3$ 中的第 2 行乘以 $(-x_1)$ 加到第 3 行得

$$D_3=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ x_1^2 & x_2^2 & x_3^2\end{vmatrix}\xlongequal{r_3-x_1r_2}\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_1 & x_2 & x_3\\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1)\end{vmatrix},$$

再把第 1 行乘以 $(-x_1)$ 加到第 2 行得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} \xlongequal{r_2-x_1r_1} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix}.$$

按第 1 列展开得

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ 0 & x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix}.$$

于是再提取每一列的公因子得

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} x_2-x_1 & x_3-x_1 \\ x_2(x_2-x_1) & x_3(x_3-x_1) \end{vmatrix} &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_2 & x_3 \end{vmatrix} \\ &= (x_2-x_1)(x_3-x_1)(x_3-x_2). \end{aligned}$$

这里,“从 2 阶到 3 阶”的做法可以帮助我们实现“从 $n-1$ 阶到 $n$ 阶”的跨越.

(2) 对于 $2n$ 阶行列式 $D_{2n}=\begin{vmatrix} a & & & & & b \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & a & b & & \\ & & c & d & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ c & & & & & d \end{vmatrix}$,我们也可以先看 $n=1,2$ 的情形,即先计算 $D_2=\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 和 $D_4=\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$. 必要时还可以再看 $D_6$. 通常情况下经过这几种简单情形的分析,我们就可以看出一般规律了.

2. **研究实例,可化抽象为具体.** 线性代数中很多概念,结论以及推理的过程在语言表述上具有抽象性. 这本来是一件好事,能实现“用简练的语言表达深刻的理论”. 但这给初学者带来一定程度的困难. 我们不妨来看几个例子.

(1) 矩阵乘积的定义. 这是本章的一个重点和难点. 建议大家从课本①上的例 1.36 入手,体会两个矩阵乘积的意义.

这里再详细解析课本上的例 1.7,帮助大家弄懂为什么 $\boldsymbol{A}^2$ 表示从ⓘ市经一次中转到ⓙ市的单向路线的所有情况(其中 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{4\times4}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 为邻接矩

① 这里所说的“课本”是指普通高等教育“十一五”国家级规划教材《线性代数》(陈建龙等编). 下同.

阵，$a_{ij}$表示ⓘ市直达ⓙ市单向路线的数目）.

我们用 $b_{ij}$ 表示ⓘ市经一次中转到ⓙ市单向路线的数目.

先看 $i=j=1$ 的情况，即从①市经一次中转到①市单向路线的数目（图 1.1）. 由于从①市经一次中转到①市的“中转站”有 3 种选择（即②市，③市和④市），根据加法原理，只要把这 3 种情况下的数目加起来即可. 下面分别对每一种情况作进一步分析. 比如“①→②→①”可以分两步来实现. 根据乘法原理，“①→②→①”的单向路线的数目为“①→②”的单向路线的数目 $a_{12}$ 与“②→①”的单向路线的数目 $a_{21}$ 之积 $a_{12}a_{21}$. 类似地，“①→③→①”的单向路线的数目为 $a_{13}a_{31}$；“①→④→①”的单向路线的数目为 $a_{14}a_{41}$. 因此从①市经一次中转到①市的单向路线的总数为

$$b_{11}=a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{14}a_{41}.$$

注意到 $a_{11}=0$，故有 $b_{11}=a_{11}a_{11}+a_{12}a_{21}+a_{13}a_{31}+a_{14}a_{41}$.

类似地，可以得到 $b_{23}=a_{21}a_{13}+a_{24}a_{43}=a_{21}a_{13}+a_{22}a_{23}+a_{23}a_{33}+a_{24}a_{43}$（图 1.2）.

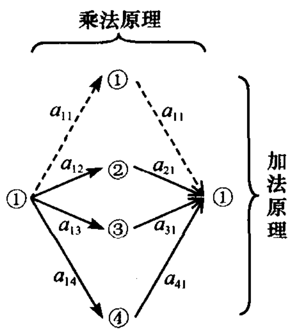


图 1.1 从①市经一次中转到①市的单向路线的总数

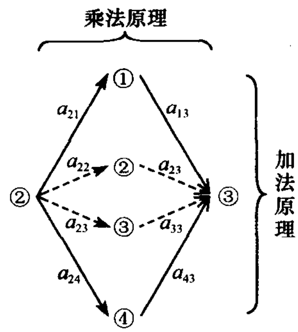


图 1.2 从②市经一次中转到③市的单向路线的总数

一般地，$b_{ij}=a_{i1}a_{1j}+a_{i2}a_{2j}+a_{i3}a_{3j}+a_{i4}a_{4j}=\sum\limits_{k=1}^{4}a_{ik}b_{kj}\ (i,j=1,2,3,4)$.

(2) 矩阵乘积的结合律. 课本上未给出证明，有些教材上给出的证明过程对于初学者来说同样很抽象. 在这里，我们通过一个具体的例子来展示其中的一般规律，尽管这不能作为“矩阵乘积的结合律”的证明.

取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}c_{11}&c_{12}\\c_{21}&c_{22}\end{pmatrix}$，则

$$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\\b_{31}&b_{32}\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31} & a_{21}b_{12}+a_{22}b_{22}+a_{23}b_{32}\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{BC}=\begin{pmatrix}b_{11} & b_{12}\\ b_{21} & b_{22}\\ b_{31} & b_{32}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}c_{11} & c_{12}\\ c_{21} & c_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21} & b_{11}c_{12}+b_{12}c_{22}\\ b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21} & b_{21}c_{12}+b_{22}c_{22}\\ b_{31}c_{11}+b_{32}c_{21} & b_{31}c_{12}+b_{32}c_{22}\end{pmatrix}.$$

$\boldsymbol{AB}$ 是 $2\times 2$ 的矩阵，$\boldsymbol{BC}$ 是 $3\times 2$ 的矩阵，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 都是 $2\times 2$ 的矩阵. 下面比较 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的对应元素. 以第一行第一列的元素为例，$(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$ 的第一行第一列的元素分别为

$$(a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31})c_{11}+(a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}+a_{13}b_{32})c_{21},$$
$$a_{11}(b_{11}c_{11}+b_{12}c_{21})+a_{12}(b_{21}c_{11}+b_{22}c_{21})+a_{13}(b_{31}c_{11}+b_{32}c_{21}).$$

不难看出二者的值是相等的. 采用“$\sum$”记号，它们可以分别表示为

$$\Big(\sum_{p=1}^{3}a_{1p}b_{p1}\Big)c_{11}+\Big(\sum_{p=1}^{3}a_{1p}b_{p2}\Big)c_{21}$$

和

$$a_{11}\Big(\sum_{q=1}^{2}b_{1q}c_{q1}\Big)+a_{12}\Big(\sum_{q=1}^{2}b_{2q}c_{q1}\Big)+a_{13}\Big(\sum_{q=1}^{2}b_{3q}c_{q1}\Big).$$

还可以进一步写成 $\sum\limits_{q=1}^{2}\Big[\Big(\sum\limits_{p=1}^{3}a_{1p}b_{pq}\Big)c_{q1}\Big]$ 和 $\sum\limits_{p=1}^{3}\Big[a_{1p}\Big(\sum\limits_{q=1}^{2}b_{pq}c_{q1}\Big)\Big]$. 比较二者的展开式可知 $\sum\limits_{q=1}^{2}\Big[\Big(\sum\limits_{p=1}^{3}a_{1p}b_{pq}\Big)c_{q1}\Big]=\sum\limits_{p=1}^{3}\Big[a_{1p}\Big(\sum\limits_{q=1}^{2}b_{pq}c_{q1}\Big)\Big]$. 相信读者能够根据这个具体的情形得到下面的一般情形.

设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times k}$，$\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{k\times s}$，$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{s\times n}$，$\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{U}=(u_{ij})_{m\times s}$，$\boldsymbol{BC}=\boldsymbol{V}=(v_{ij})_{k\times n}$，则 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{UC}$ 与 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{AV}$ 都是 $m\times n$ 矩阵，且 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{UC}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素为

$$\begin{aligned}\sum_{q=1}^{s}u_{iq}c_{qj}&=\sum_{q=1}^{s}\Big[\Big(\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pq}\Big)c_{qj}\Big]=\sum_{q=1}^{s}\Big(\sum_{p=1}^{k}a_{ip}b_{pq}c_{qj}\Big)=\sum_{p=1}^{k}\Big(\sum_{q=1}^{s}a_{ip}b_{pq}c_{qj}\Big)\\&=\sum_{p=1}^{k}\Big[a_{ip}\Big(\sum_{q=1}^{s}b_{pq}c_{qj}\Big)\Big]=\sum_{p=1}^{k}a_{ip}v_{pj}.\end{aligned}$$

它恰好是 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})=\boldsymbol{AV}$ 的第 $i$ 行第 $j$ 列的元素. 因此 $(\boldsymbol{AB})\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}(\boldsymbol{BC})$.

(3) 矩阵的初等变换与初等矩阵之间的关系. 读者验算下面这几个具体的例子就不难发现“初等行(列)变换”与“左(右)乘相应的初等矩阵”之间的联系.

① $\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&y&z\\a&b&c\\1&2&3\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a&x&1\\b&y&2\\c&z&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&0\\1&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x&a&1\\y&b&2\\z&c&3\end{pmatrix}$.

② $\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\k&2k&3k\end{pmatrix}$，$\begin{pmatrix}a&x&1\\b&y&2\\c&z&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&x&k\\b&y&2k\\c&z&3k\end{pmatrix}$.

③ $\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a&b&c\\x&y&z\\1&2&3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a+kx&b+ky&c+kz\\x&y&z\\1&2&3\end{pmatrix}$，

$\begin{pmatrix}a&x&1\\b&y&2\\c&z&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&k&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a&ak+x&1\\b&bk+y&2\\c&ck+z&3\end{pmatrix}$.

(4) 用初等变换求逆矩阵的方法.如果初学者不容易领会其原理，可以验算下面这个具体的例子.

为了求 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$ 的逆矩阵，先构造分块矩阵 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})=\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{pmatrix}$. 然后对 $(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$ 施行初等行变换，把它化为行最简形.

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+r_2}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&-2&-3&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2\times(-1/2)}\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$$

$$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow[\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{E}(2,1(-3))]{\text{左乘以}}\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow[\boldsymbol{P}_2=\boldsymbol{E}(1,2(1))]{\text{左乘以}}\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})\xrightarrow[\boldsymbol{P}_3=\boldsymbol{E}(2(-1/2))]{\text{左乘以}}\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1(\boldsymbol{A},\boldsymbol{E})$$

$$(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)=(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{E})$$

由 $(\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A},\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1)=\begin{pmatrix}1&0&-2&1\\0&1&\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 可得

$$\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{E},\quad \boldsymbol{P}_3\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

可见 $\begin{pmatrix}-2&1\\\frac{3}{2}&-\frac{1}{2}\end{pmatrix}$ 就是 $\boldsymbol{A}^{-1}$.

类似地，当 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵时，矩阵方程 $\boldsymbol{AX}=\boldsymbol{B}$ 有唯一解，$\boldsymbol{X}=\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$. 由图 1.3 所示的原理，可以得到用初等变换求 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 的方法.

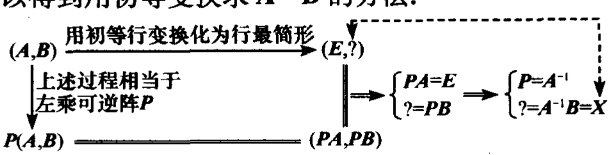


图 1.3

例如,对于矩阵方程$\begin{pmatrix}1&3\\2&5\end{pmatrix}\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}4&1\\5&2\end{pmatrix}$,由下面的初等行变换

$$\begin{pmatrix}1&3&4&1\\2&5&5&2\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-2)r_1}\begin{pmatrix}1&3&4&1\\0&-1&-3&0\end{pmatrix}\xrightarrow{r_1+3r_2}\begin{pmatrix}1&0&-5&1\\0&-1&-3&0\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3\times(-1)}\begin{pmatrix}1&0&-5&1\\0&1&3&0\end{pmatrix}$$

可知 $\boldsymbol{X}=\begin{pmatrix}-5&1\\3&0\end{pmatrix}$.

请读者思考如何求解矩阵方程 $\boldsymbol{XA}=\boldsymbol{B}$,其中 $\boldsymbol{A}$ 为可逆矩阵.

(5) 证明初等变换不改变矩阵的秩. 关键的一步是证明矩阵 $\boldsymbol{A}$ 经过倍加变换 $r_i+kr_j$ 变成 $\boldsymbol{B}$ 时,$r(\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})$. 假设 $r(\boldsymbol{A})=r$,只要说明 $\boldsymbol{B}$ 的 $r+1$ 阶子式都等于 0 即可. 这需要分 3 种情况进行讨论. 我们相信读者很容易从下面这个具体的例子看出其中的规律.

设 4 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,$\boldsymbol{A}$ 经过倍加变换 $r_1+3r_2$ 变成 $\boldsymbol{B}$,我们要说明 $\boldsymbol{B}$ 的 3 阶子式都等于 0.

$$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}&a_{14}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}a_{11}+3a_{21}&a_{12}+3a_{22}&a_{13}+3a_{23}&a_{14}+3a_{24}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}&a_{24}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}&a_{34}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}&a_{44}\end{pmatrix}=\boldsymbol{B}.$$

而 $\boldsymbol{B}$ 的 3 阶子式有 3 种情况可能出现.

① 不含 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 行元素,比如$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{vmatrix}$,这也是 $\boldsymbol{A}$ 中的 3 阶子式. 由于 $\boldsymbol{A}$ 的秩为 2,因此

$$\begin{vmatrix}a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\\a_{41}&a_{42}&a_{43}\end{vmatrix}=0.$$

② 同时含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 1,2 行元素,比如$\begin{vmatrix}a_{11}+3a_{21}&a_{12}+3a_{22}&a_{13}+3a_{23}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}$. 而

$$\begin{vmatrix}a_{11}+3a_{21}&a_{12}+3a_{22}&a_{13}+3a_{23}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=0.$$

③含有 $\boldsymbol{B}$ 的第 1 行元素,但不含 $\boldsymbol{B}$ 的第 2 行元素,比如

$$\begin{vmatrix} a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3a_{22} & a_{13}+3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}.$$

而

$$\begin{vmatrix} a_{11}+3a_{21} & a_{12}+3a_{22} & a_{13}+3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3a_{21} & 3a_{22} & 3a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

$$= 0+0=0.$$

(6) $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}\leqslant r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$. 我们通过下列例子来说明几种可能的情况，以加深大家的感性认识.

① $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$的情况.

取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&0&0\end{array}\right)$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=1$，$r(\boldsymbol{B})=0$.

② $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$的情况.

取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&0\\0&0&1\end{array}\right)$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=1$，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=2$.

③ $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})<r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$的情况.

取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc:c}1&0&1\\0&0&0\end{array}\right)$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=1$.

④ $\max\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}<r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})<r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$的情况.

取 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\\0&1\end{pmatrix}$，则$(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=\left(\begin{array}{cc:cc}1&0&0&0\\0&1&1&0\\0&0&0&1\end{array}\right)$，$r(\boldsymbol{A})=r(\boldsymbol{B})=2$，$r(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B})=3$.

对于 $r(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})\leqslant r(\boldsymbol{A})+r(\boldsymbol{B})$和 $r(\boldsymbol{AB})\leqslant\min\{r(\boldsymbol{A}),r(\boldsymbol{B})\}$，读者可以自己举几个例子来说明几种可能的情况.

3. **留心细节，以免疏忽而出错.** 由于矩阵运算(尤其是乘法)中会出现一些新的现象，比如矩阵乘积一般不适合交换律，又如两个非零的矩阵乘积可能为零矩阵等，这就要求我们在处理矩阵的问题时，保持警惕，避免出错(有些题目带有“陷阱”，考察大家对有关知识点的理解是否透彻，掌握是否牢固). 我们不妨来看几个例子.

(1) 矩阵乘积的新现象.

① $\boldsymbol{AB}$ 有意义，但 $\boldsymbol{BA}$ 无意义. 如 $\boldsymbol{A}=(1\quad 2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\3&4\end{pmatrix}$.

② $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，但不是同类型的. 如 $\boldsymbol{A}=(1\quad 2)$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=$

$(1\quad 2)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}=1\times3+2\times4=11$，而 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}(1\quad 2)=\begin{pmatrix}3&6\\4&8\end{pmatrix}$.

③ $\boldsymbol{AB}$ 与 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义而且是同类型的，但不相等. 如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$，而 $\boldsymbol{BA}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3&3\\-3&3\end{pmatrix}$.

这个例子还可以用来说明 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{B}^2$ 以及 $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{B}^2$ 未必成立.

注意：

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^2=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}+\boldsymbol{B}^2,$$
$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B})=\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{BA}-\boldsymbol{B}^2.$$

④ $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 都不为零矩阵，但 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$. 如 $\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$. 又如 $\begin{pmatrix}1&1&-2\\-2&-2&4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&2\\-1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

⑤ $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{AC}$ 且 $\boldsymbol{A}\neq\boldsymbol{O}$，但 $\boldsymbol{B}\neq\boldsymbol{C}$. 如 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1&-1\\-2&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$.

⑥ 大家再来看下面的例子能说明什么问题？

$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{BA}$，$(\boldsymbol{AB})^2=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}=\boldsymbol{A}^2\boldsymbol{B}^2$.

$\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1&1\\0&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}1&0\\1&0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{CD}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1&1\\1&1\end{pmatrix}=\boldsymbol{DC}$，$(\boldsymbol{CD})^2=\begin{pmatrix}4&0\\0&0\end{pmatrix}$，

$\boldsymbol{C}^2\boldsymbol{D}^2=\boldsymbol{CD}=\begin{pmatrix}2&0\\0&0\end{pmatrix}$.

(2) 设矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{X}$ 满足 $\boldsymbol{AXB}=\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{B}$ 都是可逆矩阵，则 $\boldsymbol{X}=(\quad)$.

(A) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{C}$； (B) $\boldsymbol{CB}^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}$； (C) $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{CB}^{-1}$； (D) $\boldsymbol{B}^{-1}\boldsymbol{CA}^{-1}$.

经过验算可知 C 为正确选项. 建议读者思考其他选项的问题出在哪里？

(3) 设 $f(x)=x^2-3x+4$，$\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，则 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+4\boldsymbol{E}$，其中 $\boldsymbol{E}$ 为 $n$ 阶单位矩阵. 初学者可能会误以为 $f(\boldsymbol{A})=\boldsymbol{A}^2-3\boldsymbol{A}+4$.

(4) 设 $\boldsymbol{A}$ 为 $n$ 阶方阵，则行列式 $|k\boldsymbol{A}|=k^n|\boldsymbol{A}|$. 初学者可能会误以为 $|k\boldsymbol{A}|=k|\boldsymbol{A}|$.

(5) 公式 $|\boldsymbol{AB}|=|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{B}|$ 要求是(同阶)方阵. 如果不注意这个前提条件，这个公式就有可能被“滥用”. 比如 $\boldsymbol{A}$ 是一个 $2\times3$ 的矩阵，$\boldsymbol{B}$ 是一个 $3\times2$ 的矩阵，则

$\boldsymbol{AB}$ 是 2 阶方阵，"$|\boldsymbol{AB}|$"是有意义的，但是"$|\boldsymbol{A}|$"和"$|\boldsymbol{B}|$"都无意义.

(6) 对于 $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\boldsymbol{D}$，$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{D}|$，但是等式"$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{B}|\times|\boldsymbol{C}|$"一般未必成立. 例如：取 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{D}=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{C}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，则

$$\begin{vmatrix}\boldsymbol{A} & \boldsymbol{B}\\ \boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{vmatrix}\xlongequal[r_2\leftrightarrow r_4]{r_1\leftrightarrow r_3}\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1,$$

而 $|\boldsymbol{A}|\times|\boldsymbol{D}|-|\boldsymbol{B}|\times|\boldsymbol{C}|=-1$.

(7) 若 $\boldsymbol{A}$ 为方阵，则可由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 推出 $\boldsymbol{A}$ 可逆，但一般情况下，仅仅由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{E}$ 不足以推出 $\boldsymbol{A}$ 可逆！例如：$\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{AB}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$，但 $\boldsymbol{A}$ 不是方阵，因此 $\boldsymbol{A}$ 不可逆. 我们可以顺便验算一下，$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$ 不是单位矩阵.

(8) $n$ 阶方阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$ 的伴随矩阵 $\boldsymbol{A}^*=\begin{pmatrix}A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1}\\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn}\end{pmatrix}$.
注意 $\boldsymbol{A}$ 中元素 $a_{ij}$ 的代数余子式 $A_{ij}$ 排在 $\boldsymbol{A}^*$ 的第 $j$ 行第 $i$ 列，而不是第 $i$ 行第 $j$ 列 $(i,j=1,2,\cdots,n)$.

(9) 注意矩阵和行列式的记号的差别. 矩阵通常用圆括号或方括号表示，而行列式用一对竖线表示. 如二阶矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\end{pmatrix}$ 有时也被写成 $\begin{bmatrix}1 & 2\\ a & b\end{bmatrix}$，而 $\begin{vmatrix}1 & 2\\ a & b\end{vmatrix}$ 则表示矩阵 $\begin{pmatrix}1 & 2\\ a & b\end{pmatrix}$ 的行列式. 另外，对于一阶的矩阵和行列式都可以直接写成数的形式，不必加记号，因为我们联系上下文可以识别其"身份".

(10) 对于可逆矩阵 $\boldsymbol{A}$，我们不把 $\boldsymbol{A}^{-1}$ 写成"$\frac{1}{\boldsymbol{A}}$"或"$\frac{\boldsymbol{E}}{\boldsymbol{A}}$"；类似的，我们不把 $\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 写成"$\frac{\boldsymbol{B}}{\boldsymbol{A}}$"，但在 MATLAB 语言中，$\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{BA}^{-1}$ 分别被写成"$\boldsymbol{A}\backslash\boldsymbol{B}$"和"$\boldsymbol{B}/$

$A$",并且分别称为"$B$ 左除以 $A$"和"$B$ 右除以 $A$". 建议大家在手工书写的时候要慎重.

(11) 对矩阵施加初等变换的过程用"→"连接,如

$$\begin{pmatrix}1&2&1&0\\3&4&0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{r_2+(-3)r_1}\begin{pmatrix}1&2&1&0\\0&-2&-3&1\end{pmatrix},$$

中间的"→"不能写成等号.

## 1.3 典型例题赏析

### 一、巧算方阵的幂

**例 1** 已知 $\boldsymbol{\alpha}=(1,2,3)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{\beta}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)^{\mathrm{T}}$,$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}$,则 $\boldsymbol{A}^4=$____.

**解**

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)=\begin{bmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=\left(1,\frac{1}{2},\frac{1}{3}\right)\begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix}=3.$$

$$\boldsymbol{A}^4=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^4=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})^3\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=\boldsymbol{\alpha}\cdot 3^3\cdot\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=27\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}=27\begin{bmatrix}1&1/2&1/3\\2&1&2/3\\3&3/2&1\end{bmatrix}.$$

[赏析] 本题的关键在于利用矩阵乘法的结合律,即

$$(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})^4=(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}})=\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})(\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}.$$

因为 $\boldsymbol{A}$ 是 3 阶方阵,直接计算其 4 次幂运算量较大,而 $\boldsymbol{\beta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}$ 是 1 阶方阵,也就是一个数,计算它的幂要容易得多.

**例 2** 已知 $\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}$,$\boldsymbol{\Lambda}=\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}=\begin{pmatrix}2&0\\0&4\end{pmatrix}$,则 $\boldsymbol{A}^5=$____.

**解**

$$\boldsymbol{P}^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1},\quad \boldsymbol{\Lambda}^5=\begin{bmatrix}2^5&0\\0&4^5\end{bmatrix}=32\begin{pmatrix}1&0\\0&32\end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^5&=(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})\\&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{E}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}\\&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^5\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}32\begin{pmatrix}1&0\\0&32\end{pmatrix}\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1&1\\1&-1\end{pmatrix}=16\begin{pmatrix}33&-31\\-31&33\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

[赏析] 本题的关键在于利用矩阵乘法的结合律,即

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})(\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1})\\&=\boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}(\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{P})\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}.\end{aligned}$$

因为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P\Lambda P}^{-1}=\begin{pmatrix}3 & -1\\ -1 & 3\end{pmatrix}$，直接计算其 5 次幂运算量较大，而 $\boldsymbol{\Lambda}$ 是对角矩阵，计算它的幂要容易得多.

**例 3**　计算 $\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}^n$，其中 $n$ 为正整数.

**解**　令 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}\lambda & 1 & 0\\ 0 & \lambda & 1\\ 0 & 0 & \lambda\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$，则 $\boldsymbol{A}=\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}$，

$$\boldsymbol{B}^2=\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^3=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

当 $n>3$ 时，$\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{O}$.

$$\boldsymbol{A}^2=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})=\lambda\boldsymbol{E}\lambda\boldsymbol{E}+\lambda\boldsymbol{E}\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{B}=\lambda^2\boldsymbol{E}+2\lambda\boldsymbol{B}+\boldsymbol{B}^2.$$

一般地，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}^n&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\lambda^n\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_n^1\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\lambda\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n\\&=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n=\lambda^n\boldsymbol{E}+\mathrm{C}_n^1\lambda^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2\lambda^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\boldsymbol{O}\\&=\lambda^n\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}+n\lambda^{n-1}\begin{bmatrix}0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}+\frac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}\\&=\begin{bmatrix}\lambda^n & n\lambda^{n-1} & \dfrac{n(n-1)}{2}\lambda^{n-2}\\ 0 & \lambda^n & n\lambda^{n-1}\\ 0 & 0 & \lambda^n\end{bmatrix}^n.\end{aligned}$$

[**赏析**]　(1) 若矩阵 $\boldsymbol{M}$ 满足 $\boldsymbol{M}^k=\boldsymbol{O}$，其中 $k$ 为某一个正整数，则称 $\boldsymbol{M}$ 为幂零阵，使得 $\boldsymbol{M}^k=\boldsymbol{O}$ 的最小的正整数 $k$ 称为 $\boldsymbol{M}$ 的幂零指数. 本题中的 $\boldsymbol{B}$ 就是一个幂零阵，其幂零指数为 3.

(2) 由上面展开 $\boldsymbol{A}^2=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})$ 以及一般的 $\boldsymbol{A}^n=(\lambda\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^n$ 的过程，实际上已经可以看出如下事实.

当方阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B}$ 满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{BA}$ 时，对于任意正整数 $n$，有

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})^n=\boldsymbol{A}^n+\mathrm{C}_n^1\boldsymbol{A}^{n-1}\boldsymbol{B}+\mathrm{C}_n^2\boldsymbol{A}^{n-2}\boldsymbol{B}^2+\cdots+\mathrm{C}_n^{n-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{n-1}+\boldsymbol{B}^n.$$