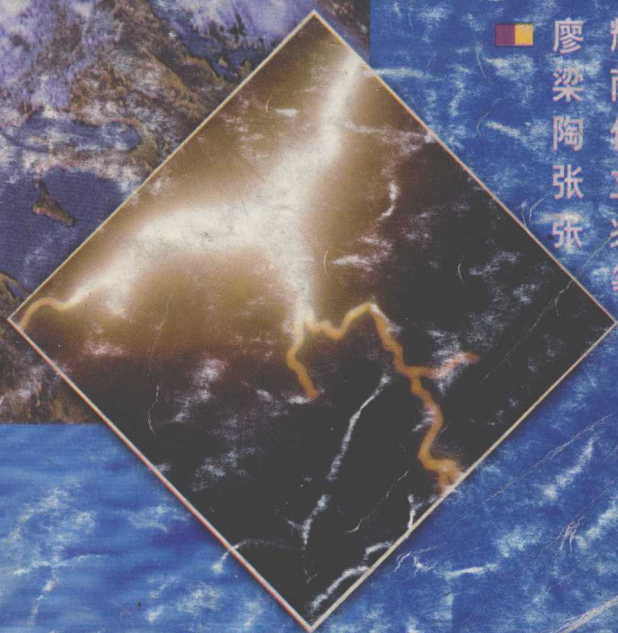


DAXUE
WULI
JIAOCHENG

第二册 (第四版)

大学 物理 教程

发中花刚国编
耀阴作立兆等
廖梁陶张张



武汉测绘科技大学出版社

大学物理教程

第二册
(第四版)

主 编	廖耀发	
副主编	梁荫中	陶作花
	张立刚	张兆国
	李长真	阎旭东
	王大智	张良启
	田 旭	周检检
主 审	余守宪	

武汉测绘科技大学出版社



(鄂)新登字 14 号

内 容 提 要

本教程分三册出版。第一册为力学和热学部分,第二册是电磁学部分,第三册是波动光学、量子力学基础及现代工程技术中的物理基础专题选讲三部分。各部分选材原则是“保证基础、加强近代、联系实际、涉及前沿”,并注重突出物理思想和方法。为适应教与学的需要,书中精选了例题、习题(附有习题答案)和阅读材料;本教程的教学要求和学习指导载于《大学物理学习指导书》中(另册出版)。

本教程可作工科类各专业大学物理课的基本教材,也可供非工科类有关专业师生选用。

图书在版编目(CIP)数据

大学物理教程:第二册/廖耀发主编. —第四版
武汉:武汉测绘科技大学出版社,1998.12
ISBN 7-81030-681-2

I. 大… II. 廖… III. 大学-物理学-教材 IV. O4

武汉测绘科技大学出版社出版发行

(武汉市珞喻路 129 号 430079)

新华书店湖北发行所经销

武汉测绘科技大学出版社丹江印刷厂印刷

*

开本:850×1168 1/32 印张:7.125 字数:177千字

1998年12月第4版 1998年12月第5次印刷

印数 36400—49900册 定价:7.00元

目 录

第三篇 电磁学

第十一章 真空中的静电场	(2)
§ 11-1 库仑定律 电场强度	(2)
§ 11-2 场强叠加原理及其应用	(5)
§ 11-3 电通量 真空中的高斯定理	(13)
§ 11-4 静电场的环路定理 电势能	(22)
§ 11-5 电势 电势叠加原理	(25)
§ 11-6 等势面 场强与电势的微分关系	(32)
习题与思考	(35)
阅读材料 静电的应用与危害	(40)
第十二章 静电场与导体及电介质的相互作用	(42)
§ 12-1 静电场与导体的相互作用	(42)
§ 12-2 电容	(47)
§ 12-3 静电场与电介质的相互作用	(50)
§ 12-4 电介质中的高斯定理与环路定理	(56)
§ 12-5 电场的能量	(62)
习题与思考	(65)
阅读材料 铁电体及其应用	(71)
第十三章 恒定电场	(73)
§ 13-1 电流密度	(73)
§ 13-2 恒定电流与恒定电场	(76)
§ 13-3 电动势	(78)

§ 17-3 自感与互感	(174)
§ 17-4 磁场的能量	(182)
习题与思考	(185)
阅读材料 法拉第	(192)
第十八章 电磁场与电磁波	(194)
§ 18-1 位移电流	(194)
§ 18-2 麦克斯韦方程组	(198)
§ 18-3 电磁波的产生与传播	(200)
§ 18-4 电磁波的性质	(203)
§ 18-5 电磁波的能量与动量	(205)
习题与思考	(208)
阅读材料 归纳与演绎	(211)
习题与思考答案	(213)
常用物理常量表	(221)

第三篇 电磁学

电磁运动是物质的一种基本运动形式。电磁学主要是研究电荷、电场和磁场的基本性质、基本规律以及它们之间相互联系的科学。

1820年以前,人们对电现象和磁现象是分别进行研究的,直到奥斯特发现了电流的磁效应后才结束了这种状态。1831年,英国物理学家法拉第发现了电磁感应现象及其规律,将人类关于电、磁之间联系的认识推到了一个新阶段。1865年,英国物理学家麦克斯韦总结了前人研究电、磁现象的成果,提出了感生电场和位移电流假说,建立了完整的电磁场理论基础——麦克斯韦方程组。根据这个方程组,麦克斯韦预言了电磁波的存在,并计算出电磁波在真空中的传播速度等于光在真空中的传播速度。1887年,德国物理学家赫兹从实验上证实了电磁波的存在。近一百多年来,随着科学技术的飞跃发展,又从许多方面更加充分证实了麦克斯韦方程组的正确性。

电磁学的应用非常广泛。从工农业生产、科学实验到人们的日常生活,几乎处处都离不开电磁学的应用。电磁学还是一些后继课程,如电工学、无线电电子学、自动控制工程等课程的理论基础。因此,学好电磁学对今后更好地认识物质世界,改造自然是非常必要的。

第十一章 真空中的静电场

相对于任一惯性系静止的电荷在其周围产生的电场称为静电场,它是研究电磁学的基础。本章主要研究真空中的静电场的基本性质与规律。

§ 11-1 库仑定律 电场强度

电荷的量子性 电荷是物体所带正电或负电的统称。物体所带电荷的多少称为电量,用 q 或 Q 表示。电量的单位为库仑(C)。实验表明,在自然界中,存在着最小的电荷基本单元 e ,其大小等于电子或质子所带电量的绝对值,任何带电体所带的电量只能是这个基本单元的整数倍^①,即

$$Q = ne$$
式中, n 表示整数。电荷的这一特性称为电荷的量子性。实验测得基本单元的电量 $e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$,其近似值为

$$e = 1.602 \times 10^{-19} \text{C}$$

由于 e 的量值非常小,在宏观现象中不易观察到电荷的量子性,因此,常将电荷 Q 看成可连续变化的物理量,电荷是连续地分布在带电物体上的。

电荷守恒定律 大量实验事实表明,在一个与外界没有电荷

^① 近代物理指出:基本粒子是由夸克、反夸克组成的,每个夸克、反夸克可能带 $\pm \frac{1}{3}e$ 或 $\pm \frac{2}{3}e$ 的电量。但至今尚未观察到孤立存在的夸克与反夸克。

交换的系统内所发生的过程中,系统的正、负电荷的代数和恒保持不变,这一结论称为电荷守恒定律,它是自然界的基本守恒定律之一。它不仅适用于宏观过程,而且也适用于微观过程。例如,在各种化学反应中,反应前、后的电荷代数和保持不变;在各种核反应过程中,反应前、后的电荷代数和也是相等的。

真空中的库仑定律 带电体之间的相互作用是十分复杂的,它不仅与带电体所带的电量,体积大小,形状以及带电体之间的相对位置有关,而且还与带电体的电荷分布以及周围介质的性质有关。我们先讨论真空中点电荷之间的相互作用。所谓点电荷,就是指带电体的线度与带电体之间的距离相比要小得多,以致其大小,形状对所研究问题的影响可以忽略,这样的带电体称为点电荷。和力学中质点概念一样,点电荷的概念也只有相对的意义。

1785年,库仑通过扭称实验总结出一条规律:真空中两个静止的点电荷之间存在着相互作用力,其大小与两点电荷的电量乘积成正比,与两点电荷间的距离平方成反比;作用力的方向沿着两点电荷的连线,同性电荷互相排斥,异性电荷互相吸引。这一结论称为库仑定律,其数学表达式为

$$F = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{r}$$

式中, k 为比例系数, q_1, q_2 分别表示两个点电荷的电量, r 表示两个点电荷间的距离, $\hat{r}$ 表示由施力电荷指向受力电荷的单位矢量。在SI中,电量的单位为库仑(C),距离的单位为米(m),力的单位为牛顿(N)。实验测得

$$k = 8.9880 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2} \approx 9.00 \times 10^9 \text{ N} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{C}^{-2}$$

图11-1(a)表示两个同号电荷之间的作用力是排斥力;图11-1(b)表示两个异号电荷之间的作用力是吸引力。

为了使由库仑定律导出的其它一些公式具有比较简单的形式,通常将库仑定律中的比例系数写成为

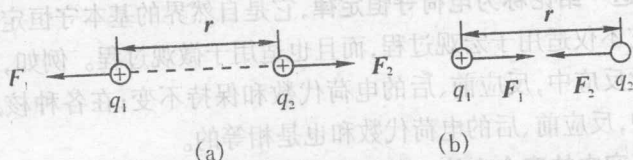


图 11-1 两个电荷之间的作用力

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

于是库仑定律又可写成

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^3} \mathbf{r} \quad (11 \cdot 1)$$

式中, ϵ_0 为真空电容率(又称真空介电系数), 其量值

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8.8542 \times 10^{-12} \text{C}^2 \cdot \text{N}^{-1} \cdot \text{m}^{-2}$$

我们称静止电荷之间的相互作用力为静电力(或库仑力)。显然, 式(11·1)只能适用于计算两个点电荷间的静电力, 对于一般的带电体不能简单地应用。为了计算两个带电体之间的静电力, 应先将带电体分解成许多可看成点电荷的电荷元。利用式(11·1)求出每一对电荷元间的作用力, 再应用力的叠加原理, 便可计算出两个带电体间的静电力。

实验表明, 一个静止的点电荷对另一运动点电荷所产生的静电力也可用式(11·1)计算, 当两点电荷之间的距离在 $10^{-17} \sim 10^7 \text{m}$ 时, 库仑定律仍然成立。

静电场 对于电荷之间如何进行相互作用, 历史上曾经有过两种不同的观点。一种观点认为这类相互作用不需要媒质, 也不需要时间, 而是直接从一个带电体作用到另一个带电体上。也就是说, 电荷之间的相互作用是一种“超距作用”。这种作用方式可表示为

电荷 $\Rightarrow$ 电荷
另一种观点认为,任一电荷都在自己的周围空间产生电场,并通过电场来对其它的电荷施以力的作用,这种作用方式可表示为

电荷 $\Rightarrow$ 电场 $\Rightarrow$ 电荷

现代的科学实验证明,电场的观点是正确的。电场是一种客观存在的特殊物质,与由分子、原子组成的物质一样,也具有能量、质量与动量。

电场强度 设点电荷系(或带电体)静止于某一惯性系中,由前述可知点电荷系(或带电体)周围存在着电场,其中任意一点(简称场点)的电场将对置于该点的电荷施以静电力。为了测定电场的分布,可将一电量为 q_0 的试验电荷引入电场中。试验电荷是指这样一种电荷,它所带的电量必须非常少,以致将其引入电场时,原电场发生的变化可以忽略;且其几何尺寸亦必须非常小,以致可以看作点电荷。实验证明,在给定的场点处,试验电荷 q_0 所受到的电场力 F 与 q_0 之比为一常矢量,与 q_0 大小无关;不同的场点,比值不同。可见比值 F/q_0 揭示了电场的性质,我们将它定义为**电场强度**,简称**场强**,用 E 表示,即

$$E = F/q_0 \quad (11 \cdot 2)$$

上式说明,静电场中任意一点的电场强度其大小等于单位试验电荷在该点所受到的电场力,其方向与正电荷在该点的受力方向相同。

一般地说, E 是空间坐标的函数。若 E 的大小、方向均与空间坐标无关,这种电场则称为**均匀电场**(或称**匀强电场**)。电场强度的单位为牛顿/库仑($N \cdot C^{-1}$),或伏特/米($V \cdot m^{-1}$)。

§ 11-2 场强叠加原理及其应用

点电荷的电场 设真空中的静电场是由电量为 q 的点电荷

产生的,现将电量为 q_0 的试验电荷置于电场中的 P 点,由库仑定律知,试验电荷 q_0 受到的电场力

$$\mathbf{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_0 q}{r^2} \hat{\mathbf{r}}$$

式中, $\hat{\mathbf{r}}$ 是由点电荷 q 指向 P 点的单位矢量。由式(11·2)可得 P 点处的电场强度

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (11 \cdot 3)$$

从式(11·3)可见,当 $q > 0$ 时, $\mathbf{E}$ 与 $\hat{\mathbf{r}}$ 的方向相同;当 $q < 0$ 时, $\mathbf{E}$ 与 $\hat{\mathbf{r}}$ 方向相反;场强 $\mathbf{E}$ 在空间呈球对称分布:在以点电荷 q 为球心, r 为半径的球面上,各点的场强数值相等,方向与球面垂直。

场强叠加原理 若将试验电荷 q_0 置于由 N 个点电荷 $q_1, q_2, \dots, q_N$ 共同产生的静电场中,实验证明, q_0 在场点 P 处受到的电场力 $\mathbf{F}$ 等于各点电荷分别单独存在时 q_0 所受电场力的矢量和,即

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots + \mathbf{F}_i + \dots + \mathbf{F}_N$$

式中, $\mathbf{F}_i$ 代表 q_i 单独存在时, q_i 的静电场施于试验电荷 q_0 的静电力。以 q_0 同除上式等号两边,得

$$\frac{\mathbf{F}}{q_0} = \frac{\mathbf{F}_1}{q_0} + \frac{\mathbf{F}_2}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_i}{q_0} + \dots + \frac{\mathbf{F}_N}{q_0}$$

故点电荷系在 P 点的电场强度

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 + \dots + \mathbf{E}_i + \dots + \mathbf{E}_N = \sum \mathbf{E}_i \quad (11 \cdot 4)$$

式中, $\mathbf{E}_i$ 表示点电荷 q_i 单独存在时在 P 点所产生的场强。式(11·4)表明,在点电荷系产生的电场中,任意一点的电场强度等于每个点电荷单独存在时在该点所产生的电场强度的矢量和,这一结论称为场强叠加原理。

设第 i 个点电荷 q_i 至场点 P 的单位矢量为 $\hat{\mathbf{r}}_i$, 距离为 r_i , 由式(11·3)、(11·4)可得点电荷系的电场强度

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1}{r_1^2} \hat{r}_1 + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_2}{r_2^2} \hat{r}_2 + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i + \cdots + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_N}{r_N^2} \hat{r}_N$$

$$= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum \frac{q_i}{r_i^2} \hat{r}_i \quad (11 \cdot 5)$$

将式(11·5)稍作修改便可计算电荷连续分布的带电体产生的场强,可以设想将带电体上的电荷划分为许多非常小的,可当成点电荷的电荷元 dq , 设其中任一电荷元 dq 至场点 P 的单位矢量为 $\hat{r}$, 距离为 r , 据式(11·3)知该电荷元在 P 点产生的场强

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r}$$

由于电荷在带电体上连续分布,故式(11·5)应用积分来代替,这时带电体在 P 点处产生的场强

$$E = \int_Q dE = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \hat{r} \quad (11 \cdot 6)$$

式中, $\int_Q$ 表示对整个带电体的电量积分。

如果电荷连续地分布在一条曲线 L 上,其线电荷密度(线元长度 dl 与所带电量 dq 之比)为 λ ,则可将 L 分成许多小线元 dl , 每个线元所带电量 $dq = \lambda dl$, 由式(11·6)可得带电曲线 L 产生的场强

$$E = \int_L \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dl}{r^2} \hat{r} \quad (11 \cdot 6a)$$

式中, $\int_L$ 表示沿着带电曲线计算积分。

如果电荷连续地分布在曲面 S 上,其面电荷密度(面元面积 dS 与其所带电量 dq 之比)为 σ 。则可将曲面 S 分成许多小面元 dS , 每个面元所带电量 $dq = \sigma dS$, 这时应用式(11·6)可得带电曲面 S 产生的场强

$$E = \iint_S \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma dS}{r^2} \hat{r} \quad (11 \cdot 6b)$$

式中, $\iiint_S$ 表示沿着带电曲面计算积分。

如果电荷连续地分布在体积为 V 的带电体上, 其体电荷密度 (体元体积 dV 与所带电量 dq 之比) 为 ρ 。则可将 V 分成许多小体积元 dV , 每个体元所带电量 $dq = \rho dV$, 由式(11.6)可得带电体 V 产生的场强

$$\mathbf{E} = \iiint_V \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\rho dV}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad (11 \cdot 6c)$$

式中, $\iiint_V$ 表示对整个带电体积分。

应该注意, 式(11.6)为矢量式。实际中多用标量式(投影式), 由式(11.6)可得 E 在 X 轴上的投影式为

$$E_X = \int dE_x = \int_Q \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{r^2} \cos\alpha$$

式中, α 表示 $\hat{\mathbf{r}}$ 与 X 轴的夹角。

几种带电体系的场强 下面应用场强叠加原理来计算几种带电体系的场强。

(1) **电偶极子的场强** 两个相距为 l 且带有等量异号的点电荷, 若场点到它们的距离 $\gg l$, 则此带电体系称为电偶极子。电偶极子是一个很重要的物理模型, 在研究电介质的极化, 电磁波的发射和吸收等问题中都要用到它。下面讨论电偶极子中垂线上的场强。

如图 11-2 所示, 设组成电偶极子的点电荷所带电量分别为 $+q$ 及 $-q$, 它们到电偶极子中垂线上 P 点的位矢分别为 $\mathbf{r}_+$ 和 $\mathbf{r}_-$, 在 P 点产生的场强分别为 $\mathbf{E}_+$, $\mathbf{E}_-$, P 点到电偶极子中心的距离为 r , $+q$ 对 $-q$ 的位矢为 l , 当 $|r| \gg l$ 时, $r = r_+ = r_-$ 。据式(11.3)得

$$\mathbf{E}_+ = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^3} \mathbf{r}_+$$

$$E_- = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r_-^3} \mathbf{r}_-$$

根据场强叠加原理, P 点的场强

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_+ + \mathbf{E}_- = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^3} (\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_-)$$

由图 11-2 知, $\mathbf{r}_+ - \mathbf{r}_- = -\mathbf{l}$, 于是有

$$\mathbf{E} = \frac{-ql}{4\pi\epsilon_0 r^3} = -\frac{\mathbf{P}}{4\pi\epsilon_0 r^3} \quad (11 \cdot 7)$$

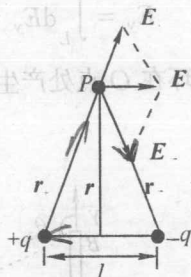


图 11-2 电偶极子的场强

式中, 正电荷与位矢 $\mathbf{l}$ 的乘积 $\mathbf{P} = q\mathbf{l}$ 称为电偶极矩, 简称电矩, 它是表征电偶极子特性的一个重要物理量。

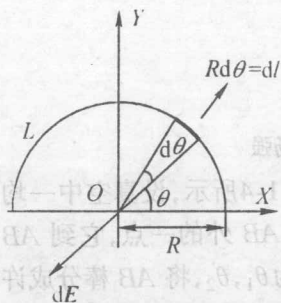


图 11-3 带电半圆环圆心处的场强

(2) 均匀带电半圆环圆心处的场强 如图 11-3 所示, 设半径为 R 的半圆环 L 均匀带电, 其电量为 Q 。显然圆心处的 $E_z = 0$ 。由于半圆环 L 关于 Y 轴为对称, 所以 $E_x = 0$, 故本题只需计算 E_y 。在半圆环上任取一小段圆弧, 它对圆心所张的角为 $d\theta$, 所带电量

$$dq = \lambda dl = \frac{Q}{\pi R} R d\theta = \frac{Q}{\pi} d\theta$$

这一电荷元 dq 在 O 点处产生的场强的大小

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq}{R^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{\pi R^2} d\theta = \frac{Q}{4\pi^2 R^2 \epsilon_0} d\theta$$

由图 11-3 可见, 场强 dE 在 Y 轴上的投影

$$dE_y = dE(-\sin\theta) = -\frac{Q \sin\theta}{4\pi^2 R^2 \epsilon_0} d\theta$$

整个半圆环 L 在 O 点处产生的场强在 Y 轴上的投影

$$E_y = \int_L dE_y = - \int_0^\pi \frac{Q \sin \theta}{4\pi^2 R^2 \epsilon_0} d\theta = - \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2}$$

故半圆环在 O 点处产生的场强

$$E = - \frac{Q}{2\pi^2 \epsilon_0 R^2} \mathbf{j} \quad (11 \cdot 8)$$

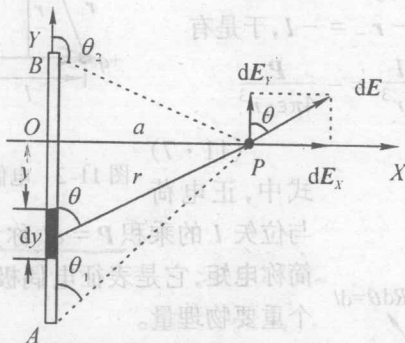


图 11-4 带电直线的场强

(3) 均匀带电直线的场强 如图 11-4 所示, 设真空中一均匀带电细棒 AB 的线电荷密度为 λ ; P 为 AB 外的一点, 它到 AB 的距离为 a , AP, BP 与 Y 轴的夹角分别为 θ_1, θ_2 , 将 AB 棒分成许多线元 dy , 其所带电量 $dq = \lambda dy$, 它在场点 P 处产生的场强 dE 的大小

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda dy}{r^2}$$

式中, r 表示线元 dy 至 P 点的距离。 dE 在 X, Y 轴上的投影分别为

$$dE_x = dE \sin \theta = \frac{\lambda \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} dy$$

$$dE_y = dE \cos \theta = \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 r^2} dy$$

式中, θ 为 dE 与 Y 轴的夹角。由图可见

$$y = -a \operatorname{ctg} \theta$$

$$r = a \operatorname{csc} \theta$$

将以上关系代入 dE_x, dE_y 的表示式, 注意到 $dy = a \operatorname{csc}^2 \theta d\theta$ 则得

$$dE_x = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \sin \theta d\theta$$

$$dE_y = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} \cos \theta d\theta$$

对以上两式分别积分, 得

$$E_x = \int_L dE_x = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \sin \theta}{4\pi\epsilon_0 a} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

$$E_y = \int_L dE_y = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\lambda \cos \theta}{4\pi\epsilon_0 a} d\theta = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} (\sin \theta_2 - \sin \theta_1)$$

$$\text{故 } E = \frac{\lambda}{4\pi\epsilon_0 a} [(\cos \theta_1 - \cos \theta_2) \mathbf{i} + (\sin \theta_2 - \sin \theta_1) \mathbf{j}] \quad (11 \cdot 9a)$$

当细棒 AB 向两端延伸, 至使棒长远大于 P 点至棒的距离 a 时, 可认为棒为“无限长”。这时 $\theta_1 \rightarrow 0, \theta_2 \rightarrow \pi$, 上式化为

$$E = E_x \mathbf{i} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 a} \mathbf{i} \quad (11 \cdot 9b)$$

即“无限长”均匀带电直线外一点的场强大小与棒上的线电荷密度成正比, 与该点至棒的距离 a 成反比; 其方向与细棒垂直。

(4) 均匀带电圆盘轴线上的场强 设均匀带电圆盘 S 的半径为 R , 面电荷密度为 σ 。建立如图 11-5 所示的坐标系, X 轴垂直盘面且通过盘的中心, 盘面在 $Y-Z$ 平面上。盘上电荷分布的对称性导致 X 轴上任意一点的场强只有 $E_x \neq 0$ 。盘上任一位于 (r, θ) 处的面元 $dS = r dr d\theta$, 带有电量 $dq = \sigma r dr d\theta$, 它在 P 点产生的场强 dE 的大小

$$dE = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\sigma r dr d\theta}{x^2 + r^2}$$