普通高等教育“十一五”国家级规划教材

线性代数与空间解析几何

（第三版）

哈尔滨工业大学数学系
郑宝东 主编

高等教育出版社

普通高等教育"十一五"国家级规划教材

线性代数与空间解析几何

(第三版)

哈尔滨工业大学数学系
郑宝东　主编
郑宝东　邓廷权　编

高等教育出版社

内容提要

本书是哈尔滨工业大学所编“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”——《大学数学》丛书中的一本，全套丛书包括《工科数学分析(第三版)(上、下)》、《线性代数与空间解析几何(第三版)》、《概率论与数理统计》、《数值分析》共5本教材。

本书将线性代数与空间解析几何这两部分内容按其自身的内在联系合理地结合起来，使它们相互支持，前后呼应，成为一体。内容包括行列式、矩阵、几何向量、n维向量、空间中的平面与直线、线性方程组、特征值与特征向量、线性空间与线性变换二次型、空间中的曲面与曲线。

本书配有内容丰富、类型齐全、难易适度的习题和综合练习，并以附录形式介绍了多项式、广义逆矩阵和Jordan标准形。全书层次清晰，论证简洁，可读性强。

本书适合作为高等院校理工科非数学类各专业相应课程的教材或教学参考书，亦可作为硕士研究生入学考试的参考书。

图书在版编目(CIP)数据

线性代数与空间解析几何/郑宝东主编.—3版.—北京:高等教育出版社,2008.6

ISBN 978-7-04-023904-1

Ⅰ.线… Ⅱ.郑… Ⅲ.①线性代数-高等学校-教材 ②空间几何:解析几何-高等学校-教材 Ⅳ.O151.2 O182.2

中国版本图书馆CIP数据核字(2008)第070613号

策划编辑 王 强 责任编辑 胡乃冏 封面设计 张志奇 责任绘图 吴文信
版式设计 王 莹 责任校对 胡晓琪 责任印制 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	购书热线	010-58581118
社 址	北京市西城区德外大街4号	免费咨询	800-810-0598
邮政编码	100120	网 址	http://www.hep.edu.cn
总 机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
			http://www.landraco.com.cn
经 销	蓝色畅想图书发行有限公司	畅想教育	http://www.widedu.com
印 刷	北京未来科学技术研究所有限责任公司印刷厂		
		版 次	2001年7月第1版
			2008年6月第3版
开 本	787×960 1/16		
印 张	16.75	印 次	2008年6月第2次印刷
字 数	310 000	定 价	17.90元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题，请到所购图书销售部门联系调换。

物料号 23904-00

大学数学系列教材编写委员会

第三版前言

培养基础扎实、勇于创新型人才，历来是大学教育的一个重要目标。随着知识经济时代的到来，这一目标显得更加突出。在工科大学教育中，数学课既是基础理论课程，又在培养学生抽象思维能力、逻辑推理能力、空间想像能力和科学计算能力诸方面起着特殊重要的作用。为适应21世纪高等学校学生和广大工程技术人员对数学的需求，我校作为国家工科数学教学基地之一，多年来在数学教学改革方面进行了一定的探索，已经初见成效。结合这些教学改革成果，我校编写了《大学数学系列教材》，本书就是其中的一本。

本书在如下三个方面作了修订。

1. 为了提高理工科学生利用线性代数分析问题的水平，增强自主创新的能力，第三版更加注重对基本概念的阐述，特别给出了特征值、特征向量的实际背景和深刻含义。

2. 矩阵的初等变换是线性代数处理问题的最基本方法之一。第三版在理论与应用两个方面加强了对矩阵初等变换的处理，尤其强调了矩阵乘法与矩阵初等变换的联系，利用初等矩阵、可逆矩阵刻画矩阵的初等变换。

3. 分块阵的运算与分块阵的初等变换在线性代数的理论证明和实际应用中占有重要地位。借助分块矩阵，不仅可以把高阶矩阵的问题转化为低阶矩阵的问题，而且可以把低阶矩阵的问题放到高阶矩阵的环境中处理，效果显著。第三版加强了对分块阵初等变换的处理，给出了应用实例。

除了上述三点较重要的修改外，对第二版的某些习题、例题以及个别文字也有些修改。

自从本书问世以来，作者收到校内外许多专家和读者的反馈信息，他们对本教材提出了很多有价值的改进意见。正是由于大家的关心与支持才使本书顺利成为“普通高等教育‘十一五’国家级规划教材”。借此第三版的机会，向关心与支持我们工作的所有专家和读者表示由衷的谢意。

尽管我们做了很大努力，力求克服第一、二版的不足，但是由于我们的水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者再予指正。

编者

2008年2月于哈尔滨工业大学

第二版前言

自从本教材首次出版以来，作者收到读者很多反馈信息，他们对本教材提出了许多很有价值的改进意见。这是对我们工作的鼓励和支持，借此再版之机，向关怀和支持我们工作的广大读者及同行表示由衷的谢意。

根据目前教学改革的精神，结合我们的教学实践，此次修订对教材内容及习题作了小量增删。为使线性代数与空间解析几何更好地结合，我们对教材内容、体系作了小量调整。为开阔学生视野，作为附录，我们保留了广义逆矩阵简介、Jordan 标准形简介，并增加了多项式代数的有关内容，理科性质较强的工科专业的学生可以选学这部分内容。如果学生独立完成本教材的综合练习 100 题有困难，教师可选其中部分习题作为示范题讲解。

尽管此次修订过程中我们作了很大努力，力求克服第一版教材的不足，保持原教材的特点，但是由于我们水平有限，不妥之处在所难免，敬请广大读者再予指正。

编者

2003 年 3 月于哈尔滨工业大学

第一版前言

作为一种工具，数学在人类科学的进步中所起的作用是不言而喻的。今天，数学技术已成为高技术的突出标志和不可或缺的组成部分。随着科学的进步，尤其是计算机和信息技术的迅速发展，知识更新的速度不断加快。人们已不满足于把数学仅仅当作一种工具来看待，而且希望通过数学训练领会到数学的思想方法和精神实质，提高数学素养，形成一种能力，终生受益。基于这种观念，在教材的编写过程中，我们努力遵循如下几个原则：

1. 精心选择、安排教学内容，以利于培养学生对事物某一方面结构的归纳和抽象的能力，以及从具体到一般的联想能力。

2. 内容的论述科学、准确，使学生掌握一种精确的数学语言，体会到线性代数与空间解析几何的思想方法，使学生具有通过自学掌握新的数学工具和数学思想的能力。

3. 精心安排例题、习题、综合练习题，使学生养成正确的演绎推理习惯，具备较强的自己动手推理、计算的能力。

线性代数是研究有限维空间线性理论的数学分支，有限维线性空间的理论来源于二维、三维空间中的向量代数。我们把二维、三维空间的向量代数安排在一般 n 维向量前讲授，以利于学生了解这部分内容的渊源。线性代数中的许多概念都是从几何中抽象推广出来的，在几何中可以找到这些概念的模型。解析几何是利用代数方法研究几何问题的数学分支。我们把这两部分内容按其内在联系合理地结合起来，使学生充分体会从具体到一般的抽象思维方法，充分体会代数学与几何学的相互支撑和相互促进的作用。

本书编者在编写过程中一直站在读者的角度，力求通俗易懂，并充分考虑当前全国硕士生入学考试的需要，其内容和难易程度符合全国研究生入学考试大纲的要求。

本书是在多年教学实践与教学改革的基础上逐步形成的，凝结了哈尔滨工业大学数学系许多教师的教学经验，尤其是戚振开教授给予我们许多指导，在此一并表示深深的谢意。

由于编者水平有限，教材中缺点和疏漏在所难免，恳请读者批评指正。

编者

2000 年 8 月于哈尔滨工业大学

目录

第一章 n 阶行列式

行列式的概念源于对线性方程组的研究. 随着科学与技术的发展，行列式已经成为解决科学研究和工程技术中诸多问题的有效工具.

本章主要讨论如下几个问题：

1. 行列式的定义；
2. 行列式的性质；
3. 行列式的计算；
4. Cramer 法则.

1.1 n 阶行列式的概念

1.1.1 全排列的逆序数、对换

为了给出 n 阶行列式的定义，首先介绍全排列的“逆序数”和全排列的“对换”.

把 n 个不同的元素排成一列，叫做这 n 个元素的**全排列**(简称**排列**). 称 n 个不同元素的排列为 n 阶排列，给定 n 个不同元素的排列共有 $n!$ 种. 例如，自然数 1，2，3 的排列共有六种：

1 2 3，　1 3 2，　2 1 3，　2 3 1，　3 1 2，　3 2 1.

为了方便，今后把自然数 $1,2,\cdots,n$ 视为 n 个不同的元素的代表. 用 p_i 表示这 n 个数中的一个($i=1,2,\cdots,n$)，且当 $i\neq j$ 时 $p_i\neq p_j$，于是 $p_1p_2\cdots p_n$ 便是 $1,2,\cdots,n$ 的一个排列. 对于排列 $p_1p_2\cdots p_n$，我们把排在 p_i 前面且比 p_i 大的数的个数 t_i 称为全排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 中 p_i 的**逆序数**，把这个排列中各数的逆序数之和

$$t_1+t_2+\cdots+t_n$$

称为这个排列的**逆序数**，记为 $t(p_1p_2\cdots p_n)$.

逆序数为奇数的排列称为**奇排列**；逆序数为偶数的排列称为**偶排列**. 显然，排列 $12\cdots n$ 的逆序数为 0，故它是偶排列. 称此排列为**自然排列**.

例 1　求排列 23514 的逆序数.

解　在排列 23514 中，2 的逆序数是 0；3 的逆序数是 0；5 的逆序数是 0；1 的逆序数是 3；4 的逆序数是 1，故排列 23514 的逆序数

$$t(23514)=0+0+0+3+1=4.$$

在一个排列中，将某两个数的位置对调(其他数不动)的变动叫做一个**对换**. 两个相邻数的对换称为**相邻对换**.

定理 1.1　一个排列中的任意两个数对换后，排列改变奇偶性.

证　先证相邻对换的情形.

设一个排列为 $a_1a_2\cdots a_s abb_1b_2\cdots b_m$，对换 a 与 b 后，排列变为 $a_1a_2\cdots a_s bab_1b_2\cdots b_m$. 显然，经过此对换后，$a_1,a_2,\cdots,a_s,b_1,b_2,\cdots,b_m$ 的逆序数并不改变，而 a，b 两数的逆序数为：当 $a<b$ 时，a 的逆序数增加 1，而 b 的逆序数不变；当 $a>b$ 时，a 的逆序数不变，而 b 的逆序数减少 1. 所以，排列 $a_1a_2\cdots a_s abb_1b_2\cdots b_m$ 与 $a_1a_2\cdots a_s bab_1b_2\cdots b_m$ 的奇偶性不同.

再证一般对换的情形.

对排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 做 m 次相邻对换，变成 $a_1a_2\cdots a_sabb_1b_2\cdots b_mc_1\cdots c_n$，再做 $m+1$ 次相邻对换，变成 $a_1a_2\cdots a_sbb_1b_2\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$. 总之，经 $2m+1$ 次相邻对换，可以把排列 $a_1\cdots a_sab_1\cdots b_mbc_1\cdots c_n$ 变成排列 $a_1\cdots a_sbb_1\cdots b_mac_1c_2\cdots c_n$. 所以，这两个排列的奇偶性相反. □

1.1.2　行列式的定义

行列式的概念源于对线性方程组的研究.

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2=b_1, \\ a_{21}x_1+a_{22}x_2=b_2, \end{cases} \tag{1}$$

其中 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$.

现在讨论方程组(1)的求解公式. 对(1)作加减消元得

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_1=b_1a_{22}-a_{12}b_2,$$

$$(a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21})x_2=a_{11}b_2-b_1a_{21}.$$

由 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，得

$$\begin{cases} x_1=\dfrac{b_1a_{22}-a_{12}b_2}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}, \\[2ex] x_2=\dfrac{a_{11}b_2-b_1a_{21}}{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{2}$$

式(2)就是方程组(1)的求解公式. 但式(2)不易记忆，因而有必要引进新的符号表示式(2). 这就是行列式的起源. 我们看到 x_1，x_2 的表达式中分母都是 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$，$x_1$ 的表达式的分子是将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 a_{11}，a_{21} 分别用 b_1，b_2 代替而成，x_2 的表达式的分子是将 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 中的 a_{12}，a_{22} 分别用 b_1，b_2 代替而成. 于是，只要把分母的结构搞清楚，那么 x_1，x_2 的结构也就搞清楚了.

设 a_{11}，a_{12}，a_{21}，a_{22} 是任意四个数，称代数和 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 为**二阶行列**

式，记作

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

称 $a_{ij}(i,j=1,2)$ 为这个行列式的**元素**，a_{ij} 的两个下角标 i，j 分别表示 a_{ij} 所在的行和列的序号.

例如：$\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1\times5-4\times2=-3.$

利用二阶行列式，线性方程组(1)的解可表示为

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}},\ x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}.$$

记 $$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix},\ D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix},\ D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix},$$

则
$$x_1 = \frac{D_1}{D},\ x_2 = \frac{D_2}{D}.$$

例如，对线性方程组

$$\begin{cases} 3x_1 + 5x_2 = 1, \\ -x_1 + 2x_2 = 1. \end{cases}$$

由于

$$D = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 3\times2-5\times(-1)=11\neq0,$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times2-5\times1=-3,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3\times1-1\times(-1)=4,$$

所以

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D} = -\dfrac{3}{11}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D} = \dfrac{4}{11}. \end{cases}$$

为了得出关于三元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的解的类似表达式，我们引入三阶行列式. 称

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{3}$$

为三阶行列式.

例如

$$\begin{vmatrix} 3 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 3\times1\times0 + 0\times2\times2 + 4\times1\times1 - 3\times2\times1 - 0\times1\times0 - 4\times1\times2 = -10.$$

利用三阶行列式，可以把一类三元线性方程组的解表示成简洁的形式. 例如，设方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases}$$

的系数行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \neq 0,$$

记

$$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix},$$

则该方程组的解为

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad x_3 = \frac{D_3}{D}.$$

由三阶行列式的定义容易看出：

1. 式(3)等号后共有 3！项.

2. 式(3)等号后的每一项恰是三个元素的乘积 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}$. 如果将行指标按自然次序排成123，则这三个元素的列指标排成 $p_1p_2p_3$，它是 1，2，3 的排列. 因此，等号右边恰好是所有位于不同行、不同列的 3 个元素之积的代数和.

3. 式(3)等号后各项的正负号由列指标排列的奇偶性决定(此时行指标按自然次序排列). 对应的列指标的排列分别是 123，312，231 时，它们都是偶排列，取正号；对应的列指标的排列分别是 132，213，321 时，它们都是奇排列，取负号.

综上，可将三阶行列式写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \sum_{p_1p_2p_3} (-1)^{t(p_1p_2p_3)} a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3},$$

其中“$\sum$”是对 1，2，3 的所有三阶排列 $p_1p_2p_3$ 取和.

至此，可将行列式的概念推广到 n 阶.

定义 1.1 设 n^2 个数，排成 n 行 n 列的数表

$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{matrix} \tag{4}$$

其中 a_{ij} 是第 i 行第 j 列的数(称为元素). 每次取由 1 至 n 的一个排列 $p_1p_2\cdots p_n$，做 n 个元素 a_{1p_1}，a_{2p_2}，…，a_{np_n} 的乘积，并冠以符号 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$，得到一项

$$(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

这样的项共有 n！个. 称这 n！项的和为与表(4)相对应的 n **阶行列式**①，记作

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n},$$

其中“$\sum$”是对所有 n 阶排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 取和. 也可把行列式简记作 $\Delta(a_{ij})$.

因此，表(4)所对应的行列式是 n！项的代数和. 这些项是一切可能的取自表(4)的不同行、不同列的 n 个元素的乘积. 其一般项为 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是奇排列时，此项取负号；当 $p_1p_2\cdots p_n$ 是偶排列时，此项取正号.

由定义可知，

---

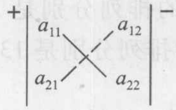
① 行列式的概念起源于 17 世纪 90 年代.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$

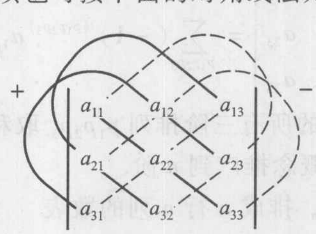
与前面的定义是一致的.

当 $n=1$ 时，一阶行列式 $|a| = a$，不要与绝对值记号混淆.

仔细观察二阶行列式的定义，可以看出，二阶行列式的各项可按下面的对角线法则求出：



同样三阶行列式的各项也可按下面的对角线法则求出：



但是，阶数大于 3 的行列式没有类似的对角线法则.

显然，若行列式 D 的某行(列)的元素全是零，则一般项 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}=0$，故此行列式为零.

例 2　证明四阶行列式

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & a_{33} & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}.$$

证　这是一个四阶行列式，应有 $4!=24$ 项. 在每项 $a_{1p_1}a_{2p_2}a_{3p_3}a_{4p_4}$ 中，只要有一个元素等于零，乘积就是零，所以只需计算乘积中不出现零的项. 由于第 4 行中元素除了 a_{44} 外都是 0，故只需取 $p_4=4$，第 3 行元素除了 a_{33}，a_{34} 外都是 0，现已取 $p_4=4$，故只需取 $p_3=3$. 同理，只需取 $p_2=2$，$p_1=1$. 于是这个行列式的展开式中不为 0 的乘积只可能是 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$，而排列 1234 的逆序数是 0，所以这一项所带的符号是正的. 因此，该行列式等于 $a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}$. □

同理可以证明

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

称这种主对角线(从左上角到右下角这条线)以下(上)的元素都是 0 的行列式为**上(下)三角形行列式**. 类似于上三角形行列式，还有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$
$$= (-1)^{t(n,n-1,\cdots,2,1)} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}$$
$$= (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} a_{1n}a_{2,n-1}\cdots a_{n1}.$$

在行列式的定义中，为方便，我们将 n 个元素的行指标按自然次序排列. 事实上，数的乘法是可交换的，因而这 n 个元素的次序是可以任意排列的. 一般地，n 阶行列式中的项可以写成

$$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}. \tag{5}$$

其中 $i_1i_2\cdots i_n$ 和 $j_1j_2\cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的两个排列. 利用定理 1.1 可以证明，n 阶行列式中，项(5)前面的符号等于

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}.$$

事实上，对换 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 中任两个数后，由于 $t(i_1i_2\cdots i_n)$ 和 $t(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性同时改变，所以 $t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)$ 的奇偶性不变，从而 $(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}$ 不变. 经一系列对换，可将 $a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 变成 $a_{1p_1}a_{2p_2}\cdots a_{np_n}$，于是

$$(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)} = (-1)^{t(1\,2\,3\,\cdots\,n)+t(p_1p_2\cdots p_n)} = (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)},$$

故由 n 阶行列式的定义知，$a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(i_1i_2\cdots i_n)+t(j_1j_2\cdots j_n)}$. 特别地，项 $a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$ 前面的符号等于 $(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}$. 于是 n 阶行列式的定义又可以写成

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum (-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)} a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}. \tag{6}$$

我们定义的行列式中的元素是数，事实上，可以将其推广成元素是某些其他数学对象的情形. 例如，可以同样地定义元素是多项式的行列式.

1.2　行列式的性质

设
$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

记
$$D'=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

即 D'是这样得到的：把 D 中第 i 行作为 D'的第 i 列. 这就是说 D'的第 i 行第 j 列处的元素恰为 D 的第 j 行第 i 列处的元素.

称 D'为行列式 D 的**转置行列式**.

性质 1.1　行列式与它的转置行列式相等.

证　记 $b_{ij}=a_{ji}, i,j=1,2,\cdots,n$，则由式(6)可得

$$D'=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix}$$
$$=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}b_{1p_1}b_{2p_2}\cdots b_{np_n}$$
$$=\sum(-1)^{t(p_1p_2\cdots p_n)}a_{p_11}a_{p_22}\cdots a_{p_nn}$$
$$=D.$$

性质 1.1 表明，对于行列式而言，关于“行”成立的性质，对于“列”也同样成立，反之亦然.

性质 1.2　互换行列式的两行(列)，行列式变号.

证　设行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},\qquad D_1=\begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \cdots & b_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{j1} & b_{j2} & \cdots & b_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nn} \end{vmatrix},$$