考点·重点·难点分析　分类归纳　逐题详解　透彻解析　详细注释　客观题独特解法·绝招

2002版

历届
数学考研试题研究

考点分析　应试技巧　解题训练

武忠祥　主编　魏战线　吴云江　编著

数学二

西安交通大学出版社

内 容 提 要

本书内容分为三部分:第一部分,通过典型例题介绍、归纳客观题的解题方法和技巧;第二部分,汇集了1987年至2001年全部数学考研试题,并逐题分类给出详细解答,透彻分析每题所考的知识点,归纳总结出常考的题型;第三部分,在研究分析历年试题的基础上,精心设计了有针对性的自测练习题,同时附有答案与提示供考生复习之用.

本书适合考研读者使用,也可供大专院校师生参考.

图书在版编目(CIP)数据

历届数学考研试题研究/武忠祥,魏占线,吴云江主编.—西安:西安交通大学出版社,2001.5
ISBN 7-5605-1397-2

Ⅰ.历… Ⅱ.①武…②魏…③吴… Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题 Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(2001)第16290号

*

西安交通大学出版社出版发行
(西安市兴庆南路25号 邮政编码:710049 电话:(029)2668316)
西安正华印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本:850mm×1 168mm 1/32 印张:7.75 字数:256千字
2001年5月第1版 2001年5月第1次印刷
印数:0 001~3 000
全套定价:63.00元 本册定价:12.00元

前言

任何事物的产生和发展都具有规律性,复习考试也不例外,对任何考试都要重视运用“研究过去,找出规律;认识现在,掌握重点;预测未来,胸有成竹”的思维方法.自从1987年全国工学、经济学硕士研究生入学实行统一考试以来,至今已有15年.对于数学考试,多年来的试题总是含有稳定的、普遍的、反复出现的共性.事实上,近两年的研究生入学考试数学试题(数学一,数学二,数学三,数学四)中就有近二十道试题是与往届考题完全类似、解题思路几乎完全一样的.因此,为了准备新的研究生入学考试,我们应当认真分析研究历届试题,从中发现规律,归纳出每部分内容的重点、难点及常考的题型,进一步把握考题的特点以及命题的思路和规律.

本书汇集了1987年至2001年历届全国硕士研究生入学统一考试数学试题,这些试题是考研同学了解、分析和研究全国硕士研究生入学考试最直接、最宝贵的第一手资料.考研题是命题组专家的智慧结晶,它不仅具体地反映了《考试大纲》所规定的对考生数学知识、能力和水平的测试要求,而且全面展现了考研试卷的结构,各部分试题分布,考研试题的特点,每部分内容的考点、重点和难点;同时还蕴含着命题的指导思想、基本原则和命题的趋势.本书以历届考研试题为基本素材,对每一道试题进行了详细解答和分析,对考生关心的问题进行了深入的分析、研究和总结.

本书对历年考研试题逐题给出了详细解答,并尽量做到一题多解.有很多题目的解法是我们几位作者长期从事教学和考研辅

导研究总结出来的，具有独到之处，其中有些题目的解法比标准答案的解法更简捷，甚至可以节省解题时间一半以上．另外，根据多年的考试分析，考生在客观题（即选择题和填空题）部分得分率较低．客观题共30分，占整个试卷分数约三分之一，一旦这部分失分太多，考生成绩很难上去．分析客观题得分率较低的原因，我们认为主要是考生没有很好掌握客观题特有的解法和技巧．因为同样一种素材设计成客观题与设计成非客观题，在解法上往往有很大的差异．出成客观题后，因为答题时只看结果不问过程，所以往往有独特的、巧妙的解法．因此本书在第1章通过典型例题给读者归纳总结了客观题的解题方法和技巧，以提高读者求解客观题的能力．在后面的各章中我们对历年考研客观题不仅给出了答案，而且给出了解答和分析，以便读者进一步看到第1章中介绍的客观题解题方法和技巧在每个具体问题中的灵活应用．

本书在对历年考研数学试题逐题解析的基础上，每题都给出了注释，不仅对每题所考的知识点和难点进行了分析，而且对试题的类型、每一种类型试题的解法进行了归纳总结，使考研同学能够举一反三，触类旁通；同时通过具体题目，对考生常犯的错误进行了分析，使考生引以为戒；另外针对考生普遍感到很多考研试题拿到后往往难以下手的问题，对于这样的试题在解答之前都有一个分析，通过分析解题思路和解题方法，以提高读者的破题能力．

本书把历年考研试题依据考试大纲的章节，按内容分章，每章有两个统计表，一个是本章历年试题分数统计表，另一个是本章考点分析和统计表．通过第一个表可看到，本章内容历年所考分数，通过第二个表可清楚看到本章内容的考点、重点以及这些考点重点在历届考试中考到的次数和所占的分数．我们在统计表的基础上对本章的考点、重点及常考的题型进行了归纳和总结，以利于读者在复习时抓住要害、突出重点．另外，把历年同一章内容试题放在一起，我们不难从中发现近几年的考题中有许多与往年的试题类似，因此研究往年的考题对我们准备下一年的研究生考试是很

有好处的.

本书每章后还编写了自测练习题,并附有答案与提示.一方面读者读完每章后,可用这些题目作一个自我检查;另一方面在每章通过历届考题介绍了很多解题方法和技巧后,这些自测题又给读者提供了一个很好的练习和实践的机会.通过这些练习不仅有利于读者尽快掌握这些解题方法和技巧,同时还有利于加深读者对每章内容的考点、重点及难点的理解.

另外,我们在编写自测练习题时也充分注意到近年来经济学类数学试卷(数学三,数学四)中出现了不少与工学类往年数学试卷中完全类似的题目,同样工学类试卷中也出现了与经济类往年数学试卷中类似的题目.所以,我们在编写工学类自测练习题时,充分吸收了经济类往年考题中典型的和新颖的试题;同样在经济学类的自测练习题中也充分吸收了工学类往年试题中的典型试题.这也就是说,我们的自测练习题同时也是下一年考试的预测题.

本书共有四册,(即数学一,数学二,数学三,数学四),书中的高等数学部分和客观题解题方法与技巧部分由武忠祥教授编写;线性代数部分由魏战线副教授编写;概率统计部分由吴云江副教授编写.

关于书中的记号作两点说明:一个是在试题解析中,有的试题的解法或证明前标有记号“Δ”,表示本题的这种解法或证法是作者研究和总结出的独特的解法或证法;另一个是在考点分析的表格中,在同一个考点和同一个年份会出现类似于“3+5”的数据,这表示在这一年,这个考点被两道题考到,其中一题3分,另一题5分.

限于作者水平,加之时间仓促,书中难免有不足之处,恳请读者批评指正.

编　者

2001年3月于西安交大

目 录

前言
第1章 客观题解题方法与技巧
1.1 填空题的求解方法与技巧 …… 1
1 利用几何意义 …… 1
2 利用对称性和奇偶性 …… 2
1.2 选择题的解题方法和技巧 …… 3
1 直接法 …… 3
2 排除法 …… 5

第2章 高等数学
1 函数 极限 连续 …… 11
1.1 历年试题分数统计 …… 11
1.2 历年试题 …… 11
1.3 试题解析 …… 15
1.4 考点分析 …… 25
1.5 自测练习题 …… 26
答案与提示 …… 29
2 一元函数微分学 …… 30
2.1 历年试题分数统计 …… 30
2.2 历年试题 …… 30
2.3 试题解析 …… 41
2.4 考点分析 …… 81

2.5　自测练习题 …… 82
答案与提示 …… 86

3　一元函数积分学 …… 88
3.1　历年试题分数统计 …… 88
3.2　历年试题 …… 88
3.3　试题解析 …… 99
3.4　考点分析 …… 149
3.5　自测练习题 …… 150
答案与提示 …… 154

4　常微分方程 …… 156
4.1　历年试题分数统计 …… 156
4.2　历年试题 …… 156
4.3　试题解析 …… 159
4.4　考点分析 …… 181
4.5　自测练习题 …… 182
答案与提示 …… 184

第3章　线性代数

1　行列式 …… 187
1.1　历年试题分数统计 …… 187
1.2　历年试题 …… 187
1.3　试题解析 …… 187
1.4　考点分析 …… 188
1.5　自测练习题 …… 188
答案与提示 …… 191

2　矩阵 …… 193
2.1　历年试题分数统计 …… 193
2.2　历年试题 …… 193
2.3　试题解析 …… 194

2.4 考点分析 …………………………………… 197
2.5 自测练习题 …………………………………… 199
答案与提示 …………………………………… 203
3 **线性方程组** …………………………………… 207
3.1 历年试题分数统计 …………………………………… 207
3.2 历年试题 …………………………………… 207
3.3 试题解析 …………………………………… 208
3.4 考点分析 …………………………………… 217
3.5 自测练习题 …………………………………… 218
答案与提示 …………………………………… 226
附录
2000 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题 … 230
2001 年全国硕士研究生入学统一考试数学(二)试题 … 234

第 1 章 客观题解题方法与技巧

硕士研究生入学考试数学试题中的客观题有两种,一种是填空题,另一种是选择题.客观题在研究生入学考试中占 30 分,占总分近三分之一.从目前情况看,考生在客观题部分得分率很低,正是由于这部分得分率很低,所以总分就很难上去.分析其原因主要是两方面.一方面是考生做计算题的准确率较低,基本概念和基本理论没有吃透;另一方面是考生对求解客观题的解题方法和解题技巧掌握不好.

填空题绝大部分是计算题,但填空题不像一般计算题,它只看结果,不看过程.所以,若做计算题的准确率不高,填空题很容易失分.选择题大部分主要考查基本概念和基本理论,如果基本概念和基本理论没有吃透,选择题部分也就很容易丢分.另一个方面,同一道题出成客观题后往往会有更巧妙更简单的方法.当然客观题用我们平时求解主观题的方法也能求解,但这种一般方法和简单方法从解题时间上看有时相差几倍,甚至十倍.因此,要提高客观题部分的得分率,一方面要提高做计算题的准确率,吃透基本概念和基本理论.另外一个很重要的方面就是要掌握一定的客观题的解题方法和技巧.本章主要是通过一些典型例题,归纳总结客观题解题方法和技巧.以提高考生求解客观题的能力.

1.1　填空题的求解方法与技巧

填空题绝大部分是计算题,常用的技巧有两种:一种是利用几何意义求解,另一种是利用对称性和奇偶性.

1. 利用几何意义

例 1　(00 年,数学一) $\int_0^1 \sqrt{2x - x^2}\,\mathrm{d}x =$ ________.

解　本题应填$\frac{\pi}{4}$. 本题常规的求解方法是先把$\sqrt{2x-x^2}$里面配方,再用三角代换,但计算量较大. 实际上,本题根据定积分几何意义立刻知道应填$\frac{\pi}{4}$. 事实上,该积分在几何上表示单位圆$(x-1)^2+y^2\leqslant 1$面积的$\frac{\pi}{4}$,如图 1.1.

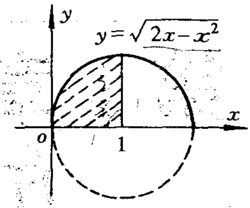

图 1.1

例 2　$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x =$ ________.

解　本题应填$\frac{\pi}{4}a^2$.

事实上,积分$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x$在几何上表示圆域$x^2+y^2\leqslant a^2$在第一象限的面积,故

$$\int_0^a \sqrt{a^2-x^2}\mathrm{d}x = \frac{\pi}{4}a^2$$

注　本题中的积分在其它计算题中也经常见到,本题中结果可直接用.

2. 利用对称性和奇偶性

例 3　(87 年,数学三、数学四) $\int_{-\pi}^{\pi} x^4\sin x\mathrm{d}x =$ ________.

解　应填 0.

由于 $x^4\sin x$ 为奇函数,且积分区间$[-\pi,\pi]$关于原点对称.

例 4　(94 年,数学三,数学四) $\int_{-2}^{2} \frac{x+|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x$ ________.

解　应填 ln3.

$$\begin{aligned}\text{原式} &= \int_{-2}^{2}\frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x + \int_{-2}^{2}\frac{|x|}{2+x^2}\mathrm{d}x \\ &= 0 + 2\int_0^2 \frac{x}{2+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \ln(2+x^2)\Big|_0^2 = \ln 3\end{aligned}$$

例 5　(01 年,数学二) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (x^3+\sin^2 x)\cos^2 x\mathrm{d}x =$ ________.

解　应填$\frac{\pi}{8}$.

$$\text{原式} = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} x^3\cos^2 x\mathrm{d}x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= 0 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cos^2 x\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x(1 - \sin^2 x)\mathrm{d}x$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\mathrm{d}x - 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 x\mathrm{d}x$$

$$= 2\left[\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2} - \frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\right] = \frac{\pi}{8}$$

注 本题中用到基本公式 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\mathrm{d}x = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{n-3}{n-2}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}$，($n$ 为偶数).

1.2 选择题的解题方法和技巧

研究生入学考试数学试卷中的选择题是单项选择题.所谓单项选择题也就是四个选项中有且仅有一个选项是正确的.因此,常用的解题方法是两大类:一种是直接验证某个选项正确,则其余选项必定不正确(不必验证).这种方法通常称为**直接法**;另一种方法是验证其中三个选项不正确,则剩下的一个选项必定正确(也不必验证),这种方法通常称作**排除法**

1. 直接法

直接法就是直接验证某个选项正确,通常有两种途径:一种是通过直接计算或推演得出某个选项正确,这种方法通常称为**推演法**;另一种方法是借助几何分析得出正确选项.这种方法叫**几何法**.下面举例说明推演法和几何法的应用.

1) 推演法

例 1 (91 年,数学一,数学二) 曲线 $y = \dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}}$

(A) 没有渐近线. (B) 仅有水平渐近线.

(C) 仅有铅直渐近线. (D) 既有水平渐近线也有铅直渐近线.

解 因为 $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1+\mathrm{e}^{-x^2}}{1-\mathrm{e}^{-x^2}} = 1$，则原曲线有水平渐近线 $y = 1$，又

$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1+e^{-x^2}}{1-e^{-x^2}}=\infty$，则原曲线有铅直渐近线 $x=0$，所以应选(D).

例 2　(93 年，数学一，数学二) 设 $f(x)=\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t$，$g(x)=x^3+x^4$，则当 $x\to 0$ 时，$f(x)$ 是 $g(x)$ 的

(A) 等价无穷小.　　　　(B) 同阶但非等价无穷小.

(C) 高阶无穷小.　　　　(D) 低阶无穷小.

解

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^{\sin x}\sin(t^2)\mathrm{d}t}{x^3+x^4}=\lim_{x\to 0}\frac{\sin(\sin^2 x)\cos x}{3x^2+4x^3}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{3x^2+4x^3}=\frac{1}{3}$$

则应选(B).

例 3　(98 年，数学三，数学四) 设周期函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内可导，周期为 4，又 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=-1$，则曲线 $y=f(x)$ 在点 $(5,f(5))$ 处的切线斜率为

(A) $\dfrac{1}{2}$　　(B) 0　　(C) -1　　(D) -2

解　$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1)-f(1-x)}{2x}=\dfrac{1}{2}\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(1-x)-f(1)}{-x}=\dfrac{1}{2}f'(1)=-1$.

则　$f'(1)=-2$，由 $f'(x)$ 周期性知，$f'(5)=f'(1)=-2$

故应选 (D).

2) 几何法

例 4　(97 年，数学一，数学二) 设在区间 $[a,b]$ 上 $f(x)>0$，$f'(x)<0$，$f''(x)>0$，令 $S_1=\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$，$S_2=f(b)(b-a)$，$S_3=\dfrac{1}{2}[f(a)+f(b)](b-a)$ 则

(A) $S_1<S_2<S_3$　　　　(B) $S_2<S_1<S_3$

(C) $S_3<S_1<S_2$　　　　(D) $S_2<S_3<S_1$

解　由题设可知，在 $[a,b]$ 上，$f(x)>0$ 单调减，曲线 $y=f(x)$ 上凹，如图 1.2，S_1 表示 $y=f(x)$ 和 $x=a$，$x=b$ 及 x 轴围成曲边梯形面积，S_2 表示矩形 $abBC$ 的面积，S_3 表示梯形 $AabB$ 的面积，由图 1.2 可知. $S_2<S_1<S_3$. 故应选(B).

例 5　(97 年，数学三，数学四) 若 $f(-x)=f(x)$，$(-\infty<x<+\infty)$，

在$(-\infty, 0)$内$f'(x)>0$，且$f''(x)<0$，则在$(0, +\infty)$内

(A) $f'(x)>0,\ f''(x)<0$

(B) $f'(x)>0,\ f''(x)>0$

(C) $f'(x)<0,\ f''(x)<0$

(D) $f'(x)<0,\ f''(x)>0$

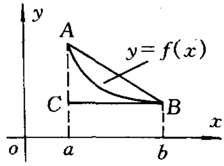

图 1.2

解　由$f(-x)=f(x)$知，$f(x)$为偶函数，而由在$(-\infty, 0)$内$f'(x)>0$，且$f''(x)<0$知在$(-\infty, 0)$内，$y=f(x)$的图形下凹单调增，则$f(x)$如图 1.3 可知，在$(0, +\infty)$内，$f'(x)<0$，$f''(x)<0$，则应选(C).

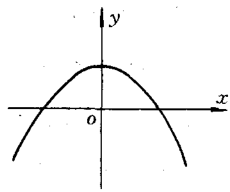

图 1.3

2. 排除法

所谓排除法就是说明原题四个选项中某三个均不正确，则剩余一个选项必然正确；这种方法在使用时通常是举反例。

例 6　(96 年，数学二) 设函数$f(x)$在区间$(-\delta, \delta)$内有定义，若当$x\in(-\delta,\delta)$时，恒有$|f(x)|\leqslant x^2$，则$x=0$必是$f(x)$

(A) 间断点.

(B) 连续而不可导的点.

(C) 可导的点，且$f'(0)=0$.

(D) 可导的点，且$f'(0)\neq 0$.

解　令$f(x)=x^3$，显然$x\in(-\delta,\delta)$时，$|f(x)|=|x^3|\leqslant x^2$. 且$f'(x)=3x^2$，$f'(0)=0$，则(A) (B) (D) 均不正确，故应选(C).

例 7　(90 年，数学一，数学二) 已知$f(x)$在$x=0$某邻域内连续，且$f(0)=0$，$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{1-\cos x}=2$，则在点$x=0$处$f(x)$

(A) 不可导.　　　　(B) 可导且$f'(x)\neq 0$.

(C) 取得极大值.　　(D) 取得极小值.

解　由于当$x\to 0$时，$1-\cos x\sim\dfrac{1}{2}x^2$，所以令$f(x)=x^2$，则$f(x)$符合原题设条件. 而$f(x)$在$x=0$处可导，$f'(0)=0$，取极小值，则(A)(B)(C) 均不正确，故应选(D).

例 8　(01 年,数学三,数学四) 设 $f(x)$ 的导数在 $x=a$ 处连续,又 $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{f'(x)}{x-a}=-1$, 则

(A) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极小值点.

(B) $x=a$ 是 $f(x)$ 的极大值点.

(C) $(a,\ f(a))$ 是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

(D) $x=a$ 不是 $f(x)$ 的极值点,$(a,\ f(a))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

解　若取 $f'(x)=-(x-a)$, 即令 $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$, 则显然 $f(x)$ 符合原题条件, $f(x)=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$ 在 $x=a$ 取极大值,且 $(a,\ f(a))$ 也不是 $y=-\dfrac{1}{2}(x-a)^2$ 的拐点,则(A)(C)(D) 均不正确,故应选(B).

例 9　(99 年,数学一,数学二,数学三,数学四) 设 $f(x)$ 是连续函数, $F(x)$ 是 $f(x)$ 的原函数,则

(A) 当 $f(x)$ 是奇函数时,$F(x)$ 必是偶函数.

(B) 当 $f(x)$ 是偶函数时,$F(x)$ 必是奇函数.

(C) 当 $f(x)$ 是周期函数时,$F(x)$ 必周期函数.

(D) 当 $f(x)$ 是单调增函数时,$F(x)$ 必是单调增函数.

解　令 $f(x)=\cos x+1$, $F(x)=\sin x+x+1$.

显然 $f(x)$ 是偶函数,周期函数,但 $F(x)$ 不是奇函数,也不是周期函数,则(B) (C) 均不正确.

若令 $f(x)=x$, $F(x)=\dfrac{1}{2}x^2$, 则 $f(x)$ 单调增,但 $F(x)$ 不单调增,因此,(D) 也不正确,故应选(A).

例 10　(96 年,数学四) 设 $f(x)$ 处处可导,则

(A) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$.

(B) 当 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=+\infty$.

(C) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$.

(D) 当 $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$ 时,必有 $\lim\limits_{x\to-\infty}f'(x)=-\infty$.

解　令 $f(x)=x$, 则 $f'(x)\equiv 1$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$,但 $\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=1\neq+\infty$

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty，但 \lim_{x\to-\infty} f'(x) = 1 \neq -\infty$$

则(B) 和(D) 均不正确

若令 $f(x) = x^2$, 则 $f'(x) = 2x$

$$\lim_{x\to-\infty} f'(x) = -\infty，但 \lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \neq -\infty$$

所以(C) 也不正确,故应选(A).

例11 (96 年, 数学一, 数学二) 设 $f(x)$ 有连续导数, $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$, $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) f(t) \mathrm{d}t$, 且当 $x \to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,则 k 等于

(A) 1　　(B) 2　　(C) 3　　(D) 4

解 由 $f(0) = 0$, $f'(0) \neq 0$. 取 $f(x) = x$

则 $F(x) = \int_0^x (x^2 - t^2) t \mathrm{d}t = \dfrac{x^4}{4}$.

$F'(x) = x^3$. 由 $x \to 0$ 时, $F'(x)$ 与 x^k 是同阶无穷小,知 $k = 3$, 从而, (A)(B)(D) 均不正确,故应选(C).

例 12 (87 年,数学二) 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导,则

$\lim\limits_{x\to0} \dfrac{f(a+x) - f(a-x)}{x}$ 等于

(A) $f'(a)$　　(B) $2f'(a)$

(C) 0　　(D) $f'(2a)$

解 令 $f(x) = x$, 则

$$\lim_{x\to0} \frac{f(a+x) - f(a-x)}{x} = \lim_{x\to0} \frac{a + x - (a - x)}{x} = 2$$

但 $f'(x) = 1$, 从而 $f'(a) = f'(2a) = 1$, 则(A)(C)(D) 均不正确,故应选(B).

例 13 (91 年,数学一,数学二) 若连续函数 $f(x)$ 满足关系式

$$f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t + \ln2$$

则 $f(x)$ 等于

(A) $\mathrm{e}^x \ln2$　　(B) $\mathrm{e}^{2x} \ln2$

(C) $\mathrm{e}^x + \ln2$　　(D) $\mathrm{e}^{2x} + \ln2$

解 由 $f(x) = \int_0^{2x} f\left(\frac{t}{2}\right) \mathrm{d}t + \ln2$ 知

$$f(0) = \ln2 \tag{1}$$

$$f'(x) = 2f(x) \tag{2}$$

显然(C)(D) 选项不符合(1) 式,(A) 选项不符合(2) 式,故应选(B).

例14　(95年,数学二) 设 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内有定义,$f(x)$ 为连续函数,且 $f(x)\neq 0$, $\varphi(x)$ 有间断点,则

(A) $\varphi[f(x)]$ 必有间断点.

(B) $[\varphi(x)]^2$ 必有间断点.

(C) $f[\varphi(x)]$ 必有间断点.

(D) $\dfrac{\varphi(x)}{f(x)}$ 必有间断点.

解　令 $\varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \geqslant 0 \\ -1 & x < 0 \end{cases}$, $f(x) = x^2 + 1$

显然 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 符合原题条件,而 $\varphi[f(x)] = 1, \varphi^2(x) = 1, f[\varphi(x)] = 2$ 均无间断点,则(A)(B)(C) 均不正确,故应选(D).

例 15　(93 年,数学二) 若 $f(x) = -f(-x)$, 在 $(0,+\infty)$ 内, $f'(x) > 0, f''(x) > 0$, 则 $f(x)$ 在 $(-\infty,0)$ 内

(A) $f'(x) < 0,\ f''(x) < 0$　　(B) $f'(x) < 0,\ f''(x) > 0$

(C) $f'(x) > 0,\ f''(x) < 0$　　(D) $f'(x) > 0,\ f''(x) > 0$

解　由原题设可令 $f(x) = x^3$, 显然 $f(x)$ 符合原题条件.而在 $(-\infty, 0)$ 内, $f'(x) = 3x^2 > 0$, $f''(x) = 6x < 0$. 则(A)(B)(D) 均不正确,故应选(C).

例 16　(96 年,数学四) 设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$, 则下列选项正确的是

(A) $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 的极大值.

(B) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极大值.

(C) $f(x_0)$ 是 $f(x)$ 的极小值.

(D) $(x_0, f(x_0))$ 是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

解　由题设 $f'(x_0) = f''(x_0) = 0$, $f'''(x_0) > 0$.

可令 $f(x) = (x - x_0)^3$

显然此 $f(x)$ 符合原题条件,而 $f'(x) = 3(x - x_0)^2$

显然 $f'(x_0)$ 是 $f'(x)$ 极小值而不是极大值,则(A) 不正确,又 $f(x_0) = 0$,而在 x_0 任何邻域内 $f(x)$ 可正也可负,从而 $f(x_0)$ 不是 $f(x)$ 的极值点,因此(B) 和(C) 也不正确,故应选(D).

例 17 (98 年,数学一) 设 $f(x)$ 连续,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=$

(A) $xf(x^2)$　　(B) $-xf(x^2)$

(C) $2xf(x^2)$　　(D) $-2xf(x^2)$

解 令 $f(x)\equiv 1$,则 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x tf(x^2-t^2)\mathrm{d}t=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x t\mathrm{d}t=x$ 显然(B) (C) (D) 均不正确,故应选(A).

例 18 (94 年,数学三) 设函数 $f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续,且 $f(x)>0$,则方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 在开区间 (a,b) 内的根有

(A)0 个.　(B) 1 个.　(C) 2 个.　(D) 无穷多个.

解 由题设条件,可令 $f(x)\equiv 1$,此时方程 $\int_a^x f(t)\mathrm{d}t+\int_b^x\frac{1}{f(t)}\mathrm{d}t=0$ 变为 $(x-a)+(x-b)=0$,即 $2x-(a+b)=0$. 该方程在 (a,b) 内有且仅有一个实根 $x=\frac{a+b}{2}$,则(A)(C)(D) 均不正确,故应选(B).

例 19 (99 年,数学一) 设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,$\boldsymbol{B}$ 是 $n\times m$ 矩阵,则

(A) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(B) 当 $m>n$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.

(C) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|\neq 0$.

(D) 当 $n>m$ 时,必有行列式 $|\boldsymbol{AB}|=0$.　【　】

解 用排除法

当 $m>n$ 时,若 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}$,$\boldsymbol{B}=[3,4]$,则有 $|\boldsymbol{AB}|=\begin{vmatrix}3&4\\6&8\end{vmatrix}=0$,故(A) 不对;

当 $n>m$ 时,若 $\boldsymbol{A}=[1\quad 2]$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}$,则有 $|\boldsymbol{AB}|=0$,故(C) 不对;

当 $n>m$ 时,若 $\boldsymbol{A}=[1\quad 2]$,$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}$,则有 $|\boldsymbol{AB}|=3\neq 0$,故(D) 不对;

因此,只有(B) 正确.

例 20 (94 年,数学四) 设有向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,2,4)$,$\boldsymbol{\alpha}_2=(0,3,1,2)$,$\boldsymbol{\alpha}_3=(3,0,7,14)$,$\boldsymbol{\alpha}_4=(1,-2,2,0)$,$\boldsymbol{\alpha}_5=(2,1,5,10)$. 则