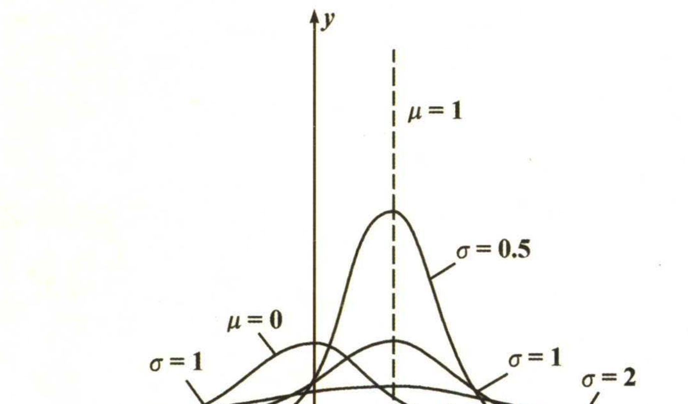
21世纪高等教育系列教材

经济数学基础

李少斌 主编



南海出版公司

21 世纪高等教育系列教材

经济数学基础

李少斌　主编

南海出版公司
2005・海口

图书在版编目(CIP)数据

经济数学基础/李少斌主编. 一海口:南海出版公司,2005.7

ISBN 7-5442-2756-1

Ⅰ.经…　Ⅱ.李…　Ⅲ.经济数学　Ⅳ.F224.0

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 018013 号

JINGJI SHUXUE JICHU

经济数学基础

主　　编	李少斌
责任编辑	张　辉
装帧设计	南海高教出版中心
出版发行	南海出版公司　**电话** (0898)65350227
社　　址	海口市蓝天路友利园大厦 B 座 3 楼　**邮编**　570203
经　　销	新华书店
印　　刷	安徽蚌埠广达印务有限公司
开　　本	787×960　1/16
印　　张	31.5
字　　数	565 千字
版　　次	2005 年 7 月第 1 版　2005 年 7 月第 1 次印刷
印　　数	1—5000 册
书　　号	ISBN 7-5442-2756-1
定　　价	38.00 元

前言

科学思维有两种方法：一种是演绎法，它从基本的定义与公理出发，按照一定的规则，推导出公式、定理和结论；另一种是归纳法，它从客观存在的现实与人们熟知的事实出发，总结归纳出合乎逻辑发展规律的一般结论。这两种方法在数学研究与学习中非常普遍，也特别重要。学习数学绝不能靠死记硬背。最重要的是要运用科学思维方法学习理解、掌握数学中的概念、性质、定理与方法。只有掌握了方法，学习数学才能左右逢源，游刃有余。我们编写的这部教材力求使学生在学习中掌握这些方法，为此在编写中我们注意以下几个方面的问题：

第一，经济数学是高等院校各经济管理类专业的一门基础课，因此，按照教学大纲的要求，适当注意了知识的完整性，比较系统地介绍了微积分的基本知识，此外还简要介绍了线性代数和概率的基本内容。其主要目的是使学生掌握所需知识的基本概念和方法，而不是刻意于知识体系的严谨性。

第二，实用性。随着社会主义市场经济体制的不断完善，管理的科学化和规范化日益受到重视，数学应用于经济管理的各个部门也日趋广泛，数学无论是作为经济工作的计算工具，还是作为经济工作分析研究的工具，都具有十分重要的作用。因此在介绍抽象的数学概念时，我们尽可能地赋予这些概念以经济意义；在介绍数学运算时，尽可能结合经济工作中的实例加以说明，以便为数学作为工具应用于经济工作铺平道路，以便使学生加深理解，扩展视野，激发学习兴趣，提高实际应用能力。

第三，化难为易，通俗易学。对于不少学生来说，学习本课程有一定的难度。本书编写坚持从实际出发，删去了不少内容坚深而又与实际应用关系不大的内容。同时在编写方法上力求循序渐进、深入浅出，便于理解和自学，基本概念尽可能用几何意义来说明，基本方法的叙述尽可能详尽且突出重点。在内容叙述上，采取由特殊到一般的方法，在对具体实例分析的基础上再介绍一般的方法，尔后又通过一定数量的例题叙述解题的基本方法。学习数学没有什么捷径可走，其中很重要的一环就是要多做多练，因此，本书编写加大了习题的份量，在各节之后都附有练习题。练习(A)作为客观性习题，主要是为消化本节基本概念之用，练习(B)主要是计算、应用等传统题型，为学生掌握本节基本计算和基本方法之用。各章之后都配有复习题，以便全面复习和巩固本章所学内容。

下编作为上编主教材的学习指导，各章编写体例如下：

一、内容提要。提纲挈领地介绍本章的概念、定义、性质、定理、法则与公式。

二、例题举要。这一部分以介绍计算与应用中的方法为主，在归纳方法的基础上，结合典型例子加以说明，这是该章的主干部分。

三、单元测验题。各章后的两套单元测验题供同学们学完本章后复习自测之用。

上述安排的目的是能使学生厚积而薄发，加深对基本概念、定理的理解，熟练掌握主要的计算公式与计算方法，提高将数学应用于经济工作的能力。学习指导是导学习方法，导学习能力，导学习智慧。至于附在书末的"《经济数学基础》习题参考答案"仅供同学们做习题时参考之用。课听好了，书看懂了，做不好习题也是枉然。只有多做多练，才能加深理解，达到真正弄懂、弄通的目的。

编　者

2005 **年** 7 **月**

目　　录

上编　经济数学基础

下编　经济数学基础学习指导

上编

经济数学基础

第1章　集合与函数

集合论是现代数学的一个重要分支，它的基本知识已被运用于数学的各个领域. 函数是数学中最基本的概念，是微积分学研究的主要对象. 本章主要介绍集合与函数的基本概念，集合与函数的基本运算与性质，然后阐述与经济有关的一些函数及其相关应用.

§1.1　集合的概念

一、集合的概念

集合是数学中一个最基本的概念，虽然是很难精确定义的，但也不难理解和掌握.

一般说来，把一些确定的、彼此不同的事物作为一个整体来研究时，这个整体便称为一个**集合**. 而组成这个集合的个别事物，称为集合的**元素**.

例如，一个班级里的全体学生可以组成一个集合；全部拉丁字母可以组成一个集合；全体实数组成实数集合；平面上所有的点可以组成一个点的集合等. 而上述集合中的元素分别为班级里的每一位学生、每一个拉丁字母、任一实数、平面上任意一点等.

通常用大写英文字母 A、B、C 等表示集合的名称，用小写英文字母 a,b,c 等表示集合的元素.

若元素 a 属于集合 A，记作 $a\in A$；若元素 a 不属于集合 A，则记作 $a\notin A$.

一个集合，若其组成集合的元素个数是有限的，则称为**有限集**，否则称为**无限集**. 有限集合 A 中所含元素的数目，称为集合 A 的**元数**或**基数**，记作 $|A|$.

集合的表示方法有列举法和描述法.

列举法是列出集合的所有元素，并用花括号括起来. 例如

$$A=\{a,b,c,d\}$$

$$N=\{0,1,2,3,\cdots\}$$

表示集合 A 有 4 个元素 a,b,c,d；集合 N 的元素是 $0,1,2,3,\cdots$. 在集合 N 表示式中使用了省略符号，表示 N 中有无限多个元素. 有限集合中也可以使用省略号. 例如

$$\{a,b,c,\cdots,z\}$$

表示由 26 个英文字母组成的集合.

描述法是将集合中元素的共同属性描述出来. 例如

$$B=\{x \mid x^2-1=0, x \text{ 是实数}\}$$

表示由方程 $x^2-1=0$ 的实数解组成的集合.

$$\mathbf{N}_+=\{x \mid x \text{ 是正整数}\}$$

表示由正整数 $1,2,3\cdots$ 组成的集合.

许多集合可以用两种方法来表示，例如上述的集合 B 和 $\mathbf{N}_+$ 可以分别写作 $B=\{-1,1\}$ 和 $\mathbf{N}_+=\{1,2,3\cdots\}$，但是有些集合就只能用一种方法表示，例如实数集合 R 就不能用列举法表示，因为实数是不胜枚举的.

常见的几个集合用特定的符号表示为：

自然数集合　$\mathbf{N}=\{0,1,2,3,\cdots\}$；

整数集合　$\mathbf{Z}=\{\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots\}$

有理数集合　$\mathbf{Q}=\{x \mid x \text{ 是有理数}\}$

实数集合　$\mathbf{R}=\{x \mid x \text{ 是实数}\}$

复数集合　$\mathbf{C}=\{x \mid x=a+b\mathrm{i}, a,b\in\mathbf{R}, \mathrm{i}=\sqrt{-1}\}$.

集合中的元素是可以相互区分开的，即在一集合中不能重复出现相同的元素. 例如 $\{a,b,b,c,d,d,d,d\}$，应记作 $\{a,b,c,d\}$.

集合中的各个元素在该集合中是无序的，可以任意列出. 例如

$$\{1,2,3\} \quad \{2,3,1\} \quad \{3,1,2\}$$

是同一集合的 3 种列举法. 习惯上，顺序表示为 $\{1,2,3\}$.

√ 集合的元素可以是任何事物，也可以是另外的集合. 例如

$$T=\{6,\{7\},\{8,\{9\}\}\}$$

其中，$6\in T$，$\{7\}\in T$，$\{8,\{9\}\}\in T$，但是 $8\notin T$，$\{9\}\notin T$，只有 $8\in\{8,\{9\}\}$，$\{9\}\in\{8,\{9\}\}$，或 $9\in\{9\}$，对于以集合为元素的集合，应注意集合的层次.

除了上述 2 种表示集合的方法外，还可以用一种称之为**文氏**(Vtnn)图的方法来直观地表示集合. 文氏图是一张表示集合的图形，在其中集合被表示为平面上的闭区域，闭区域内的点表示集合的元素，如图 1.1 所示.

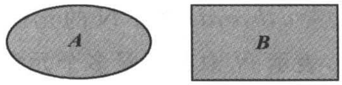


图 1.1　集合 A、B

实数之间有$=$、$\leqslant$、$<$、$\geqslant$、$>$等关系，类似地，可以定义集合之间的关系$=$、$\subseteq$、$\subset$、$\supseteq$、$\supset$.

定义 1.1　设有集合 A 和 B，如果 A 中的每一个元素都是 B 中的元素(即若 $a\in A$，必有 $a\in B$)，则称 A 是 B 的**子集**，或者说 A 包含于 B(或称 B 包含 A)，两个集合的这种关系称为**包含关系**，记作 $A\subseteq B$ 或 $B\supseteq A$. 反之，若 A 不是 B 的子集，则记作 $A\not\subseteq B$ 或 $B\not\supseteq A$.

【例 1】　设 $A=\{1,2,3,4,5\}$，　$B=\{2,3\}$，　$C=\{1,2,3,-4\}$，则 $B\subseteq A$，但 $C\not\subseteq A$.

显然自然数集合 $\mathbf{N}$，有理数集合 $\mathbf{Q}$ 和实数集合 $\mathbf{R}$ 之间有关系 $\mathbf{N}\subseteq\mathbf{Q}\subseteq\mathbf{R}$，但 $\mathbf{R}\not\subseteq\mathbf{Q}\not\subseteq\mathbf{N}$.

定义 1.2　设 A 和 B 是两个集合，若 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与 B **相等**，记作 $A=B$.

集合 A 与 B 相等，即意味着 A 与 B 具有完全相同的元素. 若 A 与 B 不相等，记作 $A\neq B$.

显然，两个集合相等的充分必要条件是它们互为子集，即：

$$A=B \text{ 当且仅当 } A\subseteq B \text{ 且 } B\subseteq A$$

定义 1.3　对任意两个集合 A 和 B，若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 A 为 B 的**真子集**，记作 $A\subset B$ 或 $B\supset A$. 如图 1.2 所示.

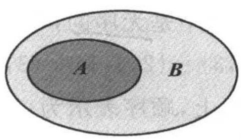


图 1.2　真子集

定义 1.3 也可以写成

$$A\subset B \text{ 当且仅当 } A\subseteq B \text{ 且 } A\neq B.$$

例 1 中的集合 B 是 A 的真子集，即 $B\subset A$. 自然数集合 $\mathbf{N}$ 是有理数集合 $\mathbf{Q}$ 的真子集，有理数集合 $\mathbf{Q}$ 是实数集合 $\mathbf{R}$ 的真子集，它们之间有关系$\mathbf{N}\subset\mathbf{Q}\subset\mathbf{R}$.

注意从属关系与包含关系的区别.从属关系“$\in$”或“$\notin$”是指集合中的元素与集合的关系，而包含关系“$\subseteq$”或“$\nsubseteq$”是指集合与集合之间的关系.例如集合 $A=\{1,2,3\}$，则有 $3\in A$，而$\{3\}\subseteq A$.

【例 2】 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,x,y\}$，$C=\{a,c\}$，则有 $C\subseteq A$，但是 $C\nsubseteq B$.

【例 3】 设 $A=\{1,2,3\}$，$B=\{1,2\}$，$C=\{1,3\}$，$D=\{2\}$，则有 $B\subseteq A$，$C\subseteq A$，$D\subseteq A$，$D\subseteq B$.

根据子集的定义，包含关系具有如下一些重要性质：

(1)**自反性**：对于任意集合 A，有 $A\subseteq A$；

(2)**反对称性**：对于任意的集合 A 与 B，若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则 $A=B$；

(3)**传递性**：对于任意集合 A、B、C，若 $A\subseteq B$，$B\subseteq C$，则有 $A\subseteq C$.

定义 1.4　不含有任何元素的集合称为**空集**，记作$\varnothing$.

例如，$\{x\mid x^2+2=0,x\in\mathbf{R}\}$是空集.但是要注意，$\varnothing\neq\{\varnothing\}$，而是$\varnothing\in\{\varnothing\}$，因为$\{\varnothing\}$不是空集，表示集合中有惟一元素$\varnothing$.

容易证明，空集是任一集合的子集，而且空集是惟一的.

定义 1.5　在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为**全集**，记作 E.

全集是一个相对性概念.由于研究的问题不同，所取的全集也不同，而且并非是惟一的，一般总是取一个比较方便的集合作为全集.例如，我们在整数范围内研究问题时，既可以取整数集 $\mathbf{Z}$ 作为全集 E，也可以取有理数集 $\mathbf{Q}$ 或实数集 $\mathbf{R}$ 作为全集，然而取 $\mathbf{Z}$ 为全集要比 $\mathbf{Q}$ 或 $\mathbf{R}$ 为全集更方便一些.

以后在讨论中所涉及的每个集合都可以看作是全集 E 的子集.

二、区间

设 $\mathbf{R}$ 为实数集合，$a,b\in\mathbf{R}$ 且 $a<b$，将满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x 的集合，叫做以 a,b 为端点的**开区间**，记作(a,b)，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

将满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x 的集合，叫做以 a,b 为端点的**闭区间**，记作$[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x\mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

将满足不等式 $a<x\leqslant b$(或 $a\leqslant x<b$)的所有实数 x 的集合，叫做以 a,b 为端点的**半开区间**，记作$(a,b]$($[a,b)$)，即

$$(a,b]=\{x\mid a<x\leqslant b\}$$

$$[a,b)=\{x\mid a\leqslant x<b\}$$

以上四种区间为有限区间，有限区间右端点 b 与左端点 a 的差 $b-a$，叫做**区间的长度**. 几何上表示点 a 与点 b 之间的线段，开区间不包括端点，闭区间包括端点.

引入记号 $+\infty$（读作“正无穷大”）和 $-\infty$（读作“负无穷大”），可以有以下几种无限区间：

$(a,+\infty)=\{x|a<x\}$　　$[a,+\infty)=\{x|a\leqslant x\}$

$(-\infty,b)=\{x|x<b\}$　　$(-\infty,b]=\{x|x\leqslant b\}$

$(-\infty,+\infty)=\{x|x\in \mathbf{R}\}$，即实数集合.

在数轴上以点 x_0 为中心，长度为 2δ 的开区间

$$(x_0-\delta,x_0+\delta)=\{x||x-x_0|<\delta,\delta>0\}$$

叫做点 x_0 的 δ **邻域**，简称点 x_0 的邻域，将 $(x_0-\delta,x_0)$ 和 $(x_0,x_0+\delta)$ 分别叫做点 x_0 的左邻域和右邻域，一般地，δ 是一个很小的正数.

例如，$|x-2|<0.1$，是以点 $x_0=2$ 为中心，长度为 0.2 的邻域，也就是开区间 $(1.9,2.1)$.

练习 1.1

（A）

一、填空题

1. 若 $A\subseteq B$，且 $B\subseteq A$，则称集合 A 与集合 B __________.
2. 设 $A=\{1,2,3,4\}$，$B=\{-1,0,1,2\}$，$C=\{1,3\}$，则 C ______ A，C ______ B.
3. 方程 $x^2-1=0$ 的实数解集可以表示为__________.
4. 集合 A 是集合 B 的真子集的定义是__________.

二、选择题

1. 设 E 是全集，$\varnothing$ 是空集，A 是任意非空集合，下列命题正确的是　（　　）

   A. $A\in E$；　　B. $\varnothing\subset\{\varnothing\}$；

   C. 有 $A\subseteq A$；　　D. $\varnothing\in\{\varnothing\}$.

2. 设 $A=\{a,b,c,d\}$，$B=\{a,b,x,y\}$，$C=\{a,c\}$，则有　（　　）

   A. $C\subseteq A$；　　B. $A\subseteq C$；

   C. $C\nsubseteq B$；　　D. $C\subseteq B$.

(B)

1. 用列举法表示下列集合：

(1)小于 20 的正偶数集合；

(2)$\{x \mid x$ 是正整数，$x^2<50\}$；

(3)$\{x \mid x^2-5x+6=0\}$；

(4)满足 $0\leqslant x\leqslant 2$，$-1\leqslant y\leqslant 0$，且 $x,y\in\mathbf{Z}$ 的点 (x,y) 的集合.

2. 用描述法表示下列集合：

(1)$\{1,3,5,7,\cdots,99\}$；

(2)$\{5,10,15,\cdots,100\}$；

(3)$\{1,4,9,16,25\}$；

(4)直角坐标系中单位圆内部的点集.

3. 判定下列各题的正确与错误：

(1)$\varnothing\subseteq\varnothing$；

(2)$\varnothing\subset\varnothing$；

(3)$\varnothing\subseteq\{\varnothing\}$；

(4)$\varnothing\in\{\varnothing\}$；

(5)$\{a,b\}\subseteq\{a,b,c,\{a,b,c\}\}$；

(6)$\{a,b\}\in\{c,b,\{\{a,b,\}\}\}$.

4. 设 A,B,C 是集合，确定下列命题是否正确，并说明理由：

(1)若 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\subseteq C$；

(2)若 $A\in B$ 及 $B\subseteq C$，则 $A\in C$；

(3)若 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\in C$；

(4)若 $A\subseteq B$ 及 $B\in C$，则 $A\subseteq C$.

§1.2 集合的运算与性质

一、集合的运算

两个实数进行加、减、乘、除运算可以得到一个新的实数. 类似地，两个集合 A 和 B 之间可以进行并、交、差、补运算，通过这些运算得到新的集合. 因此集合的运算是由已知集合构造新集合的一种方法.

定义 1.6　设 A 和 B 是两个任意集合，所有属于 A 或属于 B 的元素组成的集合称为集合 A 与 B 的**并集**，记作 $A\cup B$. 即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

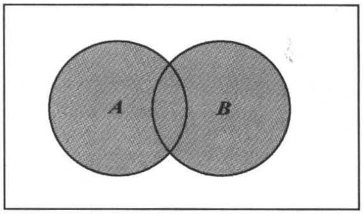


图 1.3　阴影为 $A\cup B$

【例 1】　设 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{b,c,d,e\}$，则 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$.

【例 2】　设 $A=\{x\mid -2<x<3, x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 5, x\in\mathbf{R}\}$，则 $A\cup B=\{x\mid -2<x\leqslant 5, x\in\mathbf{R}\}$.

【例 3】　设 $A\subseteq B$，$C\subseteq D$，试证明 $A\cup C\subseteq B\cup D$.

证明　对于任意 $x\in A\cup C$，则有 $x\in A$ 或 $x\in C$. 若 $x\in A$，由 $A\subseteq B$，则 $x\in B$；若 $x\in C$，由 $C\subseteq D$，则 $x\in D$，故 $x\in B\cup D$，因此，$A\cup C\subseteq B\cup D$.

定义 1.7　设 A 和 B 是两个任意集合，属于 A 同时又属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**交集**，记作 $A\cap B$. 即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

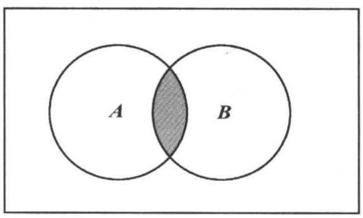


图 1.4　阴影为 $A\cap B$

【例 4】　设全集 $E=\mathbf{N}$，A 为素数集，B 为 $\mathbf{N}$ 中所有奇数组成的集合，则

$A\cup B$ 由所有正奇数和 2 组成；

$A\cap B$ 由除 2 以外的所有素数组成.

如果集合 A 与 B 没有公共元素，即 $A\cap B=\varnothing$，则称 A 与 B 是**不相交的**.

【例 5】　设 $A_1=\{\{1,2\},\{3\}\}$，$A_2=\{\{1\},\{2,3\}\}$，$A_3=\{\{1,2,3\}\}$，则 $A_1\cap$

$A_2=\varnothing$，$A_1\cap A_3=\varnothing$，$A_2\cap A_3=\varnothing$，所以集合 A_1，A_2 和 A_3 是两两互不相交的.

由上述定义，显然可以得到以下关系式：

$$A\subseteq A\cup B,B\subseteq A\cup B,A\cap B\subseteq A,A\cap B\subseteq B$$

如果 $A\subseteq B$，则 $A\cup B=B$，$A\cap B=A$

定义 1.8　设 A 和 B 是两个任意集合，属于 A 而不属于 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的**差集**，记作 $A-B$. 即

$$A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

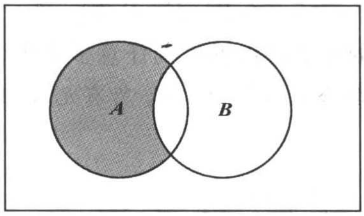


图 1.5　阴影为 $A-B$

【例 6】　设 $A=\{x\mid -1\leqslant x<2,x\in\mathbf{R}\}$，$B=\{x\mid 0<x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$

则　$A-B=\{x\mid -1\leqslant x\leqslant 0,x\in\mathbf{R}\}$

$B-A=\{x\mid 2\leqslant x\leqslant 3,x\in\mathbf{R}\}$

定义 1.9　设有全集 E，集合 $A\subseteq E$，由 E 中所有不属于 A 的元素组成的集合称为 A 的**补集**，记作 $\sim A$. 即

$$\sim A=\{x\mid x\in E \text{ 且 } x\notin A\}$$

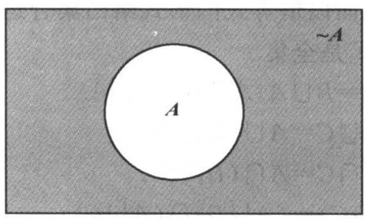


图 1.6　阴影为 $\sim A$

由定义 1.8、定义 1.9，可以得到差集的一个重要等式：$A-B=A\cap\sim B$

证明　对于任意的 x，若 $x\in A-B$，即 $x\in A$ 且 $x\notin B$，从而 $x\in A$ 且 $x\in\sim B$，有 $x\in A\cap\sim B$，故 $A-B\subseteq A\cap\sim B$.

反之，若 $x\in A\cap\sim B$，即 $x\in A$ 且 $x\in\sim B$，从而 $x\in A$ 且 $x\notin B$，有 $x\in A-$