边界元法
在传热学中的应用

吴洪潭 著

$$CT_M + \int_\Gamma Tq^* \, \mathrm{d}\Gamma = \int_\Gamma qT^* \, \mathrm{d}\Gamma$$

国防工业出版社
National Defense Industry Press

边界元法
在传热学中的应用

吴洪潭 著

国防工业出版社

·北京·

图书在版编目(CIP)数据

边界元法在传热学中的应用/吴洪潭著.—北京:国防工业出版社,2008.6

ISBN 978-7-118-05657-0

Ⅰ.边... Ⅱ.吴... Ⅲ.边界元法-应用-传热学 Ⅳ.TK124

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 044915 号

※

国防工業出版社 出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号 邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 850×1168 1/32 印张 5¼ 字数 135 千字

2008 年 6 月第 1 版第 1 次印刷 印数 1—4000 册 定价 20.00 元

国防书店:(010)68428422 发行邮购:(010)68414474

发行传真:(010)68411535 发行业务:(010)68472764

前　言

数值计算方法及计算机仿真是目前解决现代工程技术问题的一个重要手段，在航空、航天、化工、机械、冶金、电力、能源、安全、仪器仪表、计量测试等各个领域都有着广泛的应用。特别是近几年来计算机硬件和软件技术的高速发展，为数值计算与仿真研究开辟了广阔的应用前景。

常见的数值计算的离散方法主要有有限差分法、有限元法和边界元法等。有限差分法是历史上最早采用的数值方法，这种方法是用网格线的交点为节点，在每个节点上控制方程中的微分用差分代替，从而在每个节点形成一个代数方程，求解这些代数方程就可以获得所需的数值解。有限差分法的优点是最容易实施，缺点是数值解稳定性难以保证，并且对复杂区域的适应性较差。有限元法则是把区域划分成一系列单元，在每个单元上取数个点作为节点，然后通过对控制方程积分来获得离散方程。有限元法的优点是对不规则区域的适应性好，但计算量较大，需要划分巨大数量的单元。这两种方法的共同缺点是存在解的不稳定性问题。有限差分法和有限元法的研究和应用已经比较成熟，并且都已有了商业化的通用软件。边界元法是应用格林公式选择适当的权函数把空间求解域上的偏微分方程转换成为其边界上的积分方程。边界元法的最大优点是使求解空间的维数降低了一阶，从而大大减少了计算时间和存储容量。另外，由于边界元法不需要对区域内进行离散，因此温度的测量点位置就可以任意选择。更进一步的

是，不像其他数值方法，边界元法可以直接给出未知表面的温度和热流，而表面的热流的精确测量要比温度的测量困难得多。这些优点极大地提高了边界元法在实际工程中的应用。

由于边界元法的研究相对较晚，目前在国际上还没有很好的通用软件。在国内有关边界元法解决实际工程问题的论文和论著都比较少，特别是边界元法数值计算的实用程序也难得一见。本书是根据作者多年来在边界元法和数值传热学研究的基础上完成的。在书中作者提供了许多边界元法实际应用的 C 语言源程序，包含了许多实用的编程技巧。这些程序都经过 VC + + 严格调试，每个子程序都是独立模块，并且自成一个完整的体系，不需要任何其他环境，可以独立运行计算。希望能为使用边界元法解决实际工程问题的科技工作者提供有用的参考。

本书的第 1 章介绍了边界元法的理论基础，其中的公式都进行了严格的推导。第 2 章介绍了边界元法在稳态导热问题中的应用。第 3 章介绍了边界元法在非稳态导热问题中的应用。第 4 章介绍了边界元法在导热反问题中的应用。第 5 章给出一些数值计算中要用到的相关的数值计算方法。

作者十分感谢中国计量学院的崔志尚教授、李希靖教授、袁昌明教授在科研和学术上的指导和帮助，感谢国防工业出版社江洪湖编辑的大力支持。由于作者水平有限，书中难免有缺点和错误，敬请读者批评指正。

吴洪潭

于中国计量学院

目　录

第 1 章　边界元法的理论基础

1.1　边界元法概述

边界元法(Boundary Element Method,BEM)是在经典的积分方程基础上,吸收了有限元法的离散技术而发展起来的计算方法。边界元法的基本思想是用积分方程方法来求解微分方程。

边界元法的产生可追溯到100多年前。19世纪就有人提出了一些积分等式和位势理论,可把线性偏微分方程的边值问题转化为等价的边界积分方程求解,而积分方程解的存在性、唯一性等问题早已得到解决。20世纪初,Fredholm(1905年)首先对古典的积分方程进行了研究,并将其应用于弹性力学问题的求解。苏联学者 Mikhlin[1](1957年)对积分方程的形态进行了深入研究,解决了积分方程理论中的奇异问题,为在工程中应用积分方程方法开辟了道路。把积分方程应用于数值计算,则是在20世纪60年代电子计算机的迅速发展时期开始的。Jaswan[2](1963年)、Symm[3](1963年)等提出了间接的边界积分方程方法,解决了不少位势问题和弹性力学问题。这种间接方法把所求区域看作是无限域的一部分,沿边界配置某种虚设的点源分布函数——"虚载荷",再求出边界上的未知物理量。由于间接法待求的点源分布函数是虚构的,不具有明确的物理意义,因此工程上已很少使用。Rizzo[4](1967年)、Cruse[5](1969年)等发展了边界积分方程的直接解法。在直接解法中,积分方程内出现的未知元是真实的物理量,通过求解积分方程可以得出边界上的所求未知物理量。Cruse 和 Rizzo[6](1975年)出版了第一

部有关边界积分方程的著作。在这之前，“边界元法”这一名词还没被正式提出，通常称为边界积分方程法（Boundary Integral Equation Method，BIEM）。1977 年，Banerjee 和 Butterfield[7] 首次采用了边界元法（Boundary Element Method，BEM）这一名称。1978 年，Brebbia[8] 在其著作《The Boundary Element Method for Engineers》中也使用了边界元法这一名称，同年，在英国南安普敦召开了第一届边界元法国际会议。至此，边界元法这一名称得到了国际公认。

自 1978 年第一届国际边界元法会议以后，边界元法得到了很大的应用和发展，被广泛地应用于弹性力学、流体力学、岩石力学、传热学等许多领域。特别是 20 世纪 70 年代后，随着有限元法（Finite Element Method，FEM）的日趋成熟，以及其缺陷的日益明显，人们开始将目光转向了边界元法，并将有限元的离散技术运用于边界元法，从而使其成为一种比较成熟的工程分析工具。应该指出的是，英国科学家 Brebbia[8~13] 所主编的各种边界元方法著作，特别是他用 Fortran 语言编写的边界元工程实例，对边界元法在各国的推广和应用起到了很大的促进作用。

我国关于边界元法的研究大约开始于 20 世纪 80 年代，清华大学的杜庆华院士[14] 注意到，国际上边界元法的研究工作开始受到广大学术界的重视，在国内首先开创了工程中边界元法的研究，开始跟踪国际上这一领域的最新进展，在工程应用中作出了国内第一批比较系统的研究成果。20 几年来，随着国际边界元法的发展，我国学者也取得了很大的成绩[15~19]。自 1985 年由杜庆华发起并主持的第一届全国边界元会议以来，到目前为止，我国已举行了多次边界元法在工程中应用的全国学术会议。这些会议的召开促进了我国边界元法的研究工作。

边界元法的基础是建立边界积分方程，求解过程可以分成以下两步。

第一步是问题的边界化，应用格林（Green）公式，通过基本解将求解域内的微分方程变换成边界上的积分方程。这样使求解问

题的维数降低一维，如三维空间问题降为二维平面问题，二维平面问题降为一维问题，从而使得输入数据量和代数方程组的未知量大为减少，这是边界元法相对于有限元法的显著优点。

第二步是边界的离散化，可以采用有限元法的离散技巧，而且由于离散仅在边界上进行，误差只产生于边界，而区域内的未知量可以由解析公式计算求出，从而可以有较高的计算精度。另外，由于基本解本身的奇异性，使得边界元法在解决奇异问题时精度较高。总之，边界元法有着降低维数、输入数据少、计算精度高、特别适合大区域以及奇异问题等突出的优点。

众所周知，有限元法已经非常成熟，成为了工程设计人员的有力工具，有通用的计算机软件，如 ANASYS，也有各学科的专用软件，如 FLOWD。边界元法相对于有限元法有这么多优点，但为什么边界元法的发展和应用远远落在有限元法的后面呢？这其中有边界元法本身存在的缺点，也有其他一些原因。

(1)对于许多非线性问题，其基本解不容易得出。此外，很多工程问题常常有多种不同的介质，因此不仅要在边界上划分单元，在域内不同介质也要划分单元，这大大增加了自由度，影响了边界元法的应用范围和效果。

(2)由于边界元法的系数矩阵是满的、不对称的，而有限元法的系数矩阵是稀疏的，非零元素主要集中在对角线附近。当问题的规模较大时，边界元法相对于有限元法就没优势可言了。

(3)在边界元的大多数文献中，由于采用形式上的数学表示，模糊了一些实质简单的原理，使得工程技术人员难以理解。此外，国际上缺少通用的边界元法程序，也阻碍了一般工程技术人员的使用。

近年来，随着边界元法数学理论与数值方法的深入研究，出现了一些新的算法，如边界元快速算法、无网格法等，为边界元法的工程应用打下了坚实的基础。本书的目的是试图以传热学中的导热反问题为针对性的实际应用课题，结合作者在计算机程序设计方面的特长，为边界元的工程技术人员提供详细的理论推导、工程

计算和模块化的 C 语言源程序。

下面介绍加权余量法并用其推导边界元法的基本原理。

1.2 加权余量法

描述工程物理力学问题的控制方程一般都是微分方程，称为数学物理方程，如拉普拉斯（Laplace）方程、泊松（Poisson）方程、热传导方程等。这些微分方程是泛定的，只是同一类物理现象的共性，要获得这些方程具体问题的解，还要加上定解条件——初始条件和边界条件。在数学上，控制方程和定解条件一起合称为定解问题。

边界元法的第一步是根据微分方程的定解问题，推导相应的边界积分方程。在数学上，把一个区域上的积分转化为区域边界上的积分根本是基于格林公式的应用。为了与有限差分法、有限元法相联系，并统一在同样的数学基础上，Brebbia[9] 提出了以加权余量法（Weighted Residual Method）作为边界元法的出发点，推导边界积分方程。

加权余量法是用于求解微分方程近似解的一种重要方法。其基本思想是，用某一个基函数的线性组合——试探函数，作为微分方程的近似解，将这个试探函数代入原方程，产生一个误差函数，称为余量或残数，余量乘以权函数，列出积分下的消除余量的代数方程组，求得试探函数的待定系数，从而获得问题的近似解。

权函数的不同选择方法会产生不同的加权余量法，常见的加权余量法有矩阵法、配点法、伽辽金法、子域法、最小二乘法五种，作者采用伽辽金法。伽辽金法的特点是将试探函数作为权函数。这种方法得到的消除余量的方程不仅简便，而且在一些实际问题中有明显的物理意义，如在力学问题中可以解释为虚功原理。

下面以二维拉普拉斯方程为例，推导加权余量法的通用表达式，即

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \quad \in \Omega \\
&u=\bar{u} \quad \in \Gamma_1 \\
&\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{q}=0 \quad \in \Gamma_2
\end{aligned} \tag{1.1}
$$

式中：Γ_1、Γ_2 为域 Ω 的边界，$\Gamma_1+\Gamma_2=\Gamma$；$\bar{u}$、$\bar{q}$ 分别为边界上的给定值及导数值。在边界 Γ_1 上，u 为已知条件，在边界 Γ_2 上，q 为已知条件，如图 1.1 所示。

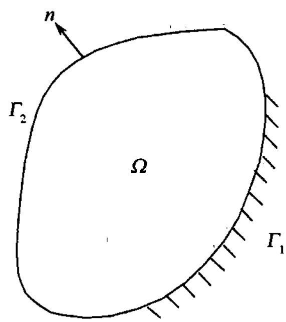

图 1.1　边界 Γ_1 和 Γ_2

选择的近似解为

$$
u=\sum_{i=1}^{n} a_i \phi_i(x,y) \tag{1.2}
$$

式中：a_i 为待定的未知参数；ϕ_i 为可以满足基本边界条件的测试函数。

将近似解代入式(1.1)，由于三个式都可能不为零，引入拉格朗日乘子法，建立泛函——误差函数，即

$$
R=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) W \mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_1} \lambda_1(u-\bar{u}) \mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_2} \lambda_2\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{q}\right) \mathrm{d}\Gamma \tag{1.3}
$$

式中：R 称为余量或残数；W 为权函数；λ_1、λ_2 为拉格朗日乘子。

对式(1.3)第一项进行分部积分,可得

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}\right)W\mathrm{d}\Omega=$$

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial u}{\partial x}n_{x}+\frac{\partial u}{\partial y}n_{y}\right)W\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega$$

对上式右边第二项再分部积分,可得

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial W}{\partial y}\right)\mathrm{d}\Omega=$$

$$\int_{\Gamma}\left(\frac{\partial W}{\partial x}n_{x}+\frac{\partial W}{\partial y}n_{y}\right)u\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}\right)u\mathrm{d}\Omega$$

因此,有

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^{2}u}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}u}{\partial y^{2}}\right)W\mathrm{d}\Omega=$$

$$\int_{\Gamma}\frac{\partial u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma}\frac{\partial W}{\partial n}u\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}\right)u\mathrm{d}\Omega$$

代入误差函数,可得

$$R=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}\right)u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{1}}\lambda_{1}(u-\bar{u})\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Gamma_{2}}\lambda_{2}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{q}\right)\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma}W\frac{\partial u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma}u\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \quad (1.4)$$

令误差函数 R 的变分为零,即

$$\delta R=\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^{2}W}{\partial x^{2}}+\frac{\partial^{2}W}{\partial y^{2}}\right)\delta u\mathrm{d}\Omega+\int_{\Gamma_{1}}\lambda_{1}\delta u\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Gamma_{1}}(u-\bar{u})\delta\lambda_{1}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma_{2}}\lambda_{2}\frac{\partial\delta u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma+$$

$$\int_{\Gamma_{2}}\left(\frac{\partial u}{\partial n}-\bar{p}\right)\delta\lambda_{2}\mathrm{d}\Gamma+\int_{\Gamma}W\frac{\partial\delta u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma-$$

$$\int_{\Gamma}\delta u\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma=0$$

考虑到$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$,则有

$$\delta R = \int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)\delta u \mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1}\left(\lambda_1 - \frac{\partial W}{\partial n}\right)\delta u \mathrm{d}\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma_1}(u - \bar{u})\delta\lambda_1 \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_2}(\lambda_2 + W)\frac{\partial \delta u}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma +$$

$$\int_{\Gamma_2}\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{p}\right)\delta\lambda_2 \mathrm{d}\Gamma + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial \delta u}{\partial n}W\mathrm{d}\Gamma -$$

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\partial W}{\partial n}\delta u \mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.5}$$

由于δu的任意性,可得出

$$\lambda_1 = \frac{\partial W}{\partial n} \quad \in \Gamma_1 \tag{1.6}$$

$$\lambda_2 = - W \quad \in \Gamma_2 \tag{1.7}$$

将式(1.6)和式(1.7)代入式(1.3),并使$R = 0$,可得

$$\int_{\Omega}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)W\mathrm{d}\Omega + \int_{\Gamma_1}\frac{\partial W}{\partial n}(u - \bar{u})\mathrm{d}\Gamma -$$

$$\int_{\Gamma_2}W\left(\frac{\partial u}{\partial n} - \bar{q}\right)\mathrm{d}\Gamma = 0 \tag{1.8}$$

可写成通式,即

$$\int_{\Omega}(\nabla^2 u)W\mathrm{d}\Omega = \int_{\Gamma_2}(q - \bar{q})W\mathrm{d}\Gamma - \int_{\Gamma_1}(u - \bar{u})\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \tag{1.9}$$

这就是拉普拉斯方程的伽辽金形式的加权余量表达式,其中$q = \frac{\partial u}{\partial n}$。式(1.9)对二维、三维皆能适用,也是边界积分方程推导中常要用到的基本公式。

同理,可推导出泊松方程$\nabla^2 u = b$的加权余量表达式,即

$$-\int_{\Omega}bW\mathrm{d}\Omega + \int_{\Omega}(\nabla^2 u)W\mathrm{d}\Omega =$$

$$\int_{\Gamma_2}(q-\bar{q})W\mathrm{d}\Gamma-\int_{\Gamma_1}(u-\bar{u})\frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{d}\Gamma \tag{1.10}$$

1.3 δ 函数

边界元法把微分方程的定解问题转化为边界积分方程的求解，在此过程中微分方程的基本解起着很大的作用。而微分方程的基本解都是满足微分方程在某点具有奇异性的解，这与数学上的 δ 函数密切相关。本节将介绍 δ 函数的定义及其性质。

在物理学、力学等学科中，除了连续分布的物理量，还有集中的物理量，如点电荷、点质量、瞬时点源、瞬时打击力、单位脉冲等。下面用点电荷的密度举例。设均匀带电的细线，中心位于 x_0，长度为 l，总电量为单位电荷 1，如图 1.2 所示。

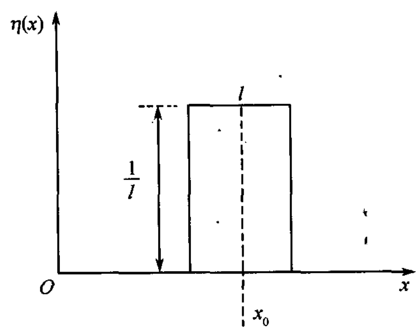

图 1.2　线电荷的密度函数

线电荷的密度为

$$\eta(x)=\begin{cases}0 & |x-x_0|>\dfrac{l}{2}\\ \dfrac{1}{l} & |x-x_0|\leqslant\dfrac{l}{2}\end{cases}$$

总电量为

$$Q=\int_{-\infty}^{\infty}\eta(x)\mathrm{d}x=1$$

当 $l \to 0$ 时,电荷分布可看作位于 $x = x_0$ 的单位电荷,即

$$\eta(x) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \eta(x) \mathrm{d}x = 1$$

把这样的分布函数 $f(x)$ 称为 δ 函数,记作 $\delta(x - x_0)$。下面给出 δ 函数的定义。

定义 δ 函数是满足下列性质的函数:

$$(1)\delta(x - x_0) = \begin{cases} 0 & x \neq x_0 \\ \infty & x = x_0 \end{cases} \tag{1.11}$$

$$(2)\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x - x_0) \mathrm{d}r = 1 \tag{1.12}$$

δ 函数首先是由英国物理学家狄拉克(P. A. Dirac)为描述量子力学中的某些数量关系而引入的,所以 δ 函数又称为狄拉克函数。δ 函数不是一般意义上的函数,按20世纪初期以前形成的经典函数概念,人们是无法理解函数的正确性的,因此在相当长的一段时间内,没有得到重视。直到20世纪50年代,随着泛函分析中广义函数理论的深入研究,才为 δ 函数建立了严格的数学理论。

根据定义,可以把 δ 函数作为单位集中量的密度函数。用 δ 函数来描述集中物理量不仅方便,而且物理含义清楚,被看作普通函数参加运算(如积分、傅里叶变换、解方程等)时,其数学结论与物理结果完全吻合。下面介绍它的一些性质。

性质1 若 $f(x)$ 是定义在区间 $(-\infty, +\infty)$ 的任意连续函数,则

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \delta(x - x_0) \mathrm{d}r = f(x_0) \tag{1.13}$$

这就是所谓的 δ 函数的挑选性(把 $f(x)$ 在 $x = x_0$ 的值挑选出来),表明,δ 函数虽然不能像一般经典函数一样理解,但它与连续函数乘积的积分有明确的定义。式(1.13)也可以作为 δ 函数的定义,