电子通信类专业
学习及考研辅导丛书

数字信号处理
学习及考研辅导

海欣 主编 何慧君 凌桂龙 编著

国防工业出版社
National Defense Industry Press

内容简介

“数字信号处理”是高等院校开设的专业基础课程，同时也是相关专业的硕士研究生入学考试必考课程。为了帮助广大的考研学生进行系统复习，根据高等工科院校“数字信号处理”课程教学基本要求编写了本书。

全书共分为7章，每一章均由知识要点、知识点详解、典型例题解析、自我测试四部分组成。知识要点对各章近年来考研中出现的重点、难点和考点进行了深入的分析；知识点详解对各章内容作了高度概括和叙述；典型例题解析中的例题大都选自国内重点高等院校历年考研真题及期中、期末考试题目，并作了详细的分析和解答；自我测试均附详细解答，使学生可通过练习检测学习效果，进一步提高解题能力。

本书可作为相关专业学生报考硕士研究生的学习用参考书及复习指导书，也适合高等院校相关专业的学生自学使用，同时可作为高等院校教师的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

数字信号处理学习及考研辅导/海欣主编.—北京：国防工业出版社，2008.8
（电子通信类专业学习及考研辅导丛书）
ISBN 978-7-118-05708-9

Ⅰ.数...　Ⅱ.海...　Ⅲ.数字信号-信号处理-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.TN911.72

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 060739 号

※

国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路23号　邮政编码100044）
天利华印刷装订有限公司印刷
新华书店经售

*

开本 787×1092　1/16　**印张** 18　**字数** 410 千字
2008年8月第1版第1次印刷　**印数** 1—3000 册　**定价** 34.00 元

（本书如有印装错误，我社负责调换）

国防书店：(010)68428422　　发行邮购：(010)68414474
发行传真：(010)68411535　　发行业务：(010)68472764

前　言

“数字信号处理”是现代信息和通信工程学科理论和技术的基础，是电子、光学、信息、雷达、声呐、导航、自动控制等相关专业开设的技术基础课程，它是所有相关后续专业课程的基础，同时也是相关专业硕士研究生入学考试的必考课程。学习“数字信号处理”课程应着重于掌握基本理论、基本概念和基本方法，因此学习这门课程时应该多做练习。为了帮助广大的考研学生学习和提高，特别是进行系统复习，我们根据高等工科院校“数字信号处理”课程教学基本要求编写了本书。

由于高等院校众多，水平不同，要在有限的篇幅内完成对各类专业课程有针对性的指导是相当困难的。为了解决这方面的问题，我们经过反复讨论，并征求了大量一线教师的意见，将一些通用原则和方法的指导放在首位，并结合大量相关实例进行了讲解。

本书共分 7 章，具体内容是：离散时间信号与系统、Z 变换、离散傅里叶变换、快速傅里叶变换、数字滤波器的结构、数字滤波器的设计、离散随机信号处理。每章内容包括：

(1) 知识要点　对于每章的重要知识，尤其是在历年真题中经常出现的重要考点作了总结和提示，读者可以根据提示对本章内容在复习时有所侧重。

(2) 知识点详解　结合知识要点提示，再对每一章的知识要点进行详细的讲解，使读者可以快速地把握知识要点，从而提高复习效率。在总结部分还添加了一些解题技巧，更加有利于读者复习。

(3) 典型例题解析　该部分是针对典型考研真题分析中提出的相应考点，帮助读者筛选出相关真题，结合高等院校“数字信号处理”历年真题进行全面的讲解，并在最后给出规律性的总结，更加方便读者去把握考点，更好地应对考研。

(4) 自我测试　在每一章的后面给出了部分自我测试题，并附有参考答案，读者可通过练习以检测学习效果，进一步提高解题能力。

在本书的附录部分给出了高等院校最新“数字信号处理”硕士研究生入学考试真题，对于报考硕士研究生的考生来说，这无疑是最宝贵的资源。

“数字信号处理”考题的具体类型并不是很多，因此在选择例题和习题的过程中，我们主要针对典型题型和一些具有代表性的真题进行了总结，并选择了一些高等工科院校的最新试题。其目的是使读者了解和掌握不同类型题目的解题方法和技巧，以便扩大解题思路，培养分析和解决实际问题的能力。

本书力求科学性、先进性、指导性，既能促进高等工科院校学生的“数字信号处理”学习，又不脱离大多数一般院校的实际，提供切实可行的参考实例。本书可作为相关专业学生报考硕士研究生的学习用参考书及复习指导书，也适合于高等院校相关专业的学生自学使用，同时可作为高等院校教师的教学参考书。

在收集和整理历年考研真题和笔记的过程中，得到了北京大学、清华大学、上海交通

大学、东南大学、同济大学、西安交通大学、西北工业大学、浙江大学、北京航空航天大学、哈尔滨工业大学、南京航空航天大学、中国科学技术大学、华中科技大学、华南理工大学、中国科学院等高等院校和科研院所的教师及研究生的热情帮助，在此向他们表示衷心的感谢。

本书由海欣主编，何慧君、凌桂龙编著，另外丁金滨、何嘉扬、张樱枝、王菁、夏金玉、石良臣、刘志明、温正、周懿等也参与了部分章节的编写工作。同时由北京航空航天大学一线授课教师对该书进行了认真仔细的审阅，并提出了许多极为宝贵的修改意见，这对提高本书质量起了很大的作用，在此致以衷心的感谢！

由于作者水平有限，编写时间较短，书中欠妥及错误之处在所难免，希望读者和同仁能够及时指出，共同促进本书质量的提高。

读者在使用本书时，若出现关于本书的相关疑问以及碰到难以解答的问题，可以到为本书专门提供的海欣考研论坛提问或直接发邮件到编者邮箱，编者会尽快给予解答。另外，该论坛还提供了其他高等院校部分真题的参考答案，读者可以到相关栏目下载。

编者邮箱：kaoyanshu@126.com

海欣考研论坛网址：www.haixin.org/kybbs

编 者

2008 年 5 月于北京

目 录

第 1 章　离散时间信号与系统

知识要点

本章涉及的要点是离散序列的基本运算、频域分析、时域抽样和频域抽样。序列的离散傅里叶级数(DFS)和离散时间傅里叶变换(DTFT)是离散信号频域分析的基础,相比连续信号的频谱,两者相同之处在于它们表达的信号都是正弦类信号,不同之处在于序列的频谱是周期谱。

时域抽样是通过对信号时域抽样过程的频域分析,连接连续信号与离散信号,建立了连续信号频谱和抽样后离散信号频谱之间的关系。频域抽样是对序列 $x[k]$ 的频谱 $X(e^{j\omega})$ 的抽样, $X(e^{j\omega})$ 的离散化导致时域的周期化。

本章在考研中占有的比重虽然不大,但关于离散系统的线性、时不变性、因果性和稳定性的判断在各个学校历年的考研真题中层出不穷。无论是单独判断,还是放在后面的滤波器设计中综合考查,其实这类问题只要牢牢抓住其定义就可以了。另外奈奎斯特抽样定理也是一个出现率很高的考点,应该引起足够重视。同时还应该掌握离散系统零状态响应的求解。

本章主要是掌握离散时间信号和系统的基本概念和定义,具体内容包括:

(1) 掌握序列的线性卷积、周期卷积和相关;

(2) 掌握离散系统的定义和特性;

(3) 掌握系统线性、时不变性、稳定性、因果性的判断;

(4) 掌握离散系统零状态响应的求解;

(5) 熟悉离散系统差分方程表示,了解系统的结构;

(6) 掌握系统的抽样定理;

(7) 理解系统抽样恢复与信号重建。

1.1　知识点详解

1.1.1　离散时间信号

1. 定义

离散时间信号即时间为离散变量的信号。如图 1－1 所示,它只在离散时间上给出函数值。一般离散时间的间隔是均匀的,以 T 表示。用 $x(nT)$表示此离散时间信号在 nT 点上的值,n 为整数。

为了方便,通常用 $x(n)$表示序列$\{x(n)\}$。

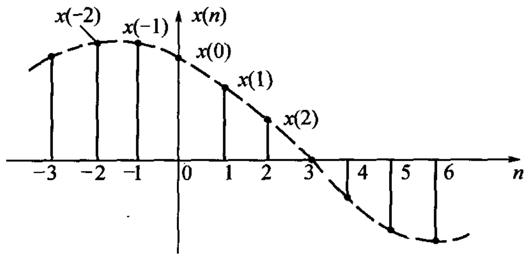


图 1-1　离散时间信号

2. 几种典型的离散时间信号

单位抽样序列(单位冲激)

$$\delta(n)=\begin{cases}1, n=0\\0, n\neq 0\end{cases}, \quad \delta(n-m)=\begin{cases}1, n=m\\0, n\neq m\end{cases}$$

抽样性　　$f(n)\delta(n)=f(0)\delta(n)=f(0)$, $x(n)=\sum\limits_{m=-\infty}^{+\infty}x(m)\delta(n-m)$

单位阶跃序列　　$u(n)=\begin{cases}1, n\geqslant 0\\0, n<0\end{cases}$

$$\delta(n)=\nabla u(n)=u(n)-u(n-1)$$

$$u(n)=\sum_{m=0}^{\infty}\delta(n-m)=\delta(n)+\delta(n-1)+\delta(n-2)+\cdots$$

矩形序列　　$R_N(n)=\begin{cases}1, & 0\leqslant n\leqslant N-1\\0, & n<0 \text{ 或 } n\geqslant N\end{cases}=u(n)-u(n-N)$

实指数序列　　$x(n)=a^n$　(a 为实数)

当$|a|<1$时,收敛;$|a|>1$时,发散。

复指数序列

$$x(n)=e^{(\sigma+j\omega_0)n}=|x(n)|e^{j\varphi}=e^{n\sigma}\cdot e^{j\omega_0 n}=e^{n\sigma}(\cos\omega_0 n+j\sin\omega_0 n)$$

正弦序列　　$x(n)=A\cos(n\omega_0+\phi)$

其中,ω_0 是正弦序列的频率,反映序列值依次周期性重复的速率,且

$$\omega_0=\Omega_0 T_s=\frac{\Omega_0}{f_s}=2\pi\frac{f_0}{f_s}$$

3. 序列的周期性

如果存在一个最小的正整数 N,满足 $x(n)=x(n+N)$,则序列 $x(n)$ 为周期性序列,N 为周期。

4. 序列间的运算

(1) 移位运算:当 m 为正时,$x(n-m)$表示依次右移 m 位;$x(n+m)$表示依次左移 m 位。

如果 $y(n)=x(n-n_0)$,则称序列 $y(n)$为序列 $x(n)$的延迟序列或移位序列(式中 n_0 为整数)。

(2) 翻褶(折叠):如果有 $x(n)$,则 $x(-n)$是以 $n=0$ 为对称轴将 $x(n)$加以翻褶的序列。

(3) 和:两序列的和是指同序号(n)的序列值逐项对应相加得一新序列,即$\{x(n)+y(n)\}$。

(4) 乘积:两序列的积是指同序号(n)的序列值逐项对应相乘,即$\{x(n)\cdot y(n)\}$。

(5) 累加:设某一序列为 $x(n)$,则 $x(n)$的累加序列 $y(n)$定义为 $y(n)=\sum_{k=-\infty}^{n} x(k)$,表示 n 以前的所有 $x(n)$的和。

(6) 差分:前向差分(先左移后相减),即 $\Delta x(n)=x(n+1)-x(n)$;后向差分(先右移后相减),即$\nabla x(n)=x(n)-x(n-1)$。

(7) 尺度变换:抽取,即 $x(n)\rightarrow x(mn)$,m 为正整数;插值,即 $x(n)\rightarrow x(n/m)$,m 为正整数。

(8) 卷积和:设序列 $x(n)$、$h(n)$,它们的卷积和 $y(n)$定义为

$$y(n)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} x(m)h(n-m)=\sum_{m=-\infty}^{\infty} h(m)x(n-m)=x(n)*h(n)$$

5. 序列的加权表示

任意序列可表示成单位抽样序列的位移加权和,$x(n)$亦可看成 $x(n)$和 $\delta(n)$的卷积和,即

$$x(n)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} x(k)\delta(n-k)$$

因此,讨论系统的特性时只需讨论系统在单位抽样序列作用下的响应即可。

6. 序列的能量

$$E=\sum_{n=-\infty}^{\infty}|x(n)|^2$$

1.1.2 离散时间系统

1. 定义

一个离散时间系统是将输入序列 $x(n)$变换成输出序列 $y(n)$的一种运算,以 $T[\cdot]$表示,如图 1-2 所示。

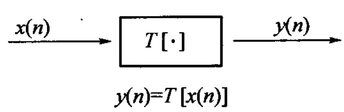


图 1-2　离散时间系统

2. 线性系统

线性特性:满足叠加原理的系统具有线性特性。即对于两个激励 x_1 和 x_2,有

$$T[ax_1+bx_2]=aT[x_1]+bT[x_2]\quad (其中\ a、b\ 为任意常数)$$

3. 非时变系统

时不变性:若 $T[x(n)]=y(n)$,则 $T[x(n-n_0)]=y(n-n_0)$。

不管作用时间先后如何，外加信号的响应均相同。判断一个系统是否是时不变系统，可根据定义来进行。

4. 线性时不变系统

线性时不变系统(LSI)是既满足叠加原理又具有非移变特性的系统。

LSI 系统的输入和输出满足卷积关系，即

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)$$

5. 因果系统

某时刻的输出只取决于此刻以及以前时刻的输入系统，称作因果系统。

LSI 系统是因果系统的充要条件是

$$n<0,\ h(n)=0$$

6. 稳定系统

有界的输入产生有界的输出系统。

LSI 系统稳定的充要条件是 $\sum_{n=-\infty}^{\infty}|h(n)|=p<\infty$

1.1.3 线性卷积及其性质

1. 线性卷积的概念

假设线性时不变系统

$$T[\delta(n)]=h(n),\ y(n)=T[x(n)]$$

式中：$h(n)$为该系统对单位抽样序列的响应；$y(n)$为系统对输入信号 $x(n)$的响应。

由 $x(n)=x(0)\delta(n)+x(1)\delta(n-1)+x(2)\delta(n-2)+\cdots=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)$

得

$$\begin{aligned}y(n)&=T[x(n)]=T\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)\delta(n-k)\right]\\&=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)T[\delta(n-k)]=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)\end{aligned}$$

所以

$$y(n)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}x(k)h(n-k)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

即线性非移变系统的输出序列就是输入序列与该系统的单位抽样响应序列的离散线性卷积。

2. 线性卷积的性质

交换律 $$y(n)=x(n)*h(n)=h(n)*x(n)$$

结合律 $$\begin{aligned}x(n)*h_1(n)*h_2(n)&=[x(n)*h_1(n)]*h_2(n)\\&=x(n)*[h_1(n)*h_2(n)]\end{aligned}$$

分配律 $$x(n)*[h_1(n)+h_2(n)]=x(n)*h_1(n)+x(n)*h_2(n)$$

3. 线性卷积的运算

离散卷积过程：序列倒置、移位、相乘、取和。

方法:解析式法、图解法、对位相乘求和求卷积、利用性质。

1.1.4 线性常系数差分方程

用线性差分方程表示的线性移不变系统的一般形式为

$$\sum_{k=0}^{N} a_k y(n-k) = \sum_{m=0}^{M} b_m x(n-m)$$

上述方程描述的系统不一定是因果的,假定(除非另作说明)在一般情况下,上述方程描述一个因果系统。

线性常系数差分方程有几种解法:迭代法;卷积和法;变换域解法——Z 变换法。

1.1.5 系统结构

系统结构指系统输入与输出的运算关系的表述方法,由差分方程可直接得到系统结构。

数字系统的表示:差分方程、框图或流图、系统函数。

两种典型系统:有限冲激响应(FIR)系统和无限冲激响应(IIR)系统。

差分方程可直接得到系统结构。

1.1.6 离散信号的频域表示和傅里叶变换

1. LSI 系统的特征函数

LSI 系统的特征函数是 $x(n)=\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$,此时输出为 $y(n)=H(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}$。

2. 离散时间信号的傅里叶变换

正变换 $$X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega}) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n)\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n}$$

反变换 $$x(n) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega n}\mathrm{d}\omega$$

3. 离散信号傅里叶变换的性质

线性 $$\mathrm{FT}[ax_1(n)+bx_2(n)] = aX_1(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})+bX_2(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

时移 $$\mathrm{FT}[x(n-n_0)] = \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega n_0}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

频移 $$\mathrm{FT}[\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 n}x(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\omega_0)})$$

折叠 $$\mathrm{FT}[x(-n)] = X(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

频域微分 $$\mathrm{FT}[nx(n)] = \mathrm{j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

复共轭 $$\mathrm{FT}[x^*(n)] = X^*(\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega})$$

卷积定理 $$\mathrm{FT}[x(n)*y(n)] = X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega})$$

调制定理 $$\mathrm{FT}[x(n)y(n)] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(\mathrm{e}^{\mathrm{j}\theta})Y(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega-\theta)})\mathrm{d}\theta$$

对称性 $$x(n) = x_{\mathrm{e}}(n)+x_{\mathrm{o}}(n)$$

其中,$x_{\mathrm{e}}(n)=x_{\mathrm{e}}^*(-n)$是共轭对称序列;$x_{\mathrm{o}}(n)=-x_{\mathrm{o}}^*(-n)$是共轭反对称序列。于是有

$$\mathrm{FT}[x_e(n)] = \mathrm{Re}[X(e^{j\omega})],\ \mathrm{FT}[x_o(n)] = j\mathrm{Im}[X(e^{j\omega})]$$

$$\mathrm{FT}\{\mathrm{Re}[x(n)]\} = X_e(e^{j\omega}),\ \mathrm{FT}\{j\mathrm{Im}[x(n)]\} = X_o(e^{j\omega})$$

若 $x[n]$是实序列,则 $X(e^{j\omega}) = X^*(e^{-j\omega})$

1.1.7 信号的抽样

1. 抽样是对时间的离散化过程

如图 1－3 所示,抽样函数的时域表示为

$$p(t) = \delta_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\delta(t-nT) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\Omega_s t}$$

如图 1－4 所示,抽样函数的频域表示为

$$\Delta_T(j\Omega) = F[\delta_T(t)] = F\left[\frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}e^{jk\Omega_s t}\right] = \frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)$$

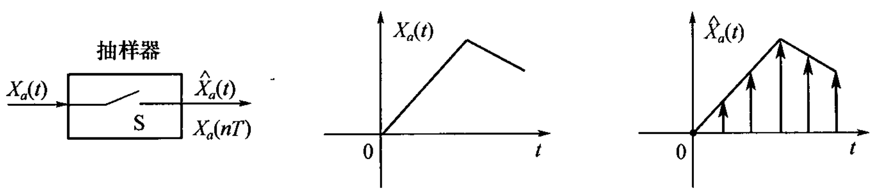


图 1－3　抽样过程的时域表示

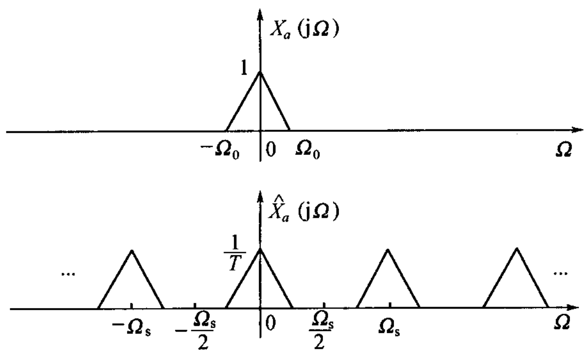


图 1－4　抽样过程的频域表示

理想抽样为

$$\hat{x}_a(t) = x_a(t)p(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty}x_a(t)\delta(t-nT) = \sum_{n=\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)$$

由调制定理得

$$\hat{X}_a(j\Omega) = F[x_a(t)\cdot\delta_T(t)] = \frac{1}{2\pi}[X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega)]$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}X_a(j\theta)\Delta_T(j\Omega-\theta)d\theta$$

抽样信号的频谱为

$$\hat{X}_a(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega) * \Delta_T(j\Omega) = \frac{1}{2\pi}X_a(j\Omega) * \left[\frac{2\pi}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\delta(\Omega - k\Omega_s)\right]$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\mathrm{j}\Omega) * \delta(\Omega - k\Omega_s) = \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} X_a(\mathrm{j}\theta)\delta(\Omega - k\Omega_s - \theta)\mathrm{d}\theta$$

$$= \frac{1}{T}\sum_{k=-\infty}^{\infty} X_a(\mathrm{j}\Omega - \mathrm{j}k\frac{2\pi}{T})$$

$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)$的频谱是以 Ω_s 为间隔进行重复的,这种情况称作周期延拓。其数学表达式为

$$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega) = \begin{cases} X_a(\mathrm{j}\Omega), & |\Omega| < \dfrac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geqslant \dfrac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

2. 抽样定理

要想抽样后能不失真地还原出原信号,抽样频率必须大于等于两倍原信号的最高频率分量,即 $\Omega_s \geqslant 2\Omega_h$ 这就是奈奎斯特抽样定理。其中,$\frac{\Omega_s}{2}$常称作折叠频率。

3. 抽样的恢复

如果抽样信号 $\hat{x}_a(t)$或$\hat{X}_a(\mathrm{j}\Omega)$通过一理想低通滤波器($\Omega = \frac{\Omega_s}{2}$),就可恢复信号 $x_a(t)$或$X_a(\mathrm{j}\Omega)$。

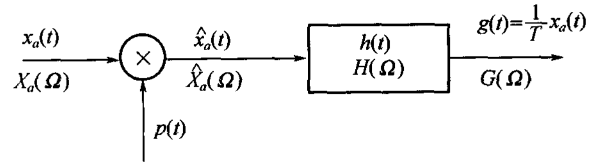
理想低通滤波器
$$H(\mathrm{j}\Omega) = \begin{cases} T, & |\Omega| < \dfrac{\Omega_s}{2} \\ 0, & |\Omega| \geqslant \dfrac{\Omega_s}{2} \end{cases}$$

其时域表示为
$$h(t) = \mathrm{FT}^{-1}[H(\mathrm{j}\Omega)] = \frac{\sin \frac{\pi}{T}t}{\frac{\pi}{T}t} = S_a\left(\frac{\pi}{T}t\right)$$

其中,$\Omega_s = \frac{2\pi}{T}$。

$$x_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{x}_a(\tau)h(t-\tau)\mathrm{d}\tau = \sum_{m=-\infty}^{\infty} x_a(mT)S_a\left[\frac{\pi}{T}(t - mT)\right]$$

即输出等于原信号抽样点的值与内插函数乘积和。图 1-5 和图 1-6 所示为信号重建的频域和时域表示。



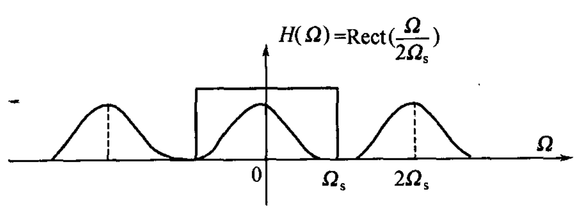


图 1-5　信号重建过程的频域表示

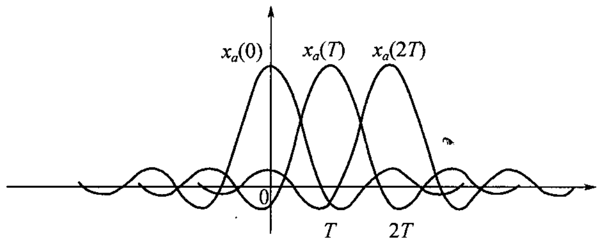


图 1-6 信号重建的时域表示

1.2 典型例题解析

【例 1】判断下列序列是否为周期序列。

(1) $x(n)=A\cos(\frac{5\pi}{6}n+\frac{\pi}{4})$；　　(2) $x(n)=\exp\left[\mathrm{j}\left(\frac{1}{4}n-\pi\right)\right]$。

【解】(1) 根据正弦型信号的公式 $x(n)=A\cos(\omega n+\theta)$，可得 $\omega=\frac{5\pi}{6}$，而$\frac{2\pi}{\omega}=\frac{12}{5}$是有理数，故是周期序列。其最小正周期为 $N=\frac{12}{5}k=12$(k 取 5)。

(2) 根据复指数序列的公式 $x(n)=\exp[(\sigma+\mathrm{j}\omega)n]$，可得 $\omega=\frac{1}{4}$，而$\frac{2\pi}{\omega}=8\pi$ 是无理数，故不是周期序列。

【注释】此题考查周期序列的概念。注意离散信号和连续信号周期性概念上的不同，前者由于是离散的，所以要求周期必须为有理数，而连续函数则无此要求。由此导致两个形式上相似的序列，一个为周期序列，另一个为非周期序列，注意区别。

【例 2】模拟信号 $x_a(T)=\sin\left(2\pi f_0 T+\frac{\pi}{8}\right)$，其中 $f_0=50\text{Hz}$。

(1) 求 $x_a(T)$的周期，抽样频率应为多少？抽样间隔应为多少？

(2) 若选抽样频率 $f_s=200\text{Hz}$，抽样间隔为多少？写出抽样信号 $\hat{x}_a(t)$的表达式。

(3) 求出对应 $\hat{x}_a(t)$的时域离散信号 $x(n)$的周期。

【解】(1) 由 $f_0=50\text{Hz}$，得 $x_a(t)$的周期为 $T_0=\frac{1}{f_0}=0.02\text{s}$，抽样频率为 $f_s>2f_0=100\text{Hz}$，抽样间隔为 $T<1/f_s=0.01\text{s}$。

(2) 选 $f_s=200\text{Hz}$，则抽样间隔为 $T=1/f_s=0.005\text{s}$。

$$\begin{aligned} x_a(nT) &= \sin\left(2\pi f_0 nT+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(2\pi f_0 n/f_s+\frac{\pi}{8}\right) \\ &= \sin\left(2\pi\frac{50}{200}n+\frac{\pi}{8}\right)=\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8}\right) \end{aligned}$$

$$\hat{x}_a(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}x_a(nT)\delta(t-nT)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8}\right)\delta\left(t-\frac{n}{200}\right)$$

(3) $x(n)=x_a(t)|_{t=nT}=\sin\left(\frac{\pi n}{2}+\frac{\pi}{8}\right)$

因为$\frac{2\pi}{\omega_0}=\frac{2\pi}{\frac{1}{2}\pi}=4$,所以 $x(n)$的周期为 $N=4$。

【注释】此题的考查点是已知连续信号表达式,求给定抽样频率下所得的离散信号。

【例 3】已知一个线性时不变系统的单位抽样响应 $h(n)$,除了区间 $N_0\leqslant n\leqslant N_1$ 之外皆为零;又已知输入信号 $x(n)$除了区间 $N_2\leqslant n\leqslant N_3$ 之外皆为零;如果假设输出信号 $y(n)$除区间$N_4\leqslant n\leqslant N_5$ 之外皆为零,试以 N_0、N_1、N_2、N_3 表示 N_4、N_5。

【解】按照题意,在区间 $N_0\leqslant n\leqslant N_1$ 之外单位抽样响应 $h(n)$皆为零;在区间 $N_2\leqslant n\leqslant N_3$之外输入 $x(n)$皆为零,因此 $y(n)=\sum_m x(m)h(n-m)$。由于 $x(m)$的非零区间为 $N_2\leqslant m\leqslant N_3$,$h(n-m)$的非零区间为 $N_0\leqslant n-m\leqslant N_1$,将两不等式相加可得 $N_0+N_2\leqslant n\leqslant N_1+N_3$,在此区间之外,$h(n-k)$和 $x(k)$的非零抽样互不重叠,故输出皆为零。由于题中给出输出除了区间 $N_4\leqslant n\leqslant N_5$ 之外皆为零,所以有

$$N_4=N_0+N_2, N_5=N_1+N_3$$

【注释】这个题目的一般意义是,两个序列相卷积,已知各自的开始点和结束点,则卷积所得序列的开始点和结束点分别是两序列的加和。

【例 4】下列系统中,$x(n)$表示输入,$y(n)$表示输出,试确定系统是否为线性系统?是否为时不变系统。

(a) $y(n)=2x(n)+3$; (b) $y(n)=x^2(n)$; (c) $y(n)=\sum_{m=-\infty}^{n}x(m)$

【解】设 $x_1(n)$、$x_2(n)$是两个任意序列,a、b 是两个任意常数。

(a) 系统定义为 $y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3$

(1) 线性组合的变换为

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=2[ax_1(n)+bx_2(n)]+3\\&=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3=y'(n)\end{aligned}$$

变换的线性组合为

$$\begin{aligned}aT[x_1(n)]+bT[x_2(n)]&=a[2x_1(n)+3]+b[2x_2(n)+3]\\&=2ax_1(n)+2bx_2(n)+3(a+b)=y''(n)\end{aligned}$$

由于 a、b 是两个任意常数,不可能使 3 恒等于 $3(a+b)$,故 $y'(n)\neq y''(n)$,该系统是非线性的。

(2) 将 $x(n)$先移位后变换,得 $T[x(n+M)]=2x(n+M)+3$

将 $x(n)$先变换后移位,得 $y(n)=T[x(n)]=2x(n)+3$

$$y(n+M)=2x(n+M)+3=T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

(b) 系统定义为 $y(n)=T[x(n)]=x^2(n)$

(1) 线性组合的变换为

$$\begin{aligned}T[ax_1(n)+bx_2(n)]&=[ax_1(n)+bx_2(n)]^2\\&=a^2x_1^2(n)+b^2x_2^2(n)+2abx_1(n)x_2(n)=y'(n)\end{aligned}$$

变换的线性组合为

$$aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = ax_1^2(n) + bx_2^2(n) = y''(n)$$

显然 $y'(n) \neq y''(n)$,该系统是非线性的。

(2) 将 $x(n)$先移位后变换,得 $\qquad T[x(n+M)] = x^2(n+M)$

将 $x(n)$先变换后移,得 $\qquad y(n) = T[x(n)] = x^2(n)$

$$y(n+M) = x^2(n+M) = T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

(c) 系统定义为 $\qquad y(n) = T[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

(1) 线性组合的变换为

$$T[ax_1(n) + bx_2(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n} [ax_1(m) + bx_2(m)]$$

$$= a\sum_{m=-\infty}^{n} [x_1(m)] + b\sum_{m=-\infty}^{n} [x_2(m)] = y'(n)$$

变换的线性组合为

$$aT[x_1(n)] + bT[x_2(n)] = a\sum_{m=\infty}^{n} x_1(m) + b\sum_{m=\infty}^{n} x_2(m) = y''(n)$$

因为 $y'(n) = y''(n)$,故该系统是线性的。

(2) 将 $x(n)$先移位后变换,得 $\qquad T[x(n+M)] = \sum_{m=-\infty}^{n+M} x(m)$

将 $x(n)$先变换后移位,得 $\qquad y(n) = T[x(n)] = \sum_{m=-\infty}^{n} x(m)$

$$y(n+M) = \sum_{m=-\infty}^{n+M} x(m) = T[x(n+M)]$$

所以该系统是时不变的。

【注释】此题考查的知识点是已知系统输入和输出的关系,判断它的线性和时不变性,这类题目一般按照定义即可。

【例 5】讨论下列各线性时不变系统的因果性和稳定性。

(1) $h(n) = \delta(n+n_0), n_0 > 0$ $\qquad$ (2) $h(n) = 2^n R_N(n)$

(3) $h(n) = 2^n u(-n)$ $\qquad$ (4) $h(n) = \frac{1}{n}u(n)$

【解】(1) 因为在 $n<0$ 时,$h(n) \neq 0$,故该系统不是因果系统。

因为 $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left|\frac{1}{n}u(n)\right| = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$, 故该系统是稳定系统。

(2) 因为在 $n<0$ 时,$h(n) = 0$,故该系统是因果系统。

因为 $S = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |h(n)| = \sum_{n=0}^{N-1} 2^n = 2^N - 1 < \infty$, 故该系统是稳定系统。

(3) 因为在 $n<0$ 时,$h(n) \neq 0$,故该系统不是因果系统。