卫生部“十一五”规划教材

全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校教材

供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

第5版

主　编　张选群

人民卫生出版社

卫生部“十一五”规划教材
全国高等医药教材建设研究会规划教材

全国高等学校教材
供基础、临床、预防、口腔医学类专业用

医用高等数学

第5版

主　编　张选群

编　者（以姓氏笔画为序）

马建忠（中国医科大学）
王　颖（吉林大学）
刘春扬（福建医科大学）
何穗智（中山大学）
李　海（四川大学）
张福良（大连医科大学）
张喜红（长治医学院）
张选群（武汉大学）

人民卫生出版社

图书在版编目（CIP）数据

医用高等数学/张选群主编．—5版．—北京：人民卫生出版社，2008.6

ISBN 978-7-117-10067-0

Ⅰ.医…　Ⅱ.张…　Ⅲ.医用数学-医学院校-教材
Ⅳ.R311

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第042009号

本书本印次封底贴有防伪标。请注意识别。

医用高等数学
第5版

主　　编：张选群
出版发行：人民卫生出版社（中继线 010-67616688）
地　　址：北京市丰台区方庄芳群园3区3号楼
邮　　编：100078
网　　址：http：//www.pmph.com
E-mail：pmph@pmph.com
购书热线：010-67605754　010-65264830
印　　刷：尚艺印装有限公司
经　　销：新华书店
开　　本：787×1092　1/16　　**印张**：14.25
字　　数：379千字
版　　次：1987年6月第1版　2008年6月第5版第29次印刷
标准书号：ISBN 978-7-117-10067-0/R·10068
定价（含光盘）：25.00元

全国高等学校五年制临床医学专业
第七轮 规划教材修订说明

全国高等学校五年制临床医学专业卫生部规划教材从第一轮编写出版至今已有30年的历史。几十年来，在卫生部的领导和支持下，以裘法祖院士为代表的一大批有丰富临床和教学经验、有高度责任感的老教授和医学教育家参与了本套教材的创建和每一轮的修订工作，使我国的五年制临床医学教材不断丰富、完善与更新，形成了一套课程门类齐全、学科系统优化、内容衔接合理的规划教材。本套教材为推动我国医学教育事业的改革和发展做出了历史性巨大贡献。正如老一辈医学教育家亲切地称这套教材是中国医学教育的“干细胞”教材，由她衍生出了八年制和研究生两套规划教材。今天，全国一大批在临床教学、科研、医疗第一线的中青年教授、学者继承和发扬了老一辈的优良传统，积极参与了本套第七轮教材的修订和建设工作，并借鉴国内外医学教育教学的经验和成果，不断完善和提升编写的水平和质量，已逐渐将每一部教材打造成了精品，使第七轮教材更加成熟、完善和新颖。

第七轮教材的修订从2006年5月开始，其修订和编写特点如下：

●在全国广泛、深入调研基础上，总结和汲取了前六轮教材的编写经验和成果，尤其是对一些不足之处进行了大量的修改和完善，并在充分体现科学性、权威性的基础上，更考虑其全国范围的代表性和适用性。

●依然坚持教材编写“三基、五性、三特定”的原则。

●内容的深度和广度严格控制在五年制教学要求的范畴，精练文字压缩字数，以更适合广大五年制院校的要求，减轻学生的负担。

●在尽可能不增加学生负担的前提下，提高印刷装帧质量，根据学科需要，部分教材改为双色印刷、彩色印刷，以提升教材的质量和可读性。

●适应教学改革的需求，实现教材的系列化、立体化建设，本轮大部分教材配有《学习指导与习题集》、《实验指导》、《教师用书》以及配套光盘等，且与教材同期出版。

第七轮教材共52种，新增1种，即《急诊医学》。全套教材均为卫生部“十一五”规划教材，绝大部分为普通高等教育“十一五”国家级规划教材，分两批于2008年出版发行。

第七轮 教材目录

1. 医用高等数学／第5版 主编 张选群
2. 医学物理学／第7版 主编 胡新珉
3. 基础化学／第7版 主编 魏祖期
4. 有机化学／第7版 主编 吕以仙
5. 医学生物学／第7版 主编 傅松滨
6. 系统解剖学／第7版 主编 柏树令
7. 局部解剖学／第7版 主编 彭裕文
8. 组织学与胚胎学／第7版 主编 邹仲之 李继承
9. 生物化学／第7版 主编 查锡良
10. 生理学／第7版 主编 朱大年
11. 医学微生物学／第7版 主编 李 凡 刘晶星
12. 人体寄生虫学／第7版 主编 李雍龙
13. 医学免疫学／第5版 主编 金伯泉
14. 病理学／第7版 主编 李玉林
15. 病理生理学／第7版 主编 金惠铭 王建枝
16. 药理学／第7版 主编 杨宝峰
17. 医学心理学／第5版 主编 姚树桥 孙学礼
18. 法医学／第5版 主编 王保捷
19. 诊断学／第7版 主编 陈文彬 潘祥林
20. 医学影像学／第6版 主编 吴恩惠 冯敢生
21. 内科学／第7版 主编 陆再英 钟南山
22. 外科学／第7版 主编 吴在德 吴肇汉
23. 妇产科学／第7版 主编 乐 杰
24. 儿科学／第7版 主编 沈晓明 王卫平
25. 神经病学／第6版 主编 贾建平
26. 精神病学／第6版 主编 郝 伟
27. 传染病学／第7版 主编 杨绍基 任 红
28. 眼科学／第7版 主编 赵堪兴 杨培增
29. 耳鼻咽喉-头颈外科学／第7版 主编 田勇泉
30. 口腔科学／第7版 主编 张志愿
31. 皮肤性病学／第7版 主编 张学军
32. 核医学／第7版 主编 李少林 王荣福
33. 流行病学／第7版 主编 王建华
34. 卫生学／第7版 主编 仲来福
35. 预防医学／第5版 主编 傅 华
36. 中医学／第7版 主编 李家邦
37. 计算机应用基础／第4版 主编 邹赛德
38. 体育／第4版 主编 裴海泓
39. 医学细胞生物学／第4版 主编 陈誉华
40. 医学分子生物学／第3版 主编 药立波
41. 医学遗传学／第5版 主编 左 伋
42. 临床药理学／第4版 主编 李 俊
43. 医学统计学／第5版 主编 马斌荣
44. 医学伦理学／第3版 主编 丘祥兴 孙福川
45. 临床流行病学／第3版 主编 王家良 王滨有
46. 康复医学／第4版 主编 南登崑
47. 医学文献检索／第3版 主编 郭继军
48. 卫生法／第3版 主编 赵同刚
49. 医学导论／第3版 主编 文历阳
50. 全科医学概论／第3版 主编 杨秉辉
51. 麻醉学／第2版 主编 曾因明
52. 急诊医学 主编 沈 洪

全国高等学校临床医学专业第五届教材评审委员会

第 5 版前言

《医用高等数学》是人民卫生出版社推出的具备医学专业特色的数学教材。经过专门的问卷调查，人民卫生出版社出版的《医用高等数学》目前在基础、临床、预防、口腔医学与药学类专业使用最广泛，是全国医学基础教育最受教师与学生欢迎的高等数学教材。对此，编写组谨向支持、使用本教材的师生表示感谢。历经第 1、2、3、4 版，人民卫生出版社出版的第 5 版《医用高等数学》密切配合我国医学教育改革与发展，继续保留第 4 版在先进性、科学性特别是对我国医学教育的适用性等方面的优势外，在概率论基础部分增加了一些崭新而又浅显易懂的医学应用实例和系统的理论阐述，这对医学生进一步学习卫生统计课程是有很大帮助的。

第 5 版《医用高等数学》的第一、二、三、四、五、六、七章分别由刘春扬、王颖、何穗智、张福良、张喜红、李海、马建忠修订，最后由我整合全书。本教材主要内容按 54 教学时数拟订，加上打 * 号的部分内容，总的教学时数为 72 学时。教材中，第一章第一节函数、第四章第一节的空间解析几何简介是中学数学教学与高等数学教学之间的衔接部分，很多学生在高中阶段已经学习过，教师可以根据学生情况简略。

配合第 5 版《医用高等数学》的出版，我们编写组还精编了《医用高等数学学习指导》第 2 版。《医用高等数学学习指导》第 2 版比上版更加精练，更具有针对性，是一本很好的学习高等数学的工具书。另外，我们还配备了教学多媒体光盘，不仅便利于教师授课，还可以提高学生的学习兴趣，增强学生对高等数学难点的理解能力。

我真诚地欢迎使用本教材的师生们多提宝贵意见，对教材最权威的评价在于广大的教师与学生！

张选群

2008. 2. 28

目　录

第一章　函数和极限

函数是变量之间相互联系、相互制约关系的抽象表示，是事物运动、变化及相互影响的复杂关系在数量方面的反映；极限刻画了变量的变化趋势，是研究函数的重要方法. 本章内容主要包括函数、极限和函数的连续性等基本概念，以及它们的主要性质.

第一节　函　数

一、函数的概念

1. 常量与变量

我们经常会遇到各种不同的量，如长度、重量、面积、温度、时间、距离等. 其中有的量在过程中始终保持同一数值，称为**常量**(**constant**)；有的量在过程中可取不同的数值，称为**变量**(**variable**).

一个量究竟是常量还是变量，不是绝对的，要根据具体过程和具体条件来确定. 即使同一个量，在某一过程或条件下可以认为是常量；而在另一过程或条件下就可能是变量. 例如人的身高，在研究少儿发育成长的过程中是变量，而在研究成人的健康状况时通常是常量.

常量也可看作是一种特殊的变量，即在某一过程中，该变量都取相同的数值.

2. 函数的概念

定义 1-1　设 x、y 是同一变化过程中的两个变量，如果对于变量 x 的每一个允许的取值，变量 y 按照一定的规律总有一个确定的值与之对应，则称变量 y 是变量 x 的**函数**(**function**). 此时，变量 x 称为**自变量**(**independent variable**)，y 又称为**因变量**(**dependent variable**)，记为

$$y=f(x)$$

自变量的所有允许值的集合称为函数的**定义域**(**domain of definition**). 函数的定义域通常用区间来表示. 如果 x_0 是函数 $f(x)$ 定义域中的一点，我们也说函数 $f(x)$ 在 x_0 点有定义，与 x_0 对应的因变量的值称为函数值，记为 $f(x_0)$，有时也记为"$y\big|_{x=x_0}$"，即 $y\big|_{x=x_0}=f(x_0)$. 所有函数值的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**(**domain of functional value**).

对应规律和定义域是函数概念中的两大要素，两个函数只有当它们的对应规律和定义域都完全相同时，才认为是两个相同的函数. 函数的定义中，对应规律是用记号 $f(\ )$ 表示的，它具有广泛的含义，其表达方式通常有公式法、图像法和表格法；函数的定义域在实际中是由问题的实际意义确定的，在不考虑函数的实际意义时，是使函数的解析表达式有意义的一切实数所构成的数集.

例 1-1　在出生后 1～6 个月期间内，正常婴儿的体重近似满足以下关系式：

$$y=3+0.6x$$

式中，x 表示婴儿的月龄，是自变量；y 表示其体重(千克)，是 x 的函数. 函数的定义域为 $[1,6]$. 这是公式法表达的函数关系. 若不考虑该问题的实际意义，函数 $f(x)=3+0.6x$ 的定义域为 $(-\infty,+\infty)$.

例 1-2　监护仪自动记录了某患者一段时间内体温 T 的变化曲线，如图 1-1 所示. 对于这段时间的任意时刻 t 都能读出患者

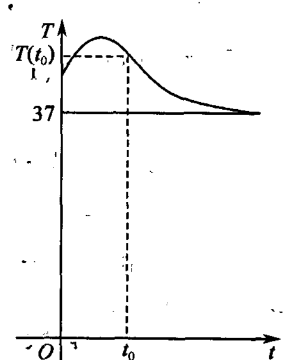

图 1-1

体温 T 的值，即患者体温 T 是时间 t 的一个函数 $T=T(t)$. 这是用图像法表达的函数关系. 如果记录的是静卧在床上健康人的体温 $T=37℃$，它仍然是 t 的函数，此时无论 t 取何值，T 的取值总是 37℃，反映在图像上则是平行于 t 轴的直线.

例 1-3 某地区统计了某年 1 ~ 12 月中当地流行性出血热的发病率，见表 1-1. 可以看出，对每一个月份 t，都有一个发病率 y 与之对应. y 是 t 的函数，其定义域为 1 ~ 12 月，对应规律则由表 1-1 所示，这是用表格法表达的函数关系.

表 1-1

t(月份)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
y(‰)	16.6	8.3	7.1	6.5	7.0	10.0	2.5	3.5	5.7	10.0	17.1	7.0

二、初等函数

1. 基本初等函数

中学里所学过的五类函数：

幂函数 $y=x^a$（a 为任意实数），

指数函数 $y=a^x(a>0,a\neq1)$，

对数函数 $y=\log_a x(a>0,a\neq1)$，

三角函数 $y=\sin x$、$y=\cos x$、$y=\tan x$、$y=\cot x$ 等，

反三角函数 $y=\arcsin x$、$y=\arccos x$、$y=\operatorname{arccot} x$ 等，

再加上常数函数 $y=C$（C 为常数），统称为**基本初等函数**(**basic elementary function**).

2. 复合函数

定义 1-2 设变量 y 是变量 u 的函数，变量 u 又是变量的 x 函数，即

$$y=f(u),\quad u=\varphi(x).$$

如果变量 x 的某些值通过变量 u 可以确定变量 y 的值，则称 y 是 x 的**复合函数**(**compound function**)，记为

$$y=f[\varphi(x)]$$

变量 u 称为中间变量. 复合函数概念可以推广到多个函数构成情况，此时函数是通过多个中间变量的传递而形成的.

例 1-4 试通过 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，求出 y 关于 x 的复合函数.

解 $y=\lg u$，$u=\arctan v$，$v=x+1$，则 y 关于 x 的复合函数是 $y=\lg\arctan(x+1)$，其定义域为 $(-1,+\infty)$.

例 1-5 设 $f(x)=x^2$，$g(x)=\dfrac{x}{1-x}$，试求：$f[g(x)]$、$f[f(x)]$、$g[f(x)]$、$g[g(x)]$.

解 $f[g(x)]=\left(\dfrac{x}{1-x}\right)^2$，　　$f[f(x)]=(x^2)^2=x^4$，

$$g[f(x)]=\frac{x^2}{1-x^2},\qquad g[g(x)]=\frac{\dfrac{x}{1-x}}{1-\dfrac{x}{1-x}}=\frac{x}{1-2x}.$$

如果由两个函数复合而成的函数的定义域为空集，则此复合函数无意义(或称它们不能复合). 例如，由 $y=\arcsin u$，$u=2+x^2$，复合而成的函数 $y=\arcsin(2+x^2)$ 因 $2+x^2>1$，其定义域为空集，即函数 $\arcsin(2+x^2)$ 无意义.

以上是将多个函数"合成"为一个表达式. 而在后面的很多计算问题中，往往需要把复合函数的中间变量找出来，把它"分解"为若干个基本初等函数或由它们通过四则运算而得到的简单函数形式，以便于利用公式进行计算.

例 1-6 将下列复合函数"分解"为简单函数：

(1) $y=a\sin(bx+c)$.

(2) $y=\dfrac{a}{1+2^{kx}}$.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$.

解 (1) $y=a\sin(bx+c)$ 可以看成是由 $y=a\sin u$ 和 $u=bx+c$ 复合而成的.

(2) $y=\dfrac{a}{1+2^{kx}}$ 可以看成是由 $y=\dfrac{a}{u}$，$u=1+2^v$，$v=kx$ 复合而成的.

(3) $y=\lg(1+\sqrt{1+\cos^2 x})$ 可以看成是由 $y=\lg u$，$u=1+\sqrt{v}$　$v=1+w^2$　$w=\cos x$ 复合而成的.

3. 初等函数

定义 1-3 由基本初等函数经过有限次四则运算以及函数复合所得到的仅用一个解析式表达的函数，称为**初等函数(elementary function)**.

例如，$y=\dfrac{\lg x}{\sqrt{1-x^2}}$、$y=x\tan x+\sin(1-e^x)$ 等都是初等函数.

三、分段函数

有些函数，对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的解析式表示，而要用两个或两个以上的式子表示，这类函数称为**分段函数(piecewise function)**. 分段函数在实际医学问题中也是常见的.

例 1-7 设某药物的每天剂量为 y(单位:mg)，对于16岁以上的成年人用药剂量是一常数，设为2mg. 而对于16岁以下的未成年人，则每天的用药剂量 y 正比于年龄 x，比例常数为0.125mg/岁，其函数关系(图1-2)为

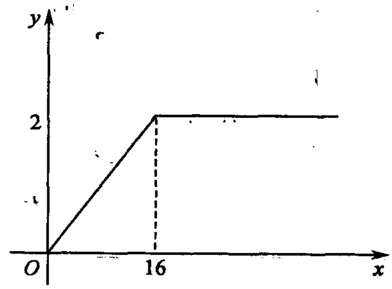

图 1-2

$$y=\begin{cases}0.125x, & 0<x<16;\\ 2, & x\geqslant 16.\end{cases}$$

这里，用药剂量 y 是年龄 x 的函数，但其函数关系是用两个解析式表示的.

应该注意的是，分段函数是一个函数，而不是两个或几个函数. 求分段函数的函数值时，不同范围内的自变量的值要代入相应范围内的函数表达式进行运算. 分段函数一般不属于初等函数. 不过，在不同段内的表达式，通常由初等函数表示.

例 1-8 设 $f(x)=\max\{|x|,x^2\}=\begin{cases}x^2, & x<-1;\\ -x, & -1\leqslant x<0;\\ x, & 0\leqslant x\leqslant 1;\\ x^2, & 1<x.\end{cases}$

求 $f(-2)$、$f(-0.5)$、$f(0)$、$f(1.2)$.

解 $f(-2)=(-2)^2=4$,

$f(-0.5)=-(-0.5)=0.5$,

$f(0.5)=0.5$,

$f(1.2)=1.2^2=1.44$.

四、函数的几种简单特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 在区间 (a,b) 内有定义，如果存在一个正数 M，使对所有的 $x\in(a,b)$，恒

有 $|f(x)|\leqslant M$，则称函数 $f(x)$ 在 (a,b) 内是有界的；如果不存在这样的正数 M，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是无界的.

例如：$\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是有界的；$y=\dfrac{1}{x}$ 在 $(1,+\infty)$ 内是有界的，但在 $(0,1)$ 内是无界的.

2. 单调性

设 x_1、x_2 是函数 $f(x)$ 的定义区间 (a,b) 内的任意两点，且 $x_1<x_2$. 若 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递增的；若 $f(x_1)>f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 (a,b) 内是单调递减的.

例如：2^x 在 $(-\infty,+\infty)$ 内是单调递增的；x^2 在 $(-\infty,0)$ 内是单调递减的，而在 $(0,+\infty)$ 内是单调递增的.

3. 奇偶性

如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意点 x，恒有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 是偶函数；如果对于函数 $f(x)$ 定义域内的任意点 x，恒有 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为奇函数. 偶函数的图像是关于 y 轴对称的，而奇函数的图像是关于坐标原点对称的.

例如：x^2-3x^4、2^x+2^{-x}、$\cos x$ 都是偶函数；$\sin x$、$x+2x^3$、2^x-2^{-x} 都是奇函数.

4. 周期性

对于函数 $f(x)$，如果存在正的常数 T，使得 $f(x)=f(x+T)$ 恒成立，则称 $f(x)$ 为周期函数，满足这个等式的最小正数 T，称为函数的周期.

例如：$\sin x$、$\cos x$ 都是周期函数，周期为 2π.

【思考与练习】

1. 判断下列各组中的函数是否为相同的函数：

(1) $f(x)=\sqrt{x^2}$ 与 $g(x)=x$；　(2) $f(x)=\sqrt[3]{x^3}$ 与 $g(x)=x$；

(3) $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$ 与 $g(x)=\dfrac{1}{x+1}$；　(4) $f(x)=10^{\lg x}$ 与 $g(x)=x$；

(5) $f(x)=\cos^2x+\sin^2x$ 与 $g(x)=1$；　(6) $f(x)=\arcsin x$ 与 $g(x)=\dfrac{\pi}{2}-\arccos x$；

(7) $y=\tan(x+1)$ 与 $u=\tan(v+1)$.

2. 设 $f(x)$ 是奇函数，$g(x)$ 是偶函数，考察下列函数的奇偶性：

(1) $f(x)g(x)$；　(2) $f[g(x)]$；　(3) $f[f(x)]$.

3. 下列函数中哪些是奇函数？哪些是偶函数？哪些是非奇非偶函数？

(1) $f(x)=x^3+|\sin x|$；　(2) $f(x)=(2^x+2^{-x})\cos x$；　(3) $f(x)=\arctan(\sin x)$.

4. 指出下列各函数中哪些是周期函数，并指出其周期.

(1) $y=\arctan(\tan x)$；　(2) $y=\sin\pi x+\cos\pi x$；　(3) $y=\sin\dfrac{1}{x}$；　(4) $y=1+\cos 2x$.

第二节　极　　限

一、极限的概念

在研究实际问题时，除了了解有关函数在变化过程中如何取值之外，往往我们还需要

弄清楚：当自变量按一定的趋势变化时，函数的变化趋势如何．这就是极限(**limit**)概念所要描述和解答的问题．

对于函数 $y=f(x)$，自变量 x 的变化趋势有两种情形：一种是自变量 x 的绝对值无限增大(记为 $x\to\infty$)；另一种是自变量的值无限趋近于某一定值 x_0(记为 $x\to x_0$)．下面我们分别考察这两种情况下函数 $y=f(x)$ 的变化趋势．

1．$x\to\infty$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当 $x\to\infty$ 时的变化趋势．由表 1-2 可看出，无论 x 是取正值并无限增大(记作 $x\to+\infty$)，还是取负值且其绝对值无限增大(记作 $x\to-\infty$)，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势都是无限趋近于 0．

表 1-2

x	±1	±10	±100	±1000	±10000	±100000	…	$\to\infty$
$f(x)$	±1	±0.1	±0.01	±0.001	±0.0001	±0.00001	…	$\to0$

从图 1-3 也可看出，当 $|x|$ 无限增大时，函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 上的图像无限地接近于 x 轴，即以直线 $y=0$ 为渐近线．由此可见：0 是函数 $y=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时无限接近的一个常数．

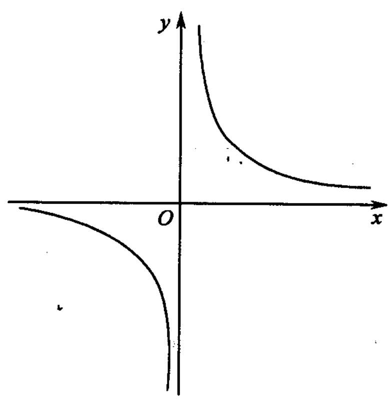

图 1-3

定义 1-4 当自变量 x 的绝对值无限增大时，如果函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就称当 x 趋于无穷大时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限(或**收敛**于 A)，记为

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to\infty).$$

对于函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 当 $x\to\infty$ 时，$f(x)\to0$，即 $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{x}=0$．如果当 $|x|$ 无限增大时，函数 $f(x)$ 不趋于某一个常数，此时，我们就称 $x\to\infty$ 时，$f(x)$ 的极限不存在(或称为**发散**)．例如函数 $y=\sin x$ 和 $y=x^2$，当 $x\to\infty$ 时极限都不存在．前者在 $x\to\infty$ 时函数值始终在 -1 与 1 之间波动；后者当 $x\to\infty$ 时，函数值是无限增大的．对于后一种情形，我们也常记为

$$\lim_{x\to+\infty}x^2=\infty \text{ 或 } x^2\to\infty\ (x\to\infty).$$

若仅当自变量 x 的变化沿 x 轴正方向无限增大(或沿 x 轴负方向绝对值无限增大)时，函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，则称 A 为函数 $f(x)$ 的**单侧极限**，记为

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=A\ (\text{或}\ \lim_{x\to-\infty}f(x)=A).$$

例如，对于函数 $f(x)=\arctan x$，当 $x\to+\infty$ 时，$f(x)\to\dfrac{\pi}{2}$；当 $x\to-\infty$ 时，$f(x)\to-\dfrac{\pi}{2}$，即

$$\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\frac{\pi}{2},\quad \lim_{x\to-\infty}\arctan x=-\frac{\pi}{2}.$$

2．$x\to x_0$ 时函数的极限

考察函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$，当自变量从 x 轴上 $x=1$ 的左右趋近于 1(记为 $x\to1$)时，函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 的变化趋势见表 1-3．

表1-3

x	0.5	0.7	0.9	0.99	0.999	…	$\to 1$
$f(x)$	2	1.492	1.11	1.010	1.001	…	$\to 1$
x	1.5	1.2	1.1	1.01	1.001	…	$\to 1$
$f(x)$	0.667	0.833	0.909	0.990	0.999	…	$\to 1$

由表1-3可见，当 $x\to1$，不论是从右边还是从左边趋近于1，函数 $f(x)$ 都趋近于1，可见1是当自变量 $x\to1$ 时函数 $f(x)=\dfrac{1}{x}$ 无限接近的常数.

在极限定义的过程中，邻域是常用的一个概念. 设 x_0 是某一定点，δ 是大于零的某实数，开区间 $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ 称为点 x_0 的 **δ 邻域**，点 x_0 称为邻域的中心，δ 称为邻域的半径.

定义1-5 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的某邻域内有定义（点 x_0 可以除外），当自变量 x 以任意方式无限趋近于定点 x_0 时，若函数 $f(x)$ 无限趋近于一个常数 A，就称当 x 趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 以 A 为极限（或**收敛**于 A），记为

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A \text{ 或 } f(x)\to A\ (x\to x_0)$$

由此，当 $x\to1$ 时，$f(x)=\dfrac{1}{x}\to1$，即 $\lim\limits_{x\to1}\dfrac{1}{x}=1$. 如果当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 不趋近一个常数，则称当 $x\to x_0$ 时，$f(x)$ 的极限不存在（或称为**发散**）. 例如当 $x\to0$ 时，$\dfrac{1}{x}$、$\sin\dfrac{1}{x}$ 的极限都不存在. 显然，前者趋于无穷大，而后者在 -1 与1之间波动. 对于前者，我们也常记为

$$\lim_{x\to0}\frac{1}{x}=\infty \text{ 或 } \frac{1}{x}\to\infty\ (x\to0).$$

在上述定义中，若自变量 x 趋近于定点 x_0，仅限于 $x<x_0$（或 $x>x_0$），即从 x_0 的左侧（或从 x_0 的右侧）趋近于 x_0 时，函数 $f(x)$ 趋近于一个常数 A，则 A 就称为函数 $f(x)$ 当 $x\to x_0$ 时的左极限（或右极限），记为

$$\lim_{x\to x_0^-}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^-)=A$$

$$\left(\lim_{x\to x_0^+}f(x)=A \text{ 或 } f(x_0^+)=A\right).$$

显然，当 $x\to x_0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限存在的必要充分条件是左、右极限都存在并且相等.

例1-9 讨论函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 0 & x=0\\ x-1 & x>0\end{cases}$ 当 $x\to0$ 时的极限.

解 这是分段函数，$f(x)$ 在 $x=0$ 处的左、右极限分别为：

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(x-1)=-1.$$

由于左极限不等于右极限，所以当 $x\to0$ 时，函数 $f(x)$ 的极限不存在（图1-4）.

若考察函数 $f(x)=\begin{cases}x+1 & x<0\\ 1-x & x>0\end{cases}$ 当 $x=0$ 时的极限（图1-5），由于

$$\lim_{x\to0^-}f(x)=\lim_{x\to0^-}(x+1)=1;$$

$$\lim_{x\to0^+}f(x)=\lim_{x\to0^+}(1-x)=1.$$

左右极限相等，因此 $x\to0$ 时，$f(x)$ 的极限存在且 $\lim\limits_{x\to0}f(x)=1$.

3. 数列的极限

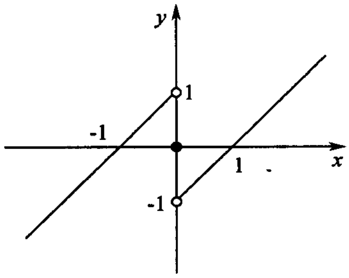

图1-4

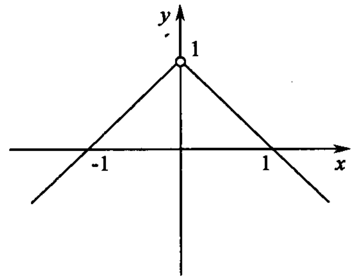

图1-5

数列(**sequence of numbers**)是按顺序依次排列的一串数：

$$a_1,a_2,a_3,\cdots,a_n\cdots$$

数列中每一个数称为数列的项，其中 a_n 称为第 n 项，也称为数列的**通项**(**general term**). 数列可简记为$\{a_n\}$. 以下给出几个数列的例子：

(1) $\left\{\dfrac{(-1)^n}{n}\right\}$: $-1,\dfrac{1}{2},-\dfrac{1}{3},\dfrac{1}{4},\cdots$;

(2) $\left\{\dfrac{n}{n+1}\right\}$: $\dfrac{1}{2},\dfrac{2}{3},\dfrac{3}{4},\dfrac{4}{5},\cdots$;

(3) $\{2n\}$: $2,4,6,8,\cdots$;

(4) $\left\{\dfrac{1+(-1)^n}{2}\right\}$: $0,1,0,1,\cdots$.

数列实际上就是定义在自然数集上的函数：$f(n)=a_n$. 因此，考察当 n 无限增大时数列的变化趋势，即数列的极限时，可类比函数$f(x)$当自变量 $x\to+\infty$ 时的情形. 由此，数列$\{a_n\}$的极限可描述为：当 n 无限增大时，若 a_n 无限趋近于一个常数 A，则称当 n 趋于无穷大时，a_n 以 A 为极限(或**收敛于** A)，记为

$$\lim_{n\to\infty}a_n=A \text{ 或 } a_n\to A(n\to\infty).$$

例如，对于上面的4个数列，(1)、(2)的极限存在：

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0;$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1.$$

而(3)、(4)的极限不存在. 对于(3)可记为

$$\lim_{n\to\infty}2n=+\infty.$$

4. 判别极限存在的法则

法则1(夹逼法则) 若在同一极限过程中，三个函数$f_1(x)$、$f(x)$及$f_2(x)$之间有如下关系：

$$f_1(x)\leqslant f(x)\leqslant f_2(x)$$

且
$$\lim f_1(x)=\lim f_2(x)=A,$$

则
$$\lim f(x)=A.$$

法则2(单调有界法则) 单调有界数列一定有极限. 即对$\{a_n\}$而言，若有 $a_1\geqslant a_2\cdots\geqslant a_n\cdots$(递减)或 $a_1\leqslant a_2\cdots\leqslant a_n\cdots$(递增)，且对一切 n，有 $|a_n|\leqslant M$(有界)，则$\{a_n\}$必有极限.

法则2对函数极限也是有效的.