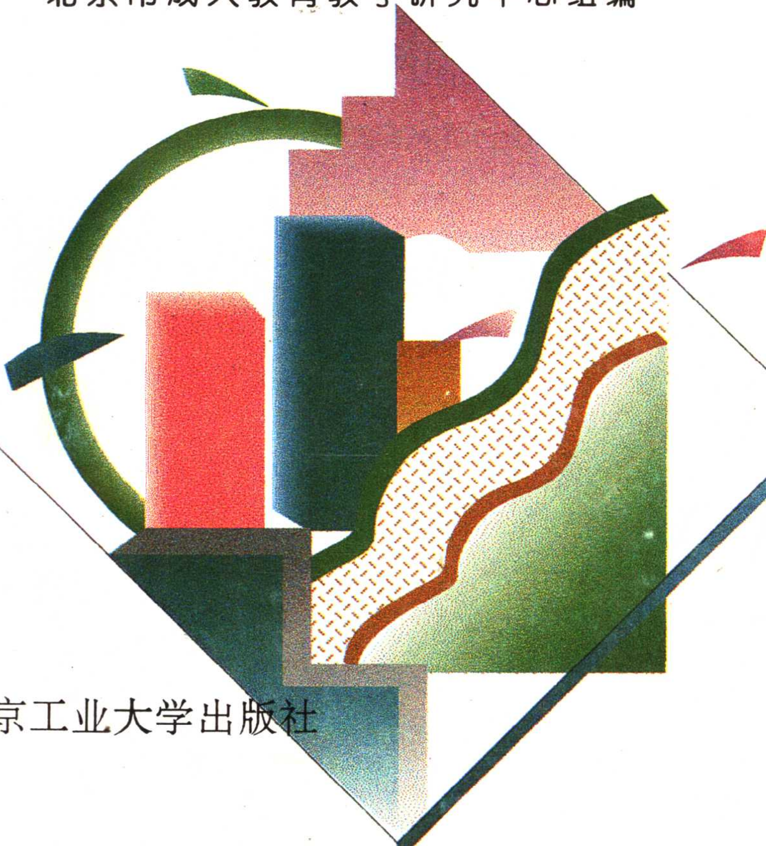
成人中等专业学校课本

数 学

下 册

（财经、管理类）

北京市成人教育教学研究中心组编



北京工业大学出版社

北京市成人中等专业学校教材

数学

（财经、管理类）

北京市成人教育教学研究中心组编

北京工业大学出版社

（京）登 95 第 212 号

数　学（下册）

（财经、管理类）

北京市成人教育教学研究中心组编

*

北京工业大学出版社出版发行

各地新华书店经销

世界知识印刷厂印刷

*

1996 年 8 月第 1 版　1997年 8 月第 2 次印刷

787×1092 毫米 32 开本　7.5 印张　168 千字

印数：18001～37000 册

ISBN 7-5639-0513-8/G·262

定价：7.80 元

目　录

第五章　矩阵初步

矩阵是线性代数的主要内容之一，也是研究和解决实际问题的主要数学工具．本章将介绍矩阵的概念、运算、初等变换．

一、矩阵的概念

在日常生活和生产中，我们常见到用列表的方法表示一些数据及其关系，例如：

某衬衫厂 1995 年第一、二、三季度生产甲、乙、丙、丁四种衬衫情况如下表所示．

单位：万件

季度 \ 数量 \ 产品	甲	乙	丙	丁
一	1	2	3	1
二	0	3	4	1
三	4	0	2	2

为了研究方便，在数学中常把表中数据按原来位置、次序排成一个矩形的数表，并用一个括号括起来，如：

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 1 \\ 4 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix},$$

这种数表就叫做**矩阵**.

由 $m\times n$ 个数 a_{ij}（$i=1, 2, \cdots, m$; $j=1, 2, \cdots, n$）排成 m 行 n 列的矩形数表，称为 $\boldsymbol{m\times n}$ **矩阵**，记为

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

其中 a_{ij} 称为矩阵第 i 行第 j 列的元素.

矩阵通常用大写字母 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$、$\boldsymbol{C}$…等表示，也可以用 $\boldsymbol{A}_{m\times n}$ 表示 m 行 n 列矩阵，或记作 $(a_{ij})_{m\times n}$.

如矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 \\ 3 & 0 & 7 & -1 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ 是 3×4 矩阵，就是 3 行 4 列矩阵. 而 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 4 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$ 是 3×2 矩阵，就是 3 行 2 列矩阵.

当 $m=1$ 时，$\boldsymbol{A}_{1\times n}=[a_{11} \quad a_{12} \quad \cdots \quad a_{1n}]$ 称为**行矩阵**.

当 $n=1$ 时，$\boldsymbol{A}_{m\times 1}=\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix}$ 称为**列矩阵**.

当矩阵的行数和列数相等，即 $m=n$ 时，称该矩阵为 $\boldsymbol{n}$ **阶矩阵**，或 $\boldsymbol{n}$ **阶方阵**. 即

$$A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

在 n 阶方阵 A 中，a_{11}、a_{22}，…，a_{nn}叫做**主对角线上的元素**. 例如：

$$B=\begin{bmatrix}1 & 0 & 3\\ -1 & 2 & 0\\ 4 & 7 & 5\end{bmatrix}$$

是三阶方阵. 1，2，5 为主对角线上的元素.

全部元素都为零的矩阵，称为**零矩阵**，记作 $\mathbf{0}_{m\times n}$或 $\mathbf{0}$.

主对角线上的元素都为 1，其余元素都为零的矩阵，称为**单位矩阵**，记作 E_n 或 E. 即

$$E=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1\end{bmatrix}.$$

如果两个矩阵 A 和 B 的行数相同，列数也相同，且对应元素都相等，则称**矩阵 A 与矩阵 B 相等**，记为 $A=B$. 即 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，当 $a_{ij}=b_{ij}$ $(i=1,2,\cdots,m,\ j=1,2,\cdots,n)$ 时，$A=B$. 例如：$A=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ -2 & 1 & -1\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}a & b & c\\ e & f & d\end{bmatrix}$，当 $a=1$，$b=2$，$c=0$，$e=-2$，$f=1$，$d=-1$ 时，有 $A=B$.

n 元线性方程组*

---

* 线性方程组指一次方程组，含有 n 个未知数的线性方程组称为 n 元线性方程组.

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m, \end{cases} \tag{1}$$

的系数可以表示为一个 $m \times n$ 矩阵

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

我们称 $\boldsymbol{A}$ **为线性方程组（1）的系数矩阵.**

把线性方程组(1)的系数与常数项写在一起，可以表示一个 $m \times (n+1)$ 矩阵 $\overline{A}$，

$$\overline{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix},$$

我们称 $\overline{\boldsymbol{A}}$ **为线性方程组（1）的增广矩阵.**

习　题　（一）

1. 已知下列矩阵是 $m \times n$ 矩阵，请回答下列问题.

（1）m 和 n 各是多少？

（2）哪个是零矩阵？

（3）哪个是行矩阵？

（4）哪个是列矩阵？

（5）哪个是方阵？

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$D=(0),\ E=\begin{bmatrix}1 & 2 & 3 & 4\end{bmatrix},\ F=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 1\end{bmatrix},$$

$$G=\begin{bmatrix}1\\ 2\\ -1\\ 0\end{bmatrix},\ H=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ M=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}.$$

2. 写出下列方程组的系数矩阵、增广矩阵：

(1) $\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 5, \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = -1, \\ x_1 - x_2 + 4x_3 = 0; \end{cases}$

(2) $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_4 = 0, \\ -x_1 - x_3 + 2x_4 = 2, \\ x_1 + 3x_2 - x_4 = 5. \end{cases}$

二、矩阵的运算

1. 矩阵的加法和减法

先看一个实例：

有甲乙两种货物（单位：吨）要从三个产地运往四个销地，其调运方案可分别由矩阵 A 和矩阵 B 给出：

$$A=\begin{bmatrix}5 & 2 & 1 & 3\\ 1 & 5 & 1 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 4 & 5\\ 0 & 5 & 4 & 1\\ 4 & 0 & 5 & 2\end{bmatrix},$$

那么从各产地运往各销地两种货物的总量可表示为矩阵

$$C=\begin{bmatrix}5+1 & 2+2 & 1+4 & 3+5\\ 1+0 & 5+5 & 1+4 & 4+1\\ 4+4 & 3+0 & 2+5 & 1+2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 4 & 5 & 8\\ 1 & 10 & 5 & 5\\ 8 & 3 & 7 & 3\end{bmatrix}.$$

我们把矩阵 C 称为矩阵 A 与矩阵 B 的和.

一般地，设矩阵 $A=(a_{ij})_{m\times n}$，$B=(b_{ij})_{m\times n}$，则**矩阵 $C=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}$ 称为矩阵 A 与矩阵 B 的和（或差），记为 $A\pm B$.** 即

$$A\pm B=(a_{ij}\pm b_{ij})_{m\times n}.$$

显 然，矩阵的加法（或减法）就是把行数与列数分别相同的两个矩阵的对应位置上的元素相加（或相减）.

例如：$A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 3 & -4\\ -1 & 0\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}-3 & 0\\ 2 & -2\\ 1 & -1\end{bmatrix}$，

则 $A+B=\begin{bmatrix}1-3 & 2+0\\ 3+2 & -4-2\\ -1+1 & 0-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & 2\\ 5 & -6\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

不难验证，矩阵的加法满足以下规律：

（1）交换律：$A+B=B+A$；

（2）结合律：$(A+B)+C=A+(B+C)$，其中 A、B、C 都是 $m\times n$ 矩阵.

2. 矩阵的数乘

先看一个实例：

有 一种货物（单位：吨）从二个产地向四个销售点发货的里程（单位：千米）用矩阵表 示为

$$A=\begin{bmatrix}42 & 35 & 25 & 10\\ 31 & 28 & 40 & 21\end{bmatrix}.$$

若每吨每千米的运费为 a 元，则货物的运费（单位：元/吨千米）可表示为

$$aA=\begin{bmatrix}42a & 35a & 25a & 10a\\ 31a & 28a & 40a & 21a\end{bmatrix}.$$

我们把 aA 称为数 a 与矩阵 A 的乘积.

一般地，用数 k 乘矩阵

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

中的每一个元素所得的矩阵称为**数 k 与矩阵 A 的乘积**，记为 kA. 即

$$k\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ ka_{21} & ka_{22} & \cdots & ka_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{m1} & ka_{m2} & \cdots & ka_{mn} \end{bmatrix}.$$

例如：设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$，$k=2$，

则 $k\boldsymbol{A}=2\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 4 & 6 & -2 \\ -4 & 6 & 8 \end{bmatrix}$.

可以验证，矩阵的数乘满足以下规律：

（1）交换律：$k\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}k$；

（2）分配律：$k(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B})=k\boldsymbol{A}+k\boldsymbol{B}$，

$$(k+l)\boldsymbol{A}=k\boldsymbol{A}+l\boldsymbol{A};$$

（3）结合律：$k(l\boldsymbol{A})=(kl)\boldsymbol{A}$，

其中 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 均为 $m\times n$ 矩阵，k、l 为常数.

例 1 设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$，

求 $\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})$.

解：$\frac{1}{2}(\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{B})=\frac{1}{2}\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}$

$$=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}4 & 2\\ -1 & 0\\ 3 & -2\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1\\ -\frac{1}{2} & 0\\ \frac{3}{2} & -1\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}5 & 0\\ -2 & 1\\ -1 & 2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3 & 1\\ \frac{3}{2} & -1\\ \frac{5}{2} & -3\end{bmatrix}.$$

例 2　求满足下列式子中的矩阵 $\boldsymbol{X}$，

$$4\boldsymbol{X}-3\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}15 & 7\\ 12 & -4\end{bmatrix}.$$

解：$\because$　$4\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}15 & 7\\ 12 & -4\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}-1 & 3\\ 2 & 5\end{bmatrix}$

$$=\begin{bmatrix}15 & 7\\ 12 & -4\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}-3 & 9\\ 6 & 15\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}12 & 16\\ 18 & 11\end{bmatrix},$$

$\therefore$　$\boldsymbol{X}=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}12 & 16\\ 18 & 11\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}3 & 4\\ \frac{9}{2} & \frac{11}{4}\end{bmatrix}.$

3.　矩阵的乘法

先看一个实例：

设甲、乙、丙三种产品一二月份的产量(单位：吨)用矩阵 $\boldsymbol{A}$ 表示，其单位成本(百元)与售价(百元)用矩阵 $\boldsymbol{B}$ 表示，

$$\boldsymbol{A}=\begin{array}{c} \begin{array}{ccc}\text{甲} & \text{乙} & \text{丙}\end{array} \\ \begin{bmatrix}300 & 200 & 400\\ 100 & 700 & 600\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{一月}\\ \text{二月}\end{array},\quad \boldsymbol{B}=\begin{array}{c}\begin{array}{cc}\text{成本} & \text{售价}\end{array}\\ \begin{bmatrix}3 & 4\\ 5 & 6\\ 1 & 1.5\end{bmatrix}\end{array}\begin{array}{l}\\ \text{甲}\\ \text{乙}\\ \text{丙}\end{array},$$

那么一月份三种产品的总成本为

$300 \times 3 + 200 \times 5 + 400 \times 1 = 2\ 300$(百元);

一月份三种产品的销售收入为

$300 \times 4 + 200 \times 6 + 400 \times 1.5 = 3\ 000$(百元);

二月份三种产品的总成本为

$100 \times 3 + 700 \times 5 + 600 \times 1 = 4\ 400$(百元);

二月份三种产品的销售收入为

$100 \times 4 + 700 \times 6 + 600 \times 1.5 = 5\ 500$(百元).

用矩阵表示为

$$\boldsymbol{C} = \begin{array}{c} \begin{array}{cc} \text{总成本} & \text{销售收入} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 2\ 300 & 3\ 000 \\ 4\ 400 & 5\ 500 \end{bmatrix} \end{array} \begin{array}{l} \\ \text{一月} \\ \text{二月}. \end{array}$$

我们把矩阵 $\boldsymbol{C}$ 称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积.

一般地,设矩阵 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})_{m\times l}$, $\boldsymbol{B}=(b_{ij})_{l\times n}$,则矩阵

$$\boldsymbol{C}=(c_{ij})_{m\times n}$$

$$\left(\text{其中 } c_{ij}=a_{i1}b_{1j}+a_{i2}b_{2j}+\cdots+a_{il}b_{lj}=\sum_{k=1}^{l}a_{ik}b_{kj}\right)$$

称为矩阵 $\boldsymbol{A}$ 与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的乘积,记为 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$.

注意:只有当左边矩阵的列数与右边矩阵的行数相同时,两个矩阵才能相乘,也就是说,在矩阵 $\boldsymbol{C}=\boldsymbol{AB}$ 中,只有矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的列数与矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行数相同时,乘积 $\boldsymbol{AB}$ 才有意义.此时 $\boldsymbol{AB}$ 的第 i 行第 j 列的元素等于 $\boldsymbol{A}$ 的第 i 行元素与 $\boldsymbol{B}$ 的第 j 列对应元素的乘积之和,并且矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行数等于矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的行数,列数等于矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的列数.

例 3 设

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix},$$

求：$\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$.

解：$$\boldsymbol{AB}=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2\times1+3\times0+0\times3 & 2\times0+3\times2+0\times0\\ 1\times1+2\times0+0\times3 & 1\times0+2\times2+0\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 6\\ 1 & 4\end{bmatrix};$$

$$\boldsymbol{BA}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\\ 3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 1 & 2 & 0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1\times2+0\times1 & 1\times3+0\times2 & 1\times0+0\times0\\ 0\times2+2\times1 & 0\times3+2\times2 & 0\times0+2\times0\\ 3\times2+0\times1 & 3\times3+0\times2 & 3\times0+0\times0\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 3 & 0\\ 2 & 4 & 0\\ 6 & 9 & 0\end{bmatrix}.$$

说明：由上例可以看出，即使 $\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 都有意义，$\boldsymbol{AB}$ 和 $\boldsymbol{BA}$ 也不一定相等，其中 $\boldsymbol{AB}$ 是二阶方阵，$\boldsymbol{BA}$ 是三阶方阵. 因此矩阵乘法不满足交换律. 矩阵相乘时必须注意顺序. 为了区分矩阵相乘时的顺序，我们常常说明是左乘还是右乘. 如 $\boldsymbol{AB}$ 说成是 $\boldsymbol{A}$ 左乘 $\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{BA}$ 说成 $\boldsymbol{A}$ 右乘 $\boldsymbol{B}$.

所谓矩阵乘法不满足交换律是指一般情形而言的. 对个别矩阵乘法可能满足交换律. 如

$$\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 9 & 12\end{bmatrix},$$

$$\begin{bmatrix}3 & 0\\ 0 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2 & 1\\ 3 & 4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 3\\ 9 & 12\end{bmatrix}.$$

例 4 设 $A=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&5&7\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\1&-2\end{bmatrix}$，求 AB.

解：

$$AB=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&5&7\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&-2\\-2&4\\1&-2\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}1\times1+2\times(-2)+3\times1 & 1\times(-2)+2\times4+3\times(-2)\\2\times1+4\times(-2)+6\times1 & 2\times(-2)+4\times4+6\times(-2)\\3\times1+5\times(-2)+7\times1 & 3\times(-2)+5\times4+7\times(-2)\end{bmatrix}$$
$$=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\\0&0\end{bmatrix}.$$

说明：两个非零矩阵的乘积可能是零矩阵.

例 5 设 $A=\begin{bmatrix}-3&1\\4&6\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}2&1\\-4&6\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}$，求 AC，BC.

解：$AC=\begin{bmatrix}-3&1\\4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\6&12\end{bmatrix}$，

$BC=\begin{bmatrix}2&1\\-4&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0&0\\1&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2\\6&12\end{bmatrix}$.

说明：矩阵乘法不满足消去律，即当 $AC=BC$ 时，A 不一定等于 B.

例 6 设

$$A=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&4&-2\\0&-1&5\end{bmatrix},$$

求 AE_3 和 E_3A.

解： $AE_3=\begin{bmatrix}1&0&1\\2&4&-2\\0&-1&5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$