高等学校教材

线性代数

涂道兴　张光裕　编著

高等教育出版社

高等学校教材

线性代数

涂道兴　张光裕　编著

高等教育出版社

图书在版编目(CIP)数据

线性代数/涂道兴,张光裕编著.—北京:高等教育出版社,2008.5

ISBN 978-7-04-023901-0

Ⅰ.线… Ⅱ.①涂…②张… Ⅲ.线性代数-高等数学-教材 Ⅳ.O151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 036103 号

策划编辑 王 强 **责任编辑** 文小西 **封面设计** 于文燕 **责任绘图** 吴文信
版式设计 史新薇 **责任校对** 王 雨 **责任印制** 毛斯璐

出版发行	高等教育出版社	**购书热线**	010-58581118
社　　址	北京市西城区德外大街4号	**免费咨询**	800-810-0598
邮政编码	100120	**网　　址**	http://www.hep.edu.cn
总　　机	010-58581000		http://www.hep.com.cn
		网上订购	http://www.landraco.com
经　　销	蓝色畅想图书发行有限公司		http://www.landraco.com.cn
印　　刷	国防工业出版社印刷厂	**畅想教育**	http://www.widedu.com
开　　本	787×960　1/16	**版　　次**	2008年5月第1版
印　　张	13	**印　　次**	2008年5月第1次印刷
字　　数	230 000	**定　　价**	16.70元

本书如有缺页、倒页、脱页等质量问题,请到所购图书销售部门联系调换。

物料号　23901-00

内容简介

本书是根据工科类本科线性代数课程教学基本要求编写的教材，是四川省教改项目“大众化背景下的大学数学系列课程的改革与实践”的研究成果。全书采用读者易于接受的方式，科学而系统地介绍了矩阵和行列式、向量、线性方程组、方阵对角化和二次型，以及MATLAB软件及其应用等内容。

本书的主要特点是用英语注明了概念，加强基础，淡化运算技巧；突出矩阵运算及其理论，应用矩阵方法处理向量、线性方程组、方阵对角化和二次型等内容；精选例题和习题，并把习题分为 A 组和 B 组，其中 A 组是基本题，B 组是综合提高题，书后附有习题参考答案；加强数学背景知识、应用实例和数学软件及其应用的介绍，强调数学的思想和方法，将数学文化、数学建模的方法有机地融入教材；以较为近代的数学思想统一处理教材，教材内容简明直观，富有启发性，安排由浅入深，由具体到抽象，理论严谨，叙述明确简练，逻辑清晰，便于教学与自学。

本书可作为高等院校工科各专业的教材，也可供教师、考研人员和其他工程技术人员参考。

前　言

线性代数课程是高等院校工科本科各专业必修的一门重要基础课，它是从解线性方程组和讨论二次方程的图形等问题发展起来的一门数学学科。线性代数介绍代数学中线性关系的经典理论，它的基本概念、理论和方法具有较强的逻辑性、抽象性。因为线性问题广泛存在于科学技术的各个领域，而某些非线性问题在一定条件下可以转化为线性问题，所以本课程所介绍的理论和方法具有广泛的实用性。尤其在计算机日益普及的今天，本课程的地位与作用更显得重要。本课程主要讲授矩阵与行列式、向量、线性方程组、方阵相似对角化和二次型，以及 MATLAB 软件及其应用等内容。通过教学，使学生掌握本课程的基本理论与基本方法，培养学生较强的运算能力、抽象思维能力和逻辑推理能力，培养学生运用所学知识去分析问题、建立数学模型以及利用计算机解决实际问题的能力和意识，为学生学习后继数学课程、专业课程和将来从事科学研究工作打下一定的理论基础，提供一种重要的数学工具，并积累一定的运用计算机解决实际问题的实践经验。

近年来，我们进行了以课程体系与教学内容的改革和教材建设为中心的大学数学系列课程建设，对"大众化背景下的大学数学系列课程的改革与实践"等省级教学改革项目进行了认真研究，取得了一系列成果，本教材就是该项目的研究成果。

根据教育部颁布的高等学校工科类本科线性代数课程教学基本要求，面对大众教育和素质教育的新形势，兼顾现代教育思想，依托多项省级教学改革项目的研究成果，结合编者长期从事本科高等代数与线性代数课程的教学实践经验，并在认真研究和吸收借鉴国内外同类优秀教材的基础上，我们对线性代数的知识结构进行了认真研究，对传统的教学内容进行了较有成效的优化更新，精编了《线性代数》讲义，该讲义已在两个年级中试用，在此基础上反复锤炼，编著了本教材。其主要特色有：

(1) 兼顾多种因素构建了教材的知识结构。

本教材共分为矩阵和行列式、向量、线性方程组、方阵对角化和二次型以及 MATLAB 软件及其应用五章。为了避免内容重复，首先介绍矩阵的运算及其理论，强调矩阵的初等变换及其矩阵的秩的作用，其次以矩阵为工具研究向量，以矩阵和向量为工具研究线性方程组，然后综合运用矩阵、向量以及线性方程组的理论和方法讨论方阵对角化和二次型，最后专门编写了一章介绍 MATLAB 软件

及其在线性代数中的应用。全书突出了矩阵方法简捷的优点，便于教学与自学。

(2) 对传统教学内容进行了卓有成效的改革和优化整合。

以教学大纲为标准，在基本保持传统的教学内容和注重教学内容的系统性和科学性的同时，充分考虑了知识传授与数学素质和数学能力尤其是创新能力培养的关系，解决了教学内容的取舍和更新、理论教学与实践教学的关系等问题。例如，简化了行列式的性质、向量组的线性相关性的判定方法以及线性方程组解的判定定理的推导过程等内容，加强了分块矩阵的计算及其应用，拓宽了矩阵的秩、矩阵的特征值与特征向量的性质等重要内容，精选了一些新颖的、能反映现代教育思想、教育发展和教学改革新形势的教学内容充实教材，特别是为适应信息时代的需要，加强了与教学内容紧密结合的上机内容。内容安排由浅入深，由具体到抽象，循序渐进，符合认知规律。针对线性代数概念多、结论多以及内容比较抽象、逻辑性强等特点，注重理论联系实际，运用简朴的语言描述问题，以通俗简单的实例引入概念，突出数学背景知识，使抽象的概念具体化，做到抽象与具体相结合。针对线性代数解题方法“灵活多变，难以捉摸”的特点，淡化运算技巧，重点介绍和归纳解题的基本方法。

(3) 精选了适当的例题和习题。

本书给出了较为丰富的例题和习题，每一个例题和习题都具有一定的代表性和启发性。每个例题都详细指出了解题依据，便于自学。习题分为 A 组和 B 组，A 组是基本题，B 组是综合提高题，具有理科特色，以适应工科数学要“理化”的需要，以突出层次性。全书内容及 A 组习题符合工科本科线性代数教学基本要求，适用于课堂教学为 40 学时的工科本科专业和专科专业。全书内容、A 组习题和 B 组习题适用于课堂教学为 48 学时而对线性代数有更高要求的工科本科专业。习题附有答案，便于学生练习检验。

(4) 体现现代教育思想，发挥数学软件的作用。

本书的主要特点是用英语注明了教材中重要的数学概念。介绍了 MATLAB 数学软件及其应用，充分发挥数学软件的作用。

(5) 将数学文化有机地融入教学内容之中。

数学是严谨的科学，数学教学不但要教给学生数学知识，培养学生应用数学知识解决实际问题的能力，还要提高他们的数学修养，养成良好的思维品格。本教材有机地融入并体现了创新精神、理性思考、逻辑思维方式等数学文化，以及融会数学发展史、数学方法论和数学应用的数学素质、科学精神，体现了数学不仅是自然科学、工程技术乃至社会科学最基本的工具之一，也是现代文明的不可或缺的组成部分，更是一种不可缺少的思维方式和文化精神，丰富了本书的趣味性和可读性。

我们编写本书的基本想法是给予使用本教材的教师留下更多处理该教材的

空间，例如特征值与特征向量的性质定理、实对称矩阵可正交相似对角化定理等可以不予证明，任课老师可以根据不同的专业对象和不同的学时数灵活处理有关内容。

本书是教改课题组和教研室全体教师集体智慧的结晶，其中第一章、第二章、第三章和第四章由涂道兴副教授编写，第五章由张光裕副教授编写，书后各章的习题及答案也由编写相应各章的编者给出，全书由涂道兴副教授统稿。

在本书的编写过程中，我们得到了西南石油大学李小明教授和谢祥俊教授的悉心指导，他们对本书进行了深入细致的审查，并提出了许多宝贵的修改意见和建议，并逐一指出了不完善之处。我们还得到了高等教育出版社数学分社的关心和支持。我们在此对他们表示最热诚的谢意。同时，我们也对西南石油大学理学院领导的大力支持和帮助表示衷心的感谢。

限于编者的水平与学识，疏漏与错误难免，欢迎广大读者批评指正。

编　者

2008 年 4 月

郑重声明

高等教育出版社依法对本书享有专有出版权。任何未经许可的复制、销售行为均违反《中华人民共和国著作权法》。其行为人将承担相应的民事责任和行政责任，构成犯罪的，将被依法追究刑事责任。为了维护市场秩序，保护读者的合法权益，避免读者误用盗版书造成不良后果，我社将配合行政执法部门和司法机关对违法犯罪的单位和个人给予严厉打击。社会各界人士如发现上述侵权行为，希望及时举报，本社将奖励举报有功人员。

反盗版举报电话：(010) 58581897/58581896/58581879

传　　真：(010) 82086060

E - mail：dd@ hep. com. cn

通信地址：北京市西城区德外大街 4 号
高等教育出版社打击盗版办公室

邮　　编：100120

购书请拨打电话：(010)58581118

目　录

第一章　矩阵和行列式

矩阵是在1850年由英国数学家、剑桥大学教授西尔维斯特(J. Sylvester, 1814—1897)首先提出来的,它作为表示一个线性方程组的简单记号而出现. 矩阵理论的起源可追溯到18世纪,见诸正式的文字则是在19世纪. 1801年,德国数学家高斯(Gauss,1777—1855)把一个线性替换的全部系数作为一个整体,并用一个字母来表示,还强调了乘法次序的重要性,这些工作孕育了矩阵的思想. 在我国,矩阵最早出现在《九章算术》中,在该书方程一章中,就将线性方程组的系数、常数项按顺序排列成一个长方形的数表,利用它来解线性方程组.

1855年以后,英国数学家凯莱(A. Caylay,1821—1895)对矩阵进行了专门研究,他引进了零矩阵、矩阵的和与积等概念,建立了矩阵的运算法则,讨论了特征方程与特征值,研究了包括矩阵的逆矩阵在内的代数问题,发表了一系列关于矩阵理论的学术文章,得到了一些重要结果. 例如,凯莱于1858年证明了任何方阵都满足它的特征方程,这就是著名的哈密顿-凯莱(Hamilton-Caylay)定理. 凯莱为矩阵理论作出了奠基性的工作,一般认为他是矩阵理论的创始人.

行列式是线性代数中的一个基本概念,它起源于17世纪,是基于解线性方程组的需要而提出来的. 1683年,日本数学家关孝和完成了著作《解伏题之法》,标题的意思是"解行列式问题的方法",该书对行列式的概念和它的展开已经有了清楚的叙述. 德国数学家莱布尼茨(G. W. Leibniz,1646—1716)是欧洲第一个提出行列式概念的人,并且提出了行列式的一些理论. 1841年,凯莱最先引入两条竖线作为行列式的记号. 德国数学家雅可比(C. G. J. Jacobi,1804—1851)最先讨论了函数行列式,并于1841年给出了函数行列式的求导公式,他总结并提出了行列式的系统理论,并将行列式应用到多重积分中,得出一些结果. 法国最伟大的数学家柯西(Cauchy,1789—1857)把行列式中的元排成矩形数表,并首次采用了双重足标的新记法,给出了两个行列式相乘的公式,改进和证明了拉普拉斯定理,他的工作极大地发展了行列式的理论.

本章首先介绍矩阵的概念、矩阵的运算、分块矩阵和初等变换,其次介绍行列式的定义、性质及其计算方法,然后介绍矩阵的秩及其理论,最后介绍在矩阵运算中起着重要作用的可逆矩阵.

§1 矩阵及其运算

矩阵是线性代数中一个最基本的概念，它是线性代数的核心，而矩阵的运算是线性代数的基本内容和矩阵理论的基础. 矩阵是进行理论研究的重要工具，它推动了线性代数以及其它数学分支的发展. 在自然科学、工程技术和经济管理科学等领域中，大量涉及多个方面相互关联的多元数量关系问题，这些问题往往可用矩阵来进行整体描述和刻画，而且对它们的研究常常反映为对矩阵的研究，甚至有些性质完全不同、表面上完全没有联系的问题，归结成矩阵问题以后却是相同的，这说明矩阵也是解决实际问题的重要工具. 随着计算机的广泛应用，矩阵方法及其理论已经成为现代科技人员必须具备的数学基础，而以矩阵为工具去描述事物间的相互联系和刻画所面对的问题，并利用矩阵方法和理论去解决实际问题，这是现代科技人员必须具备的数学素质和数学能力.

本节首先介绍矩阵的概念，然后介绍矩阵的运算.

一、矩阵的概念

讨论问题必须明确其对象的范围，对于数学问题就要先给定一个数集(number set). 我们已经熟悉的数集有：自然数集(即非负整数集)**N**、整数集**Z**、有理数集**Q**、实数集**R**和复数集**C**. 线性代数中的许多问题与考虑的数集有关，同一个问题在不同的数集内可能有不同的结论. 例如，对于方程 $3x=2$ 来说，它在整数集内是无解的，而它在有理数集内是有解的. 这是因为两个整数相除(除数不能为零)所得的商不一定是整数，而任何两个有理数相除(除数不为零)所得的商仍然是有理数. 这时，我们称整数集合对于除法运算是不封闭的，而有理数集合对于除法运算是封闭(closed)的.

数的加法、减法、乘法和除法四种运算统称**有理运算**(rational operation). 对于一个给定的数集，我们关心的是这个数集中的两个数对于某种运算的运算结果是否仍然在这个数集中，即这个数集对这个运算是否封闭. 不仅如此，我们更加关心一个数集对有理运算是否封闭，其原因之一是线性方程组是线性代数课程的基本内容，在解线性方程组时，需要对方程组的系数和常数项进行有理运算，这就要求所取的数集对有理运算封闭. 在我们熟悉的数集中，自然数集**N**和整数集**Z**对于除法运算都是不封闭的，而有理数集**Q**、实数集**R**和复数集**C**对有理运算都封闭. 我们把有理数集**Q**、实数集**R**和复数集**C**对有理运算都封闭这个共同属性抽象出来，就得到数域的概念.

定义1 设 F 是由一些数组成的一个集合，其中包含0与1. 如果 F 中任意两个数(这两个数也可以相同)的和、差、积、商(除数不能为零)仍然是 F 中的

数,那么称 F 为一个**数域**(number field).

例如,全体有理数组成的集合 $\mathbf{Q}$、全体实数组成的集合 $\mathbf{R}$ 和全体复数组成的集合 $\mathbf{C}$ 都是数域,分别称为**有理数域**、**实数域**和**复数域**. 而数集

$$F_1=\{a+bi\mid a,b\in\mathbf{Q}\},\quad F_2=\{a+b\sqrt{2}\mid a,b\in\mathbf{Q}\}$$

也都是数域.

根据数域的定义,如果 F 是数域,那么 $\mathbf{Q}\subseteq F$,即有理数域是最小的数域.

在本书中,用 $\mathbf{Q}$、$\mathbf{R}$ 和 $\mathbf{C}$ 分别表示有理数域、实数域和复数域,而用 F 表示任意数域.

下面在给出矩阵的定义之前,我们先介绍矩阵的实际背景.

我们常用数表表示一些数据及其关系,如学生成绩表、职工工资表、产品产量表和物资调运表等. 为了表达简洁清晰,我们可以将各种数表中主要关心的对象——数据按照原来的次序排列成一个矩形数表,并加上方括号或圆括号表示这些数据是一个整体,而矩形数表中每个位置上的数都有固定的含义,不能随意调换.

例如,如果 4 名学生王志强、刘林军、张平和李媛媛的 3 门课程高等数学、大学英语和大学物理的期末考试成绩由表 1-1 给出.

那么我们可以将这个期末考试成绩表

表 1-1　期末考试成绩表

	高等数学	大学英语	大学物理
王志强	91	78	86
刘林军	75	93	82
张平	67	80	56
李媛媛	92	83	87

简化成一个 4 行 3 列的矩形数表

$$\begin{bmatrix}91&78&86\\75&93&82\\67&80&56\\92&83&87\end{bmatrix},$$

其中第二行中的第三个数 82 表示刘林军同学的大学物理的期末考试成绩为 82 分,其余各行列的数值也有相应的意义.

如果三个炼油厂利用一吨原油生产的燃料油、柴油和汽油数量由表 1-2 给出(单位: t),那么我们可以将这个产品产量表

表 1-2　产品产量表

	第一炼油厂	第二炼油厂	第三炼油厂
燃料油	0.52	0.48	0.55
柴油	0.25	0.28	0.19
汽油	0.22	0.23	0.25

简化成一个 3 行 3 列的矩形数表:

$$\begin{bmatrix} 0.52 & 0.48 & 0.55 \\ 0.25 & 0.28 & 0.19 \\ 0.22 & 0.23 & 0.25 \end{bmatrix}$$

其中第一行中的数值表示各个炼油厂利用一吨原油生产的燃料油数量,不同的数值反映了各个炼油厂在生产工艺和技术水平上的差异,而第一列的数值表示第一炼油厂利用一吨原油生产的产品数量,其余各行列的数值也有类似意义.

尽管上述期末考试成绩表、产品产量表的实际意义不同,但是它们有一个共同特点,这就是都可以用一个矩形数表来刻画. 由此抽象,我们得到

定义 2　由数域 F 中的 $m\times n$ 个数 $a_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$ 排成的 m 行(横的)、n 列(纵的)的矩形数表

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

称为 F 上的 **m 行 n 列矩阵**或 **$m\times n$ 矩阵**,简称为**矩阵**(matrix),记为 $(a_{ij})_{m\times n}$,其中的 $m\times n$ 个数称为矩阵的**元**(element),a_{ij} 表示位于这个矩阵的第 i 行(row)、第 j 列(column)处的元,i 称为元 a_{ij} 的**行指标**(row index),j 称为 a_{ij} 的**列指标**(column index).

矩阵是一个矩形数表,加上方括号或圆括号表示这些数是一个整体. 通常用大写的拉丁黑体字母 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C},\cdots$ 表示矩阵. 有时为了强调矩阵的行数和列数,通常又将 m 行 n 列矩阵 $\boldsymbol{A}$ 记为 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$.

为了方便,我们把数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵的全体记为 $F^{m\times n}$,即

$$F^{m\times n}=\{\boldsymbol{A}\mid\boldsymbol{A}\text{ 是数域 }F\text{ 上的 }m\times n\text{ 矩阵}\}.$$

实数域和复数域上的矩阵分别简称为**实矩阵**(real matrix)和**复矩阵**(complex matrix). 本书中,如果没有特别说明,那么涉及的矩阵都是任意数域 F 上的矩阵,且用 $\boldsymbol{A}\in F^{m\times n}$ 表示 $\boldsymbol{A}$ 是数域 F 上的 $m\times n$ 矩阵.

下面介绍几种常见的特殊矩阵.

元全为零的矩阵称为**零矩阵**(zero matrix),记为 $\boldsymbol{O}$.

只有一列的矩阵称为**列矩阵**(column matrix),只有一行的矩阵称为**行矩阵**(row matrix). 在书写行矩阵时,为了避免元与元之间相互混淆,通常将以 a_1, a_2, …, a_n 为元的行矩阵记为 $[a_1, a_2, \cdots, a_n]$.

行数与列数相等的矩阵称为**方阵**(square matrix), $n \times n$ 矩阵也称为 ***n* 阶矩阵**或 ***n* 阶方阵**. 规定一阶矩阵是一个数,即 $(a)_{1\times 1} = a$.

从一个方阵的左上角至右下角的斜线称为该方阵的**主对角线**(principal diagonal),即联结元素 $a_{11}, a_{22}, \cdots, a_{nn}$ 的线就是方阵 $(a_{ij})_{n\times n}$ 的主对角线. 主对角线以外的元全为零的方阵称为**对角矩阵**(diagonal matrix). 主对角线上的元分别为 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的 n 阶方阵,记为 $\operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n)$,即

$$\operatorname{diag}(a_1, a_2, \cdots, a_n) = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix}.$$

主对角线上元相同的对角矩阵称为**数量矩阵**(scalar matrix). 主对角线上的元全为 1 的对角矩阵称为**单位矩阵**(unit matrix),记为 $\boldsymbol{E}$ 或 $\boldsymbol{I}$. n 阶单位矩阵记为 $\boldsymbol{E}_n$ 或 $\boldsymbol{I}_n$,即

$$\boldsymbol{E}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}.$$

如果矩阵 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = 0\ (i > j)$,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix},$$

那么称 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为**上三角形矩阵**(upper triangular matrix).

如果 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 满足 $a_{ij} = 0\ (i < j)$,即

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

那么称 $\boldsymbol{A} = (a_{ij})_{n\times n}$ 为**下三角形矩阵**(lower triangular matrix).

二、矩阵的运算

矩阵的运算是基于实际问题的需要引进的,它体现了矩阵之间的一些最基

本的关系. 下面介绍矩阵的加法、减法、数乘、乘法和转置等基本运算及其满足的运算规律.

1. 矩阵的线性运算

定义 3 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{s\times k}$ 都是数域 F 上的矩阵,如果 $s=m,k=n$,并且 $a_{ij}=b_{ij}(i=1,2,\cdots,m;j=1,2,\cdots,n)$,那么称 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ **相等**,记为 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{B}$.

定义 4 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是数域 F 上的矩阵,则称矩阵 $(-a_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 的**负矩阵**(negative matrix),记为 $-\boldsymbol{A}$. 即 $-\boldsymbol{A}=(-a_{ij})_{m\times n}$.

定义 5 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是数域 F 上的矩阵,则称矩阵 $(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的**和**,记为 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=(a_{ij}+b_{ij})_{m\times n}$.

由此可见,两个矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 能够相加的条件是它们的行数和列数分别相等,而且 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 之和 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 是一个矩阵,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的第 i 行、第 j 列的元就是 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的第 i 行、第 j 列的元之和,$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}$ 的行数和列数分别等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数和列数.

一般的,对于矩阵的一种运算一定要注意三点:运算的条件、运算的法则和运算的结果.

定义 6 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 和 $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{m\times n}$ 都是数域 F 上的矩阵,则称矩阵 $(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$ 为 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差,记为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$,即 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=(a_{ij}-b_{ij})_{m\times n}$.

利用负矩阵也可以将矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与 $\boldsymbol{B}$ 的差定义为 $\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}=\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{B})$.

定义 7 设 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times n}$ 是数域 F 上的矩阵,$k\in F$,则称矩阵 $(ka_{ij})_{m\times n}$ 为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与数 k 的**数量乘积**,记为 $k\boldsymbol{A}$ 或 $\boldsymbol{A}k$,即 $k\boldsymbol{A}=(ka_{ij})_{m\times n}$.

例如,数量矩阵 $\operatorname{diag}(a,a,\cdots,a)=a\boldsymbol{E}_n$.

矩阵的加法、减法、数乘统称为矩阵的**线性运算**(linear operation),它是矩阵运算的基础. 显然,数域 F 上的矩阵经过线性运算后,仍然是数域 F 上的矩阵.

例如,根据表 1 - 1 的数据和平时成绩记录,矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}91&78&86\\75&93&82\\67&80&56\\92&83&87\end{bmatrix},\quad \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}86&75&83\\78&90&78\\60&78&58\\88&85&82\end{bmatrix}$$

分别表示学生王志强、刘林军、张平和李媛媛的三门课程高等数学、大学英语和大学物理的期末考试成绩和平时成绩. 若课程的期末总成绩是期末考试成绩的 80% 与平时成绩的 20% 之和,那么该 4 名学生的期末总成绩可以由矩阵

$$\boldsymbol{C}=\frac{4}{5}\boldsymbol{A}+\frac{1}{5}\boldsymbol{B}=\frac{4}{5}\begin{bmatrix}91&78&86\\75&93&82\\67&80&56\\92&83&87\end{bmatrix}+\frac{1}{5}\begin{bmatrix}86&75&83\\78&90&78\\60&78&58\\88&85&82\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}90&77.4&85.4\\75.6&92.4&81.2\\65.6&79.6&56.4\\91.2&83.4&86\end{bmatrix}$$

给出，其中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的第二行第三列的数值 81.2 表示刘林军的大学物理课程期末总成绩是 81.2 分，其余各行列的数值也有类似意义.

由此可见，利用矩阵表示数表不仅简洁明晰，而且便于运算.

例 1 已知 $2\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & d \\ a-7 & -1 \end{bmatrix}$，求 a,b,c 和 d.

解 根据矩阵的线性运算的定义，得

$$2\begin{bmatrix} a & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} - 3\begin{bmatrix} 1 & -b \\ b & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2a-3 & 2+3b \\ -3b & -4-3c \end{bmatrix}.$$

根据矩阵相等的定义，得

$$\begin{cases} 2a-3=-1, \\ 2+3b=d, \\ -3b=a-7, \\ -4-3c=-1. \end{cases}$$

解得，$a=1,b=2,c=-1,d=8$.

根据矩阵的线性运算的定义、数的运算规律和矩阵相等的定义，容易验证矩阵的线性运算满足下列八条运算规律：

(1) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$；

(2) $(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}+(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{C})$；

(3) $\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})=\boldsymbol{O}$；

(4) $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{A}$；

(5) $1\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}$；

(6) $k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$；

(7) $(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A}$；

(8) $k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$.

其中 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}\in F^{m\times n}$，$k,l\in F$.

可见，零矩阵在矩阵加法中的作用类似于数 0 在数的加法中的作用.

矩阵的线性运算除满足上述八条运算规律外，还满足以下四条运算规律，这四条运算规律也可以根据矩阵的线性运算的定义、数的运算规律和矩阵相等的定义予以证明. 下面我们利用上面八条运算规律来证明，以便加深对上述八条运算规律的理解和运用.

(9) 如果 $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{O}$，那么 $\boldsymbol{B}=-\boldsymbol{A}$.

事实上，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{B} &= \boldsymbol{B}+\boldsymbol{O}=\boldsymbol{B}+[\boldsymbol{A}+(-\boldsymbol{A})]=(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A})+(-\boldsymbol{A}) \\ &= (\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})+(-\boldsymbol{A}) = -\boldsymbol{A}. \end{aligned}$$

(10) $(-k)\boldsymbol{A}=k(-\boldsymbol{A})=-(k\boldsymbol{A})$，特别 $(-1)\boldsymbol{A}=-\boldsymbol{A}$.

事实上，

$$kA+(-k)A=[k+(-k)]A=0A=O,$$
$$kA+k(-A)=k[A+(-A)]=kO=O.$$

(11) $k(A-B)=kA-kB$, $(k-l)A=kA-lA$.

事实上，

$k(A-B)=k[A+(-B)]=kA+k(-B)=kA+[-(kB)]=kA-kB$,

$(k-l)A=[k+(-l)]A=kA+(-l)A=kA+[-(lA)]=kA-lA$.

(12) 如果 $kA=O$,那么 $k=0$ 或者 $A=O$.

事实上,如果 $k\neq0$,那么 $A=1A=(k^{-1}\cdot k)A=k^{-1}(kA)=k^{-1}O=O$.

含有未知矩阵的等式称为**矩阵方程**(matrix equation).

显然,矩阵方程 $A+X=B$ 有唯一解 $X=B-A$.

例 2 解矩阵方程 $3(A+X)=2(B-X)$,其中

$$A=\begin{bmatrix}-2&5&-2\\-1&1&2\end{bmatrix},\ B=\begin{bmatrix}-3&15&2\\1&-1&-2\end{bmatrix}.$$

解 在等式 $3(A+X)=2(B-X)$ 的两边同时加上矩阵 $-3A$ 和 $2X$,得

$$X=\frac{1}{5}(2B-3A)=\frac{2}{5}\begin{bmatrix}-3&15&2\\1&-1&-2\end{bmatrix}-\frac{3}{5}\begin{bmatrix}-2&5&-2\\-1&1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&3&2\\1&-1&-2\end{bmatrix}.$$

2. 矩阵的乘法

根据表 1-2,矩阵

$$A=(a_{ij})_{3\times3}=\begin{bmatrix}0.52&0.48&0.55\\0.25&0.28&0.19\\0.22&0.23&0.25\end{bmatrix}$$

给出了三个炼油厂利用一吨原油生产的燃料油、柴油和汽油数量. 如果分别向三个炼油厂提供 1 000 t、2 000 t 和 3 000 t 原油作为炼油的主要原料,并用矩阵

$$B=(b_{ij})_{3\times1}=\begin{bmatrix}1\,000\\2\,000\\3\,000\end{bmatrix}$$

表示,那么这三个炼油厂生产的燃料油、柴油和汽油三种油类的总量可以用矩阵

$$C=\begin{bmatrix}a_{11}b_{11}+a_{12}b_{21}+a_{13}b_{31}\\a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21}+a_{23}b_{31}\\a_{31}b_{11}+a_{32}b_{21}+a_{33}b_{31}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0.52\times1\,000+0.48\times2\,000+0.55\times3\,000\\0.25\times1\,000+0.28\times2\,000+0.19\times3\,000\\0.22\times1\,000+0.23\times2\,000+0.25\times3\,000\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3\,130\\1\,380\\1\,430\end{bmatrix}$$

表示,即三个炼油厂共生产燃料油 3 130 t、柴油 1 380 t 和汽油 1 430 t.

不难看出,矩阵 C 的第 $k(k=1,2,3)$ 行的元正好是矩阵 A 的第 k 行与矩阵 B 的对应元之积的和. 在线性代数中,我们称矩阵 C 为矩阵 A 与 B 的乘积,并记为