21世纪高等教育规划教材

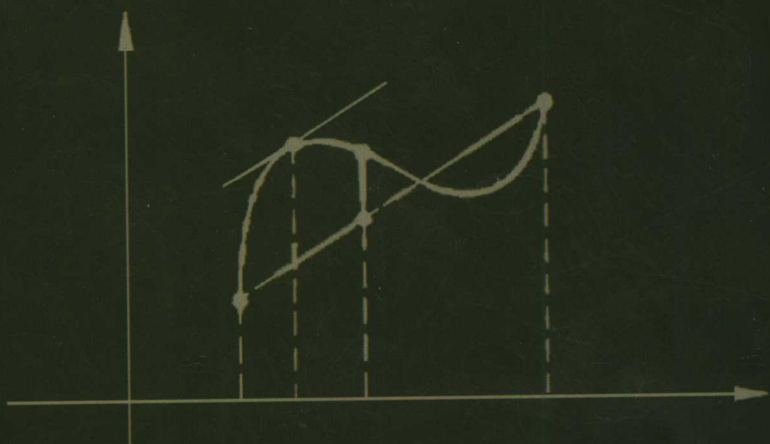
上册

# 高等数学

SHANGCE

GAODENG SHUXUE

主　编◎张波汉　谭千蓉
副主编◎温　松



SWJUP 西南交通大学出版社
Http://press.swjtu.edu.cn

21世纪高等院校规划教材

# 高 等 数 学

（上册）

主　编　张波汉　谭千蓉
副主编　温　松
编　委　徐丽君　严天艳
　　　　李世权　杨昌树

西南交通大学出版社
·成　都·

## 内 容 提 要

本书分为上、下两册. 上册内容包括：函数与极限、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、定积分的应用、向量代数与空间解析几何等七章.

本教材注重基础，取材优化，难易适度，叙述简明、清楚，便于教学和自学，可作为理工科应用型本科教材和参考书，也可供其他类型的本科生和专科生使用.


**图书在版编目（CIP）数据**

高等数学. 上册 / 张波汉，谭千蓉主编. —成都：西南交通大学出版社，2007.7
21世纪高等教育规划教材
ISBN 978-7-81104-242-9

Ⅰ. 高… Ⅱ. ①张… ②谭… Ⅲ. 高等数学
Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2006）第 025685 号

21世纪高等教育规划教材

**高 等 数 学**

（上册）

主编　张波汉　谭千蓉

*

责任编辑　张宝华
封面设计　何东琳设计工作室
西南交通大学出版社出版发行
(成都二环路北一段 111 号　邮政编码：610031　发行部电话：028-87600564)
http: //press.swjtu.edu.cn
四川森林印务有限责任公司印刷

*

成品尺寸：170 mm×230 mm　印张：25.375
字数：480 千字
2007 年 7 月第 1 版　2007 年 7 月第 1 次印刷
**ISBN 978-7-81104-242-9**
定价：34.00 元

# 前　言

《高等数学》是理工科学生最重要的数学基础理论课程. 为了适应高等教育的发展，根据国家教委对培养应用型本科人才的要求，我院具有多年丰富教学经验的教师编写了本教材. 根据培养理工科应用型人才的要求和特点，本书的基础理论以必须、够用为度，以掌握概念、培养基本技能、强化应用、提高分析问题和解决实际问题的能力为重点，在保持课程自身的系统性、完整性、逻辑性的基础上作了适当削减.

作者在编写上强调微积分的基本思想与基本方法，着重处理好重点和难点. 精选了一些例题和习题，难易适中，具有典型性和启发性. 文字叙述简明易懂、详略得当，内容深入浅出、安排合理、便于自学.

本书的编写情况为：第一章、第二章由张波汉编写；第三章由杨昌树编写；第四章、第七章由徐丽君编写；第五章、第十二章由严天艳编写；第六章由李世权编写；第八章、第十一章由温松编写；第九章、第十章由谭千蓉编写. 在编写过程中，攀枝花学院数理教学部的李思霖、唐琦琳、林宗兵、龚萍、刘裕君、韦建峰等老师也做了大量工作，在此一并致谢.

由于编者水平有限，错漏疏忽在所难免，恳请批评指正.

编　者

2006 年 3 月 18 日

# 目　　录

# 第一章　函数与极限

高等数学研究的主要对象是函数．极限理论是高等数学的理论基础，所使用的基本研究方法是极限方法．函数的连续性是函数的一种重要性质．本章将介绍函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的一些性质．

## 第一节　函　　数

### 一、集　合

#### 1. 集合的概念

集合的概念是数学的基本概念之一．下面先通过例子来说明这个概念．例如，某图书馆的全部藏书构成一个集合；到一个角的两边距离相等的点构成一个集合；全体实数构成一个集合，等等．一般的，所谓集合（简称集）是指在一定范围内具有某种特定性质的事物的总体．组成这个集合的每个个体事物称为该集合的元素（简称元）．一个集合中的元素是确定的；集合中的各元素必须是彼此互异的；一个事物是否属于或不属于该集合是可判定的．集合的元素还具有无序的特性．

通常用大写字母 $A,B,C,\cdots$ 表示集合，用小写字母 $a,b,c,\cdots$ 表示集合的元素．如果 $a$ 是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 属于 $A$，记为 $a\in A$；如果 $a$ 不是集合 $A$ 的元素，就说 $a$ 不属于 $A$，记为 $a\notin A$ 或 $a\overline{\in}A$. 一个集合，若它只含有有限个元素，则称为有限集；若它含有无限多个元素，则称为无限集．

集合的表示方法，常用列举法和描述法两种．

**列举法**　就是把集合的全体元素一一列举出来，写在大括号内，重复的元素只写一次．例如，由元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 组成的集合 $A$，可表示成

$$A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$$

**描述法**　就是把所有属于某集合 $M$ 的元素 $x$ 所具有的特定性质 $P$ 描述出

来，写在大括号内的方法，即

$$M=\{x \mid x \text{ 具有性质 } P\}$$

例如，集合 $B$ 是方程 $x^2-1=0$ 的解集，可表示成

$$B=\{x \mid x^2-1=0\}$$

习惯上，全体正整数的集合记作 $\mathbf{N}$，即

$$\mathbf{N}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体整数的集合记作 $\mathbf{Z}$，即

$$\mathbf{Z}=\{\cdots,-n,\cdots,-2,-1,0,1,2,\cdots,n,\cdots\}$$

全体有理数的集合记作 $\mathbf{Q}$，即

$$\mathbf{Q}=\left\{\frac{p}{q} \mid p\in\mathbf{Z},q\in\mathbf{N} \text{ 且 } p \text{ 与 } q \text{ 互质}\right\}$$

全体实数的集合记作 $\mathbf{R}$.

设 $A,B$ 是两个集合，如果集合 $A$ 的所有元素都是集合 $B$ 的所有元素，则称 $A$ 是 $B$ 的子集，记作 $A\subseteq B$（读作 $A$ 包含于 $B$）或 $B\supseteq A$（读作 $B$ 包含 $A$）. 如果集合 $A$ 与集合 $B$ 互为子集，即 $A\subseteq B$ 且 $B\supseteq A$，则称集合 $A$ 与集合 $B$ 相等，记作 $A=B$. 例如，设 $A=\{-1,1\}$，$B=\{x \mid |x|=1\}$，则 $A=B$. 若 $A\subseteq B$ 且 $A\neq B$，则称 $A$ 是 $B$ 的真子集，记作 $A\subset B$. 不含任何元素的集合称为空集，记作 $\varnothing$. 例如，$\{x \mid x\in\mathbf{R} \text{ 且 } x^2+1=0\}$是空集，且规定空集 $\varnothing$ 是任何集合 $A$ 的子集，即 $\varnothing\subseteq A$.

### 2. 集合的运算

集合的运算主要有“并”、“交”、“差”三种.

设 $A,B$ 是两个集合，由所有属于 $A$ 或属于 $B$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的并集（简称并），记作 $A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

由所有既属于 $A$ 又属于 $B$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的交集（简称交），记作 $A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

由所有属于 $A$ 而不属于 $B$ 的元素组成的集合，称为 $A$ 与 $B$ 的差集（简称差），记作 $A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

有时，我们研究的问题限定在一个大的集合 $I$ 中进行，所研究的其他集合 $A$ 都是 $I$ 的子集．此时，称集合 $I$ 为全集或基本集，称 $I\backslash A$ 为 $A$ 的余集或补集，记作 $A^C$ 或 $\complement_I A$．例如，在实数集 $\mathbf{R}$ 中，集合 $A=\{x\mid 1<x<2\}$ 的余集就是

$$A^C=\{x\mid x\leqslant 1\text{ 或 }x\geqslant 2\}$$

集合的并、交、余运算满足下列法则．

设 $A,B,C$ 为任意三个集合，$I$ 为全集，则下列法则成立：

(1) **交换律**　$A\cup B=B\cup A$，　$A\cap B=B\cap A$.

(2) **结合律**　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$，

$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

(3) **分配律**　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$，

$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

(4) **德摩根公式**　$\complement_I(A\cup B)=\complement_I A\cap\complement_I B$，

$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$.

(5) $\complement_I\varnothing=I$，$\complement_I I=\varnothing$.

(6) $A\cup\complement_I A=I$，$A\cap\complement_I A=\varnothing$，$\complement_I(\complement_I A)=A$.

以上法则都可按集合相等的定义验证．下面只证德摩根公式的第二个等式，即证“两个集合交集的余集等于它们余集的并集”．

**证明**　$\forall x\in\complement_I(A\cap B)\Leftrightarrow x\notin A\cap B\Leftrightarrow x\notin A$ 或 $x\notin B\Leftrightarrow x\in\complement_I A$ 或 $x\in\complement_I B\Leftrightarrow x\in\complement_I A\cup\complement_I B$，故

$$\complement_I(A\cap B)=\complement_I A\cup\complement_I B$$

在两个集合之间还可以定义直积或笛卡儿(Descartes)乘积．设 $A,B$ 是任意两个集合，在集合 $A$ 中任意取一个元素 $x$，在集合 $B$ 中任意取一个元素 $y$，组成一个有序对 $(x,y)$，把这样的有序对作为新元素，它们全体组成的集合称为集合 $A$ 与集合 $B$ 的直积，记为 $A\times B$，即

$$A\times B=\{(x,y)\mid x\in A\text{ 且 }y\in B\}$$

例如，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}=\{(x,y)\mid x\in\mathbf{R},y\in\mathbf{R}\}$ 为 $xOy$ 面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $R^2$.

### 3. 区间与邻域

区间是用得较多的一类数集．设 $a$ 和 $b$ 都是实数，且 $a<b$，则称数集 $\{x\mid a<x<b\}$ 为开区间，记作 $(a,b)$，即

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

$a$ 和 $b$ 称为开区间 $(a,b)$ 的端点，这里 $a\notin(a,b)$，$b\notin(a,b)$.

数集 $\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记作 $[a,b]$，即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$$

$a$ 和 $b$ 称为闭区间 $[a,b]$ 的端点，这里 $a\in[a,b]$，$b\in[a,b]$.

类似地，可说明以下两个区间：

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\}$$
$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\}$$

区间 $[a,b)$ 和 $(a,b]$ 都称为半开半闭区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 $b-a$ 称为这些区间的长度. 从数轴上看，这些有限区间是长度有限的线段. 闭区间 $[a,b]$ 与开区间 $(a,b)$ 在数轴上的表示分别如图 1-1(a)与(b)所示. 此外，还有无限区间. 引进记号 $+\infty$(读作正无穷大)及 $-\infty$(读作负无穷大)，则可类似地表示无限区间，例如

$$(a,+\infty)=\{x \mid x>a\},\qquad [a,+\infty)=\{x \mid x\geqslant a\}$$
$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\},\qquad (-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$$

无限区间 $[a,+\infty)$ 和 $(-\infty,b)$ 在数轴上的表示如图 1.1(c)与(d)所示.

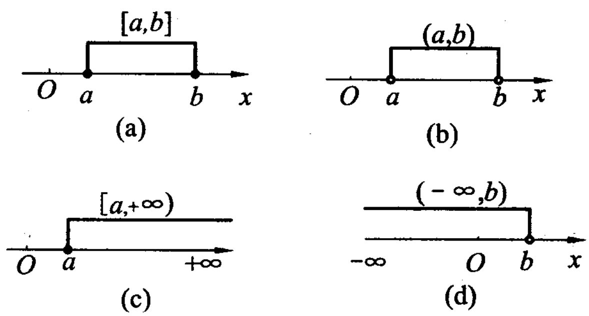



图 1.1

全体实数集合 **R** 也可记作 $(-\infty,+\infty)$，它也是无限区间.

*在不需要具体指明是哪一种区间时，就可以简单地称它为"区间"，常用 $I$ 表示.*

邻域是一个经常用到的概念. 以点 $a$ 为中心的任何开区间称为点 $a$ 的**邻域**，记作 $U(a)$.

设 $\delta$ 是任一正数，满足不等式 $|x-a|<\delta$ 的全体实数称为**点 $a$ 的 $\delta$ 邻域**，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta)=\{x \mid |x-a|<\delta\}=(a-\delta,a+\delta)$$

点 $a$ 称为邻域的中心，$\delta$ 称为邻域的半径．由绝对值的几何意义可知，$U(a,\delta)$表示点 $x$ 与点 $a$ 的距离小于$\delta$ 的一切点 $x$ 的全体(见图 1.2)．

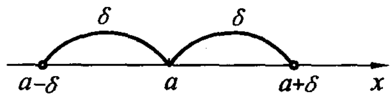



图　1.2

满足不等式 $0<|x-a|<\delta$ 的全体实数所构成的集合称为点 $a$ 的去心$\delta$邻域，记作 $U^{\circ}(a,\delta)$，即

$$U^{\circ}(a,\delta)=\{x\mid 0<|x-a|<\delta\}$$

这里，$0<|x-a|$表示 $x\neq a$，即 $a\notin U^{\circ}(a,\delta)$.

## 二、函数概念

在同一过程中所碰到的各种变量，通常并不都是孤立地变化，而是相互联系并遵循着一定的变化规律．例如，在自由落体运动中，下降的距离 $s$ 与时间 $t$ 的依赖关系是 $s=\frac{1}{2}gt^2$($g$ 为重力加速度)；又如，中学数学中讲到的一次函数 $y=x$，二次函数 $y=x^2$，三角函数 $y=\sin x$，等等，它们都给出了变量 $x$ 和变量 $y$ 的依赖关系．

在以上这些依赖关系中，可以看出一个共同的特征：当其中一个变量在其变化范围内任意取定一个数值时，另一个变量根据它们之间的依赖关系，就有一个确定的值与之对应．把这种特征抽象出来，就得到函数的概念．

**定义 1.1**　给定两个实数集 $D$ 和 $M$，若有一个对应法则 $f$，对于任意给定的 $x\in D$，都有唯一的一个数 $y\in M$ 与它相对应，则称 $f$ 是定义在数集 $D$ 上的**函数**．常简记为

$$y=f(x),\qquad x\in D$$

其中，$x$ 叫做自变量，$y$ 叫做因变量，$D$ 称为定义域，记作 $D_f$，即 $D=D_f$.

对于任意给定的 $x\in D$，按对应法则 $f$，有与之对应的 $M$ 中的数 $y$，称数 $y$ 为函数 $f$ 在点 $x$ 处的函数值，记作 $f(x)$．所有函数值的集合 $f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subseteq M$ 称为函数 $f$ 的值域，记作 $R_f$ 或 $f(D)$，即

$$R_f=f(D)=\{y\mid y=f(x),x\in D\}\subseteq M$$

需要指出的是，按照上述定义，记号 $f$ 与 $f(x)$ 的含义是有区别的：前者表示自变量 $x$ 和因变量 $y$ 之间的对应法则，而后者表示与自变量 $x$ 对应的函数

值．但为了叙述方便，习惯上常用记号“$f(x), x\in D$”或“$y=f(x), x\in D$”来表示定义在 $D$ 上的函数，这时应理解为由它所确定的函数 $f$.

表示函数的记号是可以任意选取的，除了常用的 $f$ 外，还可用其他的英文字母或希腊字母，如“$g$”，“$F$”，“$\varphi$”等．相应的，函数可记作 $y=g(x)$，$y=F(x)$，$y=\varphi(x)$等．有时还直接用因变量的记号来表示函数，即把函数记作 $y=y(x)$．但在研究同一问题，讨论到几个不同的函数时，为了表示区别，需要用不同的记号来表示它们．

根据函数的定义，定义域 $D_f$ 及对应法则 $f$ 为确定函数的两个主要因素．如果两个函数的定义域相同，而且对应法则也相同，则这两个函数就是相同的．否则就是不同的．例如，$y=\sqrt[3]{x^3}$与 $y=x$ 是同一函数，而 $y=\sqrt{x^2}$与 $y=x$ 是不同的函数．

函数的定义域通常按以下两种情况来确定：一种情况是根据实际问题是否有意义来确定．例如，在自由落体运动中，若设物体的下落时间为 $t$，下落距离为 $s$，从 $t=0$ 时刻开始下落，落地时刻为 $t=T$，则 $s$ 与 $t$ 之间的函数关系是

$$s=\frac{1}{2}gt^2, \qquad t\in[0,T]$$

这个函数的定义域就是区间$[0,T]$；另一种情况是对抽象算式表达的函数是否有意义来确定．通常约定这种函数的定义域是使得算式有意义的一切实数组成的集合，并称这种定义域为函数的**自然定义域**．在这种约定之下，一般的用算式表达的函数可用“$y=f(x)$”表达，而不必再写出 $D_f$．例如，函数 $y=\sqrt{x^2-4}$的定义域是$(-\infty,-2]\cup[2,+\infty)$等．

在函数的定义中，如果对每个 $x\in D$，在 $M$ 中与之对应的函数值 $y$ 总是唯一的，则称这种函数为**单值函数**．如果按某个给定的对应法则，对每个 $x\in D$，在 $M$ 中与之对应的 $y$ 值不唯一，则称这种法则确定了一个**多值函数**．例如，设变量 $x$ 与 $y$ 之间的对应法则由方程 $x-y^2=0$ 给出．显然，对每个 $x\in[0,+\infty)$，由方程 $x-y^2=0$ 可确定对应的 $y$ 值，当 $x=0$ 时，对应 $y=0$ 一个值，当 $x\in(0,+\infty)$时，与之对应的 $y$ 有两个值．所以这个方程确定了一个**多值函数**．但只要附加一些条件，就可以将多值函数化为单值函数，这样得到的单值函数称为多值函数的**单值分支**．例如，在由方程 $x-y^2=0$ 给出的对应法则中，附加“$y\geqslant 0$”的条件，即以“$x-y^2=0$ 且 $y\geqslant 0$”作为对应法则，就可得到一个单值分支 $y=y_1(x)=\sqrt{x}$；附加“$y\leqslant 0$”的条件，相应的，得到另一个单值分支 $y=y_2(x)=-\sqrt{x}$.

在高等数学中，讨论的函数通常都是单值函数．下面举几个函数的例子．

**例 1** 函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

称为绝对值函数，其定义域 $D=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=[0,+\infty)$，其图形如图 1.3 所示．

**例 2**　函数

$$f(x)=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

称为符号函数，它的定义域 $D=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\{-1,0,1\}$，其图形如图 1.4 所示．

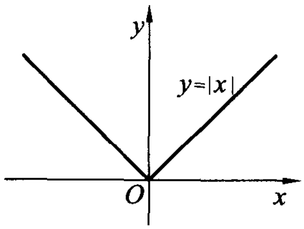



图　1.3

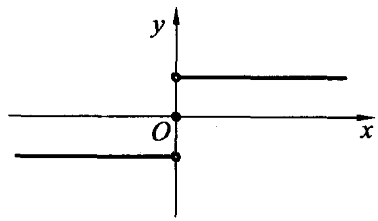



图　1.4

对于任何实数 $x$，下列关系均成立

$$x=\operatorname{sgn}x\cdot|x|$$

例如，$\operatorname{sgn}(-4)\cdot|-4|=-4$. 另外，函数 $f(x)=|x|$，还可写成 $f(x)=x\operatorname{sgn}x$.

**例 3**　设 $x$ 为任一实数，$y$ 是小于或等于 $x$ 的最大整数，记作 $y=[x]$. 例如，$[4]=4$，$\left[\frac{7}{2}\right]=3$，$\left[\frac{1}{3}\right]=0$，$[-2.4]=-3$. 容易看出，对任意一个实数 $x$，总有唯一的一个 $y=[x]$ 和这个 $x$ 对应．因此

$$y=[x]$$

是一个以 $x$ 为自变量的函数．我们称这个函数为取整函数．它的定义域 $D=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$，值域 $R_f=\mathbf{Z}$. 其图形如图 1.5 所示，这个图形称为阶梯曲线．在 $x$ 为整数值处，图形发生跳跃，跃度为 1.

从以上例子可以看到，有些函数在定义域的不同部分，对应法则不同，这种函数称为分段函数．分段函数是一个函数，切不可认为是两个或多个函数．分段函数在不同点处的函数值应由相应区间的式子确定．

**例 4**　函数

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1, & x\geqslant 0 \\ x, & x<0 \end{cases}$$

是一个分段函数．它的定义域 $D=\mathbf{R}=(-\infty,+\infty)$．当 $x\in[0,+\infty)$时，函数值为 $f(x)=x^2+1$；当 $x\in(-\infty,0)$时，函数值为 $f(x)=x$．例如，$1\in[0,+\infty)$，所以 $f(1)=1^2+1=2$；$-1\in(-\infty,0)$，所以 $f(-1)=-1$．它的图形如图 1.6 所示．

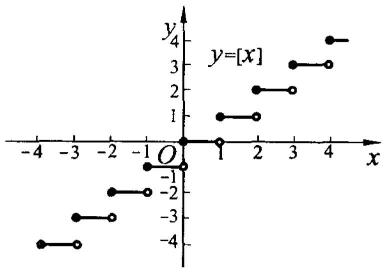



图 1.5

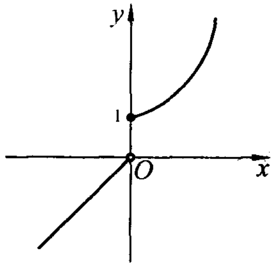



图 1.6

## 三、函数的几种特性

### 1. 函数的单调性

设函数 $f(x)$的定义域为 $D$，区间 $I\subseteq D$．如果对于区间 $I$ 上任意两点 $x_1$ 及 $x_2$，

(1) 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)<f(x_2)$ ($f(x_1)>f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**严格单调增(减)函数**；

(2) 当 $x_1<x_2$ 时，恒有 $f(x_1)\leqslant f(x_2)$ ($f(x_1)\geqslant f(x_2)$)，则称函数 $f(x)$在区间 $I$ 上是**单调增(减)函数**．

单调增函数(见图 1.7)与单调减函数(见图 1.8)统称为单调函数；严格单调增函数与严格单调减函数统称为严格单调函数，有时也简称为单调函数．

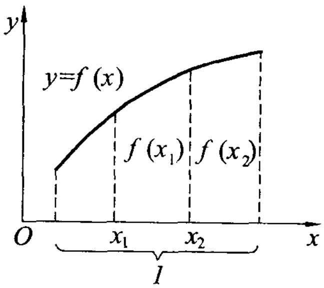



图 1.7

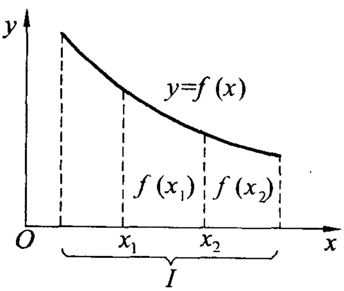



图 1.8

例如，函数 $f(x)=x^3$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是严格单调递增的(见图 1.9)，函数 $f(x)=x^2$ 在 $(-\infty,0)$ 上是严格单调递减的，在 $(0,+\infty)$ 上是严格单调递增的（见图 1.10），$f(x)=[x]$ 在区间 $(-\infty,+\infty)$ 上是单调递增的．

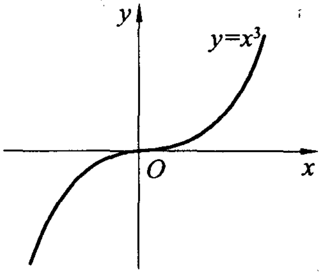



图　1.9

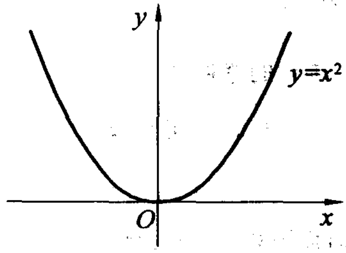



图　1.10

2. **函数的有界性**

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $M_1$，对于任意给定的 $x\in D$，恒有

$$f(x)\leqslant M_1$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有上界，而 $M_1$ 称为函数 $f(x)$ 在 $D$ 上的一个上界．那么对大于或等于 $M_1$ 的任意实数都是函数 $f(x)$ 的上界．这表明上界不是唯一的．因此，在讨论函数的有界性时，通常只关心"界"的存在，而不关心其大小．

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $M_2$，对于任意给定的 $x\in D$，恒有

$$f(x)\geqslant M_2$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有下界．而 $M_2$ 称为函数 $f(x)$ 在 $D$ 上的一个下界．下界也是不唯一的，如果一个函数有下界，则它有无穷多个下界．

设函数 $f(x)$ 的定义域为 $D$，如果存在正数 $M$，对于任意给定的 $x\in D$，恒有

$$|f(x)|\leqslant M$$

成立，则称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上有界．如果这样的 $M$ 不存在，就称函数 $f(x)$ 在 $D$ 上无界．这就是说，对于任何正数 $M$，总存在 $x_0\in D$，使

$$|f(x_0)|>M$$

例如，对于函数 $y=\cos x$．因为在 $\mathbf{R}$ 上，总有 $|\cos x|\leqslant 1$，所以，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $|f(x)|\leqslant 1$ 成立．因此，函数 $y=\cos x$ 在 $\mathbf{R}$ 上有界．这里取 $M=1$（当然也可取大于 1 的任何正数作为 $M$，使 $|f(x)|\leqslant M$ 成立）．

函数 $y=a^x$ $(a>0$ 且 $a\neq 1)$，对于任意 $x\in\mathbf{R}$，恒有 $|f(x)|>0$ 成立，所以在 $\mathbf{R}$ 上有一个下界 0，但没有上界．