普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

电磁场与电磁波（第2版）

教学指导书

杨儒贵

5

高等教育出版社
Higher Education Press

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套参考书

电磁场与电磁波（第2版）

教学指导书

杨儒贵

高等教育出版社
Higher Education Press

内容提要

本书是西南交通大学杨儒贵教授撰写的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《电磁场与电磁波》（第2版）的配套教学指导书。本指导书按主教材章节次序，逐一介绍，共分十章；矢量分析；静电场；静电场边值问题；恒定电流场；恒定磁场；电磁感应；时变电磁场；平面电磁波；导行电磁波和电磁辐射及原理等。

作者基于多年的教学实践，指出各章的重点和难点，并提供全部习题的题解。

本书可供电子信息类专业的师生作为“电磁场与电磁波”课程的教学参考书使用，也可供考研的读者复习参考。

图书在版编目（CIP）数据

电磁场与电磁波（第2版）教学指导书/杨儒贵 .2版 .
—北京：高等教育出版社，2008.5
ISBN 978-7-04-023633-0

Ⅰ.电… Ⅱ.杨… Ⅲ.①电磁场-高等学校-教学参考资料②电磁波-高等学校-教学参考资料 Ⅳ.0441.4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 041208 号

策划编辑 杜 炜 **责任编辑** 曲文利 **封面设计** 张志奇 **责任绘图** 吴文信
版式设计 马敬茹 **责任校对** 金 辉 **责任印制** 朱学忠

出版发行 高等教育出版社
社 址 北京市西城区德外大街4号
邮政编码 100011
总 机 010-58581000

经 销 蓝色畅想图书发行有限公司
印 刷 北京明月印务有限责任公司

开 本 787×960 1/16
印 张 11
字 数 200 000

购书热线 010-58581118
免费咨询 800-810-0598
网 址 http://www.hep.edu.cn
http://www.hep.com.cn
网上订购 http://www.landraco.com
http://www.landraco.com.cn
畅想教育 http://www.widedu.com

版 次 2003年11月第1版
2008年5月第2版
印 次 2008年5月第1次印刷
定 价 14.30元

物料号 23633-00

前　言

本指导书是根据作者撰写的《电磁场与电磁波》（第2版）主教材编写的。主教材已对每章的内容及重要公式进行了总结和归纳，这里仅指出各章的重点和难点，并提供全部习题的题解。主教材共分十章：矢量分析；静电场；静电场的边值问题；恒定电流场；恒定磁场；电磁感应；时变电磁场；平面电磁波；导行电磁波和电磁辐射及原理等。本指导书也按原章节次序，逐一介绍。

基于64总学时，除了4学时作为机动以外，各章课堂学时可按下表分配：

章　名	学　时	章　名	学　时
矢量分析	4	电磁感应	3
静电场	6	时变电磁场	7
静电场的边值问题	4	平面电磁波	10
恒定电流场	3	导行电磁波	8
恒定磁场	5	电磁辐射及原理	10

机动的4学时可以作为实验课时。

“电磁场与电磁波”课程的特点可用12个字描述：“物理概念抽象，数学演算较多”。根据本人多年的教学实践，提出以下几点建议：

(1) 课堂上着重讲清物理概念，避免繁杂枯燥的数学推演。

(2) 认真讲解各章典型例题，以提高学生分析问题和解决问题的能力。如果学时允许，还可再介绍一些具有代表性的习题。

(3) 尽量收集一些浅显易懂的应用实例，以提高学生的学习兴趣，同时也有助于学生对于所学的内容加深理解。

(4) 充分利用现代数字化多媒体技术。使用电子教案，绝不能照本宣读，应该仍然突出“讲”。尽量多分几个段落，逐条显示。利用动画功能，显示电磁场与波的时空特性。

(5) 若使用黑板补充讲解内容，应该板书端正、简洁。上课前应将黑板擦净，不留任何痕迹。

(6) 认真上好绪论课，这是提高学生学习兴趣、了解课程的首要环节。

为了高水平地完成教学任务，教学方法固然重要，但教师自身的素质更是

十分关键。应明确教学工作是大学教师的第一要务，对学生要有爱心，对教学工作要热心；对于后进学生要耐心；要不断充实自己，提高学术水平。

全部习题由当时在校的三位研究生演算，其中张双文负责第1、3、7、8章，官正涛负责第5、6、10章，陈凯亚负责第2、4、9章。刘运林和王敏锡两位教授协助审查了全部题解。高等教育出版社对于本指导书的审编和出版给予了很大支持和帮助，作者在此一并表示衷心的感谢。

鉴于各校教学计划和要求不尽相同，各位教师都有丰富的教学经验、独特的教学风格以及解题方法，本指导书提出的建议及题解，仅供参考。不妥之处，渴望指正。

作者于2008年3月

目　录

第一章 矢量分析

重点和难点

关于矢量的定义、运算规则等内容可让读者自学。重点讲解标量与矢量、常矢量与变矢量的异同；梯度、散度、旋度的物理概念和数学表示；格林定理和亥姆霍兹定理的涵义；三种常用坐标系的构成，线元、面元、体元和矢量在三种坐标系中的表示。

考虑到高年级同学已学过物理学，讲解梯度、散度和旋度时，应结合电学中的电位、积分形式的高斯定律和安培环路定律等内容。讲解无散场和无旋场时，也应以电学中已学过的静电场和恒定磁场的基本特性为例。

主教材的特色之一是以亥姆霍兹定理为依据逐一介绍电磁场，因此该定理应着重介绍。但是由于证明过程较繁，还要涉及 δ 函数，如果学时有限可以略去。亥姆霍兹定理严格地定量描述了自由空间中矢量场与其散度和旋度之间的关系，应该着重指出散度和旋度是产生矢量场的惟一的两个源，强调散度和旋度是研究矢量场的首要问题。

此外，还应说明无限大的自由空间中仅可存在无散场或无旋场，不可能存在既无散又无旋的矢量场。这种既无散又无旋的矢量场只能存在于局部的无源区中。

讲解三种坐标系时，应讨论哪些坐标轴的单位矢量是常矢量，哪些坐标轴的单位矢量是变矢量。

题解

1-1 已知三个矢量分别为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{B}=3\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z$；$\boldsymbol{C}=2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z$。试求① $|\boldsymbol{A}|$，$|\boldsymbol{B}|$，$|\boldsymbol{C}|$；②单位矢量 $\boldsymbol{e}_a$，$\boldsymbol{e}_b$，$\boldsymbol{e}_c$；③ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$；④ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$；⑤ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}$ 及 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{B}$；⑥ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}$ 及 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}$。

解 ① $|\boldsymbol{A}|=\sqrt{A_x^2+A_y^2+A_z^2}=\sqrt{1^2+2^2+(-3)^2}=\sqrt{14}$

$$|\boldsymbol{B}|=\sqrt{B_x^2+B_y^2+B_z^2}=\sqrt{3^2+1^2+2^2}=\sqrt{14}$$

$$|\boldsymbol{C}|=\sqrt{C_x^2+C_y^2+C_z^2}=\sqrt{2^2+0^2+(-1)^2}=\sqrt{5}$$

② $\boldsymbol{e}_a=\dfrac{\boldsymbol{A}}{|\boldsymbol{A}|}=\dfrac{\boldsymbol{A}}{\sqrt{14}}=\dfrac{1}{\sqrt{14}}(\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)$

$$\boldsymbol{e}_b=\frac{\boldsymbol{B}}{|\boldsymbol{B}|}=\frac{\boldsymbol{B}}{\sqrt{14}}=\frac{1}{\sqrt{14}}(3\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+2\boldsymbol{e}_z)$$

$$\boldsymbol{e}_c=\frac{\boldsymbol{C}}{|\boldsymbol{C}|}=\frac{\boldsymbol{C}}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}(2\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z)$$

③ $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=A_xB_x+A_yB_y+A_zB_z=3+2-6=-1$

④ $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ B_x & B_y & B_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=7\boldsymbol{e}_x-11\boldsymbol{e}_y-5\boldsymbol{e}_z$

⑤ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 7 & -11 & -5\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=11\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y+22\boldsymbol{e}_z$

因 $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ A_x & A_y & A_z\\ C_x & C_y & C_z\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ 1 & 2 & -3\\ 2 & 0 & -1\end{vmatrix}=-2\boldsymbol{e}_x-5\boldsymbol{e}_y-4\boldsymbol{e}_z$

则 $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\times\boldsymbol{B}=\begin{vmatrix}\boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z\\ -2 & -5 & -4\\ 3 & 1 & 2\end{vmatrix}=-6\boldsymbol{e}_x-8\boldsymbol{e}_y+13\boldsymbol{e}_z$

⑥ $(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{C})\cdot\boldsymbol{B}=(-2)\times3+(-5)\times1+(-4)\times2=-19$

$(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})\cdot\boldsymbol{C}=7\times2+0+(-5)\times(-1)=19$

1-2 已知 $z=0$ 平面内的位置矢量 $\boldsymbol{A}$ 与 x 轴的夹角为 α，位置矢量 $\boldsymbol{B}$ 与 x 轴的夹角为 β，试证

$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

证明 由于两矢量位于 $z=0$ 平面内，因此均为二维矢量，它们可以分别表示为

$$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x|\boldsymbol{A}|\cos\alpha+\boldsymbol{e}_y|\boldsymbol{A}|\sin\alpha$$

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{e}_x|\boldsymbol{B}|\cos\beta+\boldsymbol{e}_y|\boldsymbol{B}|\sin\beta$$

已知 $\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}=|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos(\alpha-\beta)$，求得

$$\cos(\alpha-\beta)=\frac{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\cos\alpha\cos\beta+|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|\sin\alpha\sin\beta}{|\boldsymbol{A}||\boldsymbol{B}|}$$

即
$$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$$

1-3 已知空间三角形的顶点坐标为 $P_1(0,1,-2)$，$P_2(4,1,-3)$ 及

$P_3(6,2,5)$。试问：①该三角形是否是直角三角形；②该三角形的面积是多少？

解 由题意知，三角形三个顶点的位置矢量分别为

$$\boldsymbol{P}_1=\boldsymbol{e}_y-2\boldsymbol{e}_z;\quad \boldsymbol{P}_2=4\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z;\quad \boldsymbol{P}_3=6\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y+5\boldsymbol{e}_z$$

那么，由顶点 P_1 指向 P_2 的边矢量为

$$\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1=4\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_z$$

同理，由顶点 P_2 指向 P_3 的边矢量、由顶点 P_3 指向 P_1 的边矢量分别为

$$\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2=2\boldsymbol{e}_x+\boldsymbol{e}_y+8\boldsymbol{e}_z\qquad \boldsymbol{P}_1-\boldsymbol{P}_3=-6\boldsymbol{e}_x-\boldsymbol{e}_y-7\boldsymbol{e}_z$$

因两个边矢量$(\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1)\cdot(\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2)=0$，意味着该两个边矢量相互垂直，所以该三角形是直角三角形。

因
$$|\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1|=\sqrt{4^2+1^2}=\sqrt{17}$$
$$|\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2|=\sqrt{2^2+1^2+8^2}=\sqrt{69}$$

所以三角形的面积为

$$S=\frac{1}{2}|\boldsymbol{P}_2-\boldsymbol{P}_1||\boldsymbol{P}_3-\boldsymbol{P}_2|=0.5\sqrt{1\,173}$$

1-4 已知矢量$\boldsymbol{A}=\boldsymbol{e}_x y+\boldsymbol{e}_y x$，两点 P_1 及 P_2 的坐标位置分别为 $P_1(2,1,-1)$ 及 $P_2(8,2,-1)$。若取 P_1 及 P_2 之间的抛物线 $x=2y^2$ 或直线 P_1P_2 为积分路径，试求线积分 $\int_{P_2}^{P_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}$。

解 ① 积分路线为抛物线。已知抛物线方程为 $x=2y^2$，$\mathrm{d}x=4y\mathrm{d}y$，则

$$\int_{P_2}^{P_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{P_2}^{P_1}(y\mathrm{d}x+x\mathrm{d}y)=\int_{P_2}^{P_1}(4y^2\mathrm{d}y+2y^2\mathrm{d}y)$$
$$=\int_{P_2}^{P_1}6y^2\mathrm{d}y=2y^3\big|_2^1=-14$$

② 积分路线为直线。因 P_1，P_2 两点位于 $z=-1$ 平面内，过 P_1，P_2 两点的直线方程为 $y-1=\dfrac{2-1}{8-2}(x-2)$，即 $6y=x+4$，$\mathrm{d}x=6\mathrm{d}y$，则

$$\int_{P_2}^{P_1}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{l}=\int_{P_2}^{P_1}6y\mathrm{d}y+(6y-4)\mathrm{d}y=(6y^2-4y)\big|_2^1=-14$$

1-5 设标量 $\Phi=xy^2+yz^3$，矢量$\boldsymbol{A}=2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z$，试求标量函数 Φ 在点$(2,-1,1)$处沿矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向上的方向导数。

解 已知梯度

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}=\boldsymbol{e}_x y^2+\boldsymbol{e}_y(2xy+z^2)+\boldsymbol{e}_z 3yz^2$$

那么，在点$(2,-1,1)$处 Φ 的梯度为

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z$$

因此，标量函数 Φ 在点 $(2,-1,1)$ 处沿矢量 $\boldsymbol{A}$ 的方向上的方向导数为

$$\nabla\Phi\cdot\boldsymbol{e}_A=\frac{1}{3}(\boldsymbol{e}_x-3\boldsymbol{e}_y-3\boldsymbol{e}_z)\cdot(2\boldsymbol{e}_x+2\boldsymbol{e}_y-\boldsymbol{e}_z)=-\frac{1}{3}$$

1-6 试证主教材式（1-4-11）、式（1-4-12）及式（1-4-13）。

证明 式（1-4-11）为 $\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$，该式左边为

$$\begin{aligned}\nabla(\Phi\Psi)&=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial}{\partial x}(\Phi\Psi)+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial}{\partial y}(\Phi\Psi)+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial}{\partial z}(\Phi\Psi)\\&=\boldsymbol{e}_x\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial x}\right)+\boldsymbol{e}_y\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial y}\right)+\boldsymbol{e}_z\left(\Psi\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\Phi\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\\&=\Psi\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}\right)+\Phi\left(\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Psi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Psi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\\&=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi\end{aligned}$$

即

$$\nabla(\Phi\Psi)=\Phi\nabla\Psi+\Psi\nabla\Phi$$

根据上述复合函数求导法则同样可证式（1-4-12）和式（1-4-13）。

1-7 已知标量函数 $\Phi=\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}$，试求该标量函数 Φ 在点 $P(1,2,3)$ 处的最大变化率及其方向。

解 标量函数在某点的最大变化率即是函数在该点的梯度值。已知标量函数 Φ 的梯度为

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\partial\Phi}{\partial x}+\boldsymbol{e}_y\frac{\partial\Phi}{\partial y}+\boldsymbol{e}_z\frac{\partial\Phi}{\partial z}$$

那么

$$\nabla\Phi=\boldsymbol{e}_x\frac{\pi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}+\boldsymbol{e}_y\frac{\pi}{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\cos\left(\frac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}-\boldsymbol{e}_z\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)\sin\left(\frac{\pi}{3}y\right)\mathrm{e}^{-z}$$

将点 P（1，2，3）的坐标代入，得 $(\nabla\Phi)_P=-\boldsymbol{e}_y\frac{\pi}{6}\mathrm{e}^{-3}-\boldsymbol{e}_z\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-3}$。那么，在 P 点的最大变化率为

$$|\nabla\Phi|_P=\left|-\boldsymbol{e}_y\frac{\pi}{6}\mathrm{e}^{-3}-\boldsymbol{e}_z\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{-3}\right|=\frac{\mathrm{e}^{-3}}{6}\sqrt{\pi^2+27}$$

P 点最大变化率方向的方向余弦为

$$\cos\alpha=0;\quad\cos\beta=-\frac{\pi}{\sqrt{\pi^2+27}};\quad\cos\gamma=-\frac{\sqrt{27}}{\sqrt{\pi^2+27}}$$

1-8 若标量函数为

$$\Phi=x^2+2y^2+3z^2+xy+3x-2y-6z$$

试求在 $P(1,-2,1)$ 点处的梯度。

解 已知梯度 $\nabla\Phi = \boldsymbol{e}_x \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} + \boldsymbol{e}_y \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} + \boldsymbol{e}_z \dfrac{\partial\Phi}{\partial z}$，将标量函数 Φ 代入得

$$\nabla\Phi = \boldsymbol{e}_x(2x+y+3) + \boldsymbol{e}_y(4y+x-2) + \boldsymbol{e}_z(6z-6)$$

再将 P 点的坐标代入，求得标量函数 Φ 在 P 点处的梯度为

$$(\nabla\Phi)_P = 3\boldsymbol{e}_x - 9\boldsymbol{e}_y$$

1-9 试证主教材式（1-5-11）及式（1-5-12）。

证明 式（1-5-11）为 $\nabla\cdot(C\boldsymbol{A}) = C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$，该式左边为

$$\nabla\cdot(C\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(CA_x) + \frac{\partial}{\partial y}(CA_y) + \frac{\partial}{\partial z}(CA_z)$$

$$= C\left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\right) = C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$$

即 $\quad \nabla\cdot(C\boldsymbol{A}) = C\nabla\cdot\boldsymbol{A}$

式（1-5-12）为 $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$，该式左边为

$$\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_z)$$

$$= A_x\frac{\partial\Phi}{\partial x} + \Phi\frac{\partial A_x}{\partial x} + A_y\frac{\partial\Phi}{\partial y} + \Phi\frac{\partial A_y}{\partial y} + A_z\frac{\partial\Phi}{\partial z} + \Phi\frac{\partial A_z}{\partial z}$$

$$= \Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$$

即 $\quad \nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$

1-10 试求距离 $|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2|$ 在直角坐标系、圆柱坐标系及球坐标系中的表示式。

解 在直角坐标系中

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

在圆柱坐标系中，已知 $x = r\cos\phi$，$y = r\sin\phi$，$z = z$，因此

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(r_2\cos\phi_2 - r_1\cos\phi_1)^2 + (r_2\sin\phi_2 - r_1\sin\phi_1)^2 + (z_2-z_1)^2}$$

$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1\cos(\phi_2-\phi_1) + (z_2-z_1)^2}$$

在球坐标系中，已知 $x = r\sin\theta\cos\phi$，$y = r\sin\theta\sin\phi$，$z = r\cos\theta$，因此

$$|\boldsymbol{r}_1 - \boldsymbol{r}_2| = \sqrt{(r_2\sin\theta_2\cos\phi_2 - r_1\sin\theta_1\cos\phi_1)^2 + (r_2\sin\theta_2\sin\phi_2 - r_1\sin\theta_1\sin\phi_1)^2 + (r_2\cos\theta_2 - r_1\cos\theta_1)^2}$$

$$= \sqrt{r_2^2 + r_1^2 - 2r_2r_1[\sin\theta_2\sin\theta_1\cos(\phi_2-\phi_1) + \cos\theta_2\cos\theta_1]}$$

1-11 已知两个位置矢量 $\boldsymbol{r}_1$ 及 $\boldsymbol{r}_2$ 的终点坐标分别为 (r_1,θ_1,ϕ_1) 及 (r_2,θ_2,ϕ_2)，试证 $\boldsymbol{r}_1$ 与 $\boldsymbol{r}_2$ 之间的夹角 γ 为

$$\cos\gamma = \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1-\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2$$

证明 根据题意，两个位置矢量在直角坐标系中可表示为

$$\boldsymbol{r}_1 = \boldsymbol{e}_x r_1\sin\theta_1\cos\phi_1 + \boldsymbol{e}_y r_1\sin\theta_1\sin\phi_1 + \boldsymbol{e}_z r_1\cos\theta_1$$

$$\boldsymbol{r}_2 = \boldsymbol{e}_x r_2\sin\theta_2\cos\phi_2 + \boldsymbol{e}_y r_2\sin\theta_2\sin\phi_2 + \boldsymbol{e}_z r_2\cos\theta_2$$

已知两个矢量的标积为 $\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = |\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|\cos\gamma$，这里 γ 为两个矢量的夹角。因此夹角 γ 为

$$\cos\gamma = \frac{\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2}{|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2|}$$

式中

$$\boldsymbol{r}_1 \cdot \boldsymbol{r}_2 = r_1 r_2 (\sin\theta_1\cos\phi_1\sin\theta_2\cos\phi_2 + \sin\theta_1\sin\phi_1\sin\theta_2\sin\phi_2 + \cos\theta_1\cos\theta_2)$$

$$|\boldsymbol{r}_1||\boldsymbol{r}_2| = r_1 r_2$$

因此

$$\begin{aligned}\cos\gamma &= \sin\theta_1\sin\theta_2(\cos\phi_1\cos\phi_2 + \sin\phi_1\sin\phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2 \\ &= \sin\theta_1\sin\theta_2\cos(\phi_1 - \phi_2) + \cos\theta_1\cos\theta_2\end{aligned}$$

1−12 试求分别满足方程式 $\nabla\cdot[f_1(r)\boldsymbol{r}] = 0$ 及 $\nabla\times[f_2(r)\boldsymbol{r}] = 0$ 的函数 $f_1(r)$ 及 $f_2(r)$。

解 在球坐标系中，为了满足

$$\nabla\cdot[f_1(r)\boldsymbol{r}] = [\nabla f_1(r)]\cdot\boldsymbol{r} + f_1(r)\nabla\cdot\boldsymbol{r} = r\frac{\partial f_1(r)}{\partial r} + 3f_1(r) = 0$$

即要求 $r\dfrac{\mathrm{d}f_1(r)}{\mathrm{d}r} + 3f_1(r) = 0 \Rightarrow \dfrac{\mathrm{d}f_1(r)}{f_1(r)} = -\dfrac{3\mathrm{d}r}{r}$，求得

$$\ln[f_1(r)] = -3\ln r + \ln C$$

即

$$f_1(r) = \frac{C}{r^3}$$

在球坐标系中，为了满足

$$\nabla\times[f_2(r)\boldsymbol{r}] = [\nabla f_2(r)]\times\boldsymbol{r} + f_2(r)\nabla\times\boldsymbol{r} = 0$$

由于 $\nabla\times\boldsymbol{r} = 0$，即上式恒为零。故 $f_2(r)$ 可以是 r 的任意函数。

1−13 试证主教材式（1−6−11）及式（1−6−12）。

证明 ① 式（1−6−11）为 $\nabla\times(C\boldsymbol{A}) = C\nabla\times\boldsymbol{A}$（$C$ 为常数）

令 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$，$C\boldsymbol{A} = CA_x\boldsymbol{e}_x + CA_y\boldsymbol{e}_y + CA_z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\nabla\times(C\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ CA_x & CA_y & CA_z \end{vmatrix} = C\begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = C\nabla\times\boldsymbol{A}$$

② 式（1−6−12）为 $\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A}) = \Phi\nabla\times\boldsymbol{A} + \nabla\Phi\times\boldsymbol{A}$

令 $\boldsymbol{A} = A_x\boldsymbol{e}_x + A_y\boldsymbol{e}_y + A_z\boldsymbol{e}_z$，$\Phi\boldsymbol{A} = \Phi A_x\boldsymbol{e}_x + \Phi A_y\boldsymbol{e}_y + \Phi A_z\boldsymbol{e}_z$，则

$$\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A}) = \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ \Phi A_x & \Phi A_y & \Phi A_z \end{vmatrix} = \left[\frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_y)\right]\boldsymbol{e}_x -$$

$$\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_z)-\frac{\partial}{\partial z}(\Phi A_x)\right]\boldsymbol{e}_y+\left[\frac{\partial}{\partial x}(\Phi A_y)-\frac{\partial}{\partial y}(\Phi A_x)\right]\boldsymbol{e}_z$$

$$=\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y}A_z-\frac{\partial \Phi}{\partial z}A_y\right)\boldsymbol{e}_x-\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}A_z-\frac{\partial \Phi}{\partial z}A_x\right)\boldsymbol{e}_y+$$

$$\left(\frac{\partial \Phi}{\partial x}A_y-\frac{\partial \Phi}{\partial y}A_x\right)\boldsymbol{e}_z+\Phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial y}-\frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_x-$$

$$\Phi\left(\frac{\partial A_z}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial z}\right)\boldsymbol{e}_y+\Phi\left(\frac{\partial A_y}{\partial x}-\frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{e}_z$$

$$=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}$$

若将式（1－6－12）的右边展开，也可证明。

1－14 试证 $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$，$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$ 及 $\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0$。

证明 已知在球坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\nabla\times\boldsymbol{A}=\begin{vmatrix}\dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r^2\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\theta}{r\sin\theta} & \dfrac{\boldsymbol{e}_\phi}{r}\\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial\phi}\\ A_r & rA_\theta & r\sin\theta A_\phi\end{vmatrix}$$

对于矢量 $\boldsymbol{r}$，因 $A_r=r$，$A_\theta=0$，$A_\phi=0$，代入上式，且因 r 与角度 θ，ϕ 无关，那么，由上式获知 $\nabla\times\boldsymbol{r}=0$。

对于矢量 $\frac{\boldsymbol{r}}{r}$，因 $A_r=1$，$A_\theta=0$，$A_\phi=0$，显然 $\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r}\right)=0$。

对于矢量 $\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}$，因 $A_r=\frac{1}{r^2}$，$A_\theta=0$，$A_\phi=0$，同理获知

$$\nabla\times\left(\frac{\boldsymbol{r}}{r^3}\right)=0。$$

1－15 若 C 为常数，$\boldsymbol{A}$ 及 $\boldsymbol{k}$ 为常矢量，试证：

① $\nabla e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=C\boldsymbol{k}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

② $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

③ $\nabla\times(\boldsymbol{A}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=C\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

证明 ① 证明 $\nabla e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=C\boldsymbol{k}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

利用公式 $\nabla F(\Phi)=F'(\Phi)\nabla\Phi$，则

$$\nabla e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla(C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=Ce^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})$$

而 $$\nabla(\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r})=\nabla(k_x x+k_y y+k_z z)=\boldsymbol{e}_x k_x+\boldsymbol{e}_y k_y+\boldsymbol{e}_z k_z=\boldsymbol{k}$$

求得 $$\nabla e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}=C\boldsymbol{k}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$$

② 证明 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}e^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

利用公式 $\nabla\cdot(\Phi\boldsymbol{A})=\Phi\nabla\cdot\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\cdot\nabla\Phi$，则

$$\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\boldsymbol{A}\cdot\nabla(\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})+\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\cdot\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\cdot\nabla(\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})$$

再利用①的结果，则 $\nabla\cdot(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$

③ 证明 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=C\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

利用公式 $\nabla\times(\Phi\boldsymbol{A})=\nabla\Phi\times\boldsymbol{A}+\Phi\nabla\times\boldsymbol{A}$，则

$$\nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=\nabla(\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{A}+\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}\nabla\times\boldsymbol{A}=\nabla(\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})\times\boldsymbol{A}$$

再利用①的结果，则 $\nabla\times(\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}})=C\boldsymbol{k}\times\boldsymbol{A}\mathrm{e}^{C\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{r}}$。

1-16 试证 $\nabla^2\left(\dfrac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)=k^2\dfrac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}$，式中，$k$ 为常数。

证明 已知在球坐标系中

$$\nabla^2\Phi=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)+\frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\Phi}{\partial\theta}\right)+\frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\phi^2}$$

则

$$\begin{aligned}\nabla^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2\left(-\frac{1}{r^2}\mathrm{e}^{-kr}-\frac{k}{r}\mathrm{e}^{-kr}\right)\right]\\&=\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(-\mathrm{e}^{-kr}-kr\mathrm{e}^{-kr})\\&=\frac{1}{r^2}[(-k)\mathrm{e}^{-kr}(-1-kr)+(-k)\mathrm{e}^{-kr}]\\&=k^2\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\end{aligned}$$

即

$$\nabla^2\left(\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}\right)=k^2\frac{\mathrm{e}^{-kr}}{r}$$

1-17 试证 $(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\dfrac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{E}|^2$。

证明 利用公式

$$\nabla(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})=(\boldsymbol{A}\cdot\nabla)\boldsymbol{B}+(\boldsymbol{B}\cdot\nabla)\boldsymbol{A}+\boldsymbol{A}\times(\nabla\times\boldsymbol{B})+\boldsymbol{B}\times(\nabla\times\boldsymbol{A})$$

令上式中的 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}=\boldsymbol{E}$，则

$$\nabla|\boldsymbol{E}|^2=2(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}+2\boldsymbol{E}\times(\nabla\times\boldsymbol{E})=2(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-2(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}$$

将上式整理后，即得

$$(\nabla\times\boldsymbol{E})\times\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{E}\cdot\nabla)\boldsymbol{E}-\frac{1}{2}\nabla|\boldsymbol{E}|^2$$

1-18 已知矢量场 $\boldsymbol{F}$ 的散度 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=q\delta(\boldsymbol{r})$，旋度 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$，试求该矢量场。

解 根据亥姆霍兹定理，$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})+\nabla\times\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})$，其中

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\cdot\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V';\quad \boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{\nabla'\times\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'$$

当 $\nabla\times\boldsymbol{F}=0$ 时，则 $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r})=0$，即 $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})$。那么因为 $\nabla\cdot\boldsymbol{F}=q\,\delta(\boldsymbol{r})$，求得

$$\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{1}{4\pi}\int_{V'}\frac{q\,\delta(\boldsymbol{r}')}{|\boldsymbol{r}-\boldsymbol{r}'|}\mathrm{d}V'=\frac{q}{4\pi r}$$

则
$$\boldsymbol{F}(\boldsymbol{r})=-\nabla\Phi(\boldsymbol{r})=\frac{q}{4\pi r^2}\boldsymbol{e}_r$$

1－19 已知在圆柱坐标系中某点的位置为 $\left(4,\frac{2}{3}\pi,3\right)$，试求该点在相应的直角坐标系及球坐标系中的位置。

解 已知直角坐标系和圆柱坐标系坐标变量之间的转换关系为

$$x=r\cos\phi,\ y=r\sin\phi,\ z=z$$

因此，该点在直角坐标系中的位置为

$$x=4\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-2;\quad y=4\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)=2\sqrt{3};\quad z=3$$

同样，根据球坐标系和直角坐标系坐标变量之间的转换关系

$$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2};\quad \theta=\arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right);\quad \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

可得该点在球坐标下的位置为

$$r=5;\quad \theta=\arctan\left(\frac{4}{3}\right)\approx 53^\circ;\quad \phi=120^\circ$$

1－20 已知直角坐标系中的矢量 $\boldsymbol{A}=a\boldsymbol{e}_x+b\boldsymbol{e}_y+c\boldsymbol{e}_z$，式中的 a，b，c 均为常数，$\boldsymbol{A}$ 是常矢量吗？试求该矢量在圆柱坐标系及球坐标系中的表示式。

解 由于 $\boldsymbol{A}$ 的大小及方向均与空间坐标无关，故是常矢量。

已知直角坐标系和圆柱坐标系坐标变量之间的转换关系为

$$r=\sqrt{x^2+y^2};\ \phi=\arctan\left(\frac{y}{x}\right);\ z=z$$

求得
$$r=\sqrt{a^2+b^2};\ \phi=\arctan\left(\frac{b}{a}\right);\ z=c$$

$$\sin\phi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}};\ \cos\phi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

又知矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系和圆柱坐标系中各个坐标分量之间的转换关系为

$$\begin{bmatrix}A_r\\A_\phi\\A_z\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\phi & \sin\phi & 0\\-\sin\phi & \cos\phi & 0\\0 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A_x\\A_y\\A_z\end{bmatrix}$$

将上述结果代入，求得

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ -\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} & \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2} \\ 0 \\ c \end{bmatrix}$$

即该矢量在圆柱坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r \sqrt{a^2+b^2} + \boldsymbol{e}_z c$$

直角坐标系和球坐标系的坐标变量之间的转换关系为

$$r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}; \ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right); \ \phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$$

由此求得

$$r = \sqrt{a^2+b^2+c^2}; \ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{a^2+b^2}}{c}\right); \ \phi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系和球坐标系中各个坐标分量之间的转换关系为

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

求得

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta\cos\phi & \sin\theta\sin\phi & \cos\theta \\ \cos\theta\cos\phi & \cos\theta\sin\phi & -\sin\theta \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sqrt{a^2+b^2+c^2} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

即该矢量在球坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{e}_r \sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

1－21 已知圆柱坐标系中的矢量 $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_r + b\boldsymbol{e}_\phi + c\boldsymbol{e}_z$，式中的 a，b，c 均为常数，$\boldsymbol{A}$ 是常矢量吗？试求 $\nabla\cdot\boldsymbol{A}$ 及 $\nabla\times\boldsymbol{A}$ 以及 $\boldsymbol{A}$ 在相应的直角坐标系及球坐标系中的表示式。

解 因为虽然 a，b，c 均为常数，但是单位矢量 $\boldsymbol{e}_r$ 和 $\boldsymbol{e}_\phi$ 均为变矢量，所以 $\boldsymbol{A}$ 不是常矢量。

已知圆柱坐标系中，矢量 $\boldsymbol{A}$ 的散度为

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(rA_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial A_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$$

将 $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_r + b\boldsymbol{e}_\phi + c\boldsymbol{e}_z$ 代入，得

$$\nabla\cdot\boldsymbol{A} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(ar) + 0 + 0 = \frac{a}{r}$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 的旋度为

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\phi & \dfrac{\boldsymbol{e}_z}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ A_r & rA_\phi & A_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\boldsymbol{e}_r}{r} & \boldsymbol{e}_\phi & \dfrac{\boldsymbol{e}_z}{r} \\ \dfrac{\partial}{\partial r} & \dfrac{\partial}{\partial \phi} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ a & rb & c \end{vmatrix} = \frac{b}{r}\boldsymbol{e}_z$$

已知直角坐标系和圆柱坐标系坐标变量之间的转换关系为

$$x = r\cos\phi;\ y = r\sin\phi;\ z = z$$

$$\cos\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{x}{a};\ \sin\phi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \frac{y}{a}$$

又知矢量 $\boldsymbol{A}$ 在直角坐标系和圆柱坐标系中各个坐标分量之间的转换关系为

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi & -\sin\phi & 0 \\ \sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

将上述结果代入，得

$$\begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x}{a} & -\dfrac{y}{a} & 0 \\ \dfrac{y}{a} & \dfrac{x}{a} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x - \dfrac{b}{a}y \\ y + \dfrac{b}{a}x \\ c \end{bmatrix}$$

即该矢量在直角坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{A} = \left(x - \frac{b}{a}y\right)\boldsymbol{e}_x + \left(y + \frac{b}{a}x\right)\boldsymbol{e}_y + c\boldsymbol{e}_z, \qquad \text{其中 } x^2 + y^2 = a^2$$

矢量 $\boldsymbol{A}$ 在圆柱坐标系和球坐标系中各个坐标分量之间的转换关系

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin\theta & 0 & \cos\theta \\ \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_r \\ A_\phi \\ A_z \end{bmatrix}$$

以及 $\sin\theta = \dfrac{a}{r}$，$\cos\theta = \dfrac{c}{r}$，求得

$$\begin{bmatrix} A_r \\ A_\theta \\ A_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a}{r} & 0 & \dfrac{c}{r} \\ \dfrac{c}{r} & 0 & -\dfrac{a}{r} \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{a^2+c^2}{r} \\ 0 \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r \\ 0 \\ b \end{bmatrix}$$

即该矢量在球坐标系中的表达式为

$$\boldsymbol{A} = r\boldsymbol{e}_r + b\boldsymbol{e}_\phi$$

1－22 已知球坐标系中矢量 $\boldsymbol{A} = a\boldsymbol{e}_r + b\boldsymbol{e}_\theta + c\boldsymbol{e}_\phi$，式中的 a，b，c 均为常