普通高等院校规划教材

数学分析选讲

SHU XUE FEN XI XUAN JIANG

任亲谋 主编

陕西师范大学出版社

普通高等院校规划教材

数学分析选讲

主　编　任亲谋

副主编　周焕芹　胡洪萍

编　者　（以编写章次为序）

任亲谋　胡洪萍　苏忍锁　周焕芹

谢淑翠　汪义瑞　张永锋　赵临龙

赵教练

陕西师范大学出版社

图书代号:JC7N0990

图书在版编目(CIP)数据

数学分析选讲/任亲谋主编.—西安:陕西师范大学出版社,2008.1
ISBN 978-7-5613-4106-3

Ⅰ.数… Ⅱ.任… Ⅲ.数学分析-高等学校-教材 Ⅳ.017

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 188557 号

数学分析选讲

任亲谋 主编

责任编辑 陈焕斌
责任校对 钱 栩
视觉设计 吉人设计
出版发行 陕西师范大学出版社
社　　址 西安市陕西师大 120 信箱(邮政编码:710062)
网　　址 http://www.snupg.com
经　　销 新华书店
印　　刷 陕西师范大学印刷厂
开　　本 787mm×960mm 1/16
印　　张 15.25
字　　数 239 千
版　　次 2008 年 1 月第 1 版
印　　次 2008 年 1 月第 1 次印刷
书　　号 ISBN 978-7-5613-4106-3
定　　价 24.00 元

读者购书、书店添货或发现印刷装订问题,请与本社教材中心联系、调换。
电　话:(029)85307826　85303622(传真)
E-mail:jcc@snnup.net

前 言

由于数学分析内容多，且教学进度快，作为教材言简意赅，不可能对内容与方法详加解释，为弥补此不足，我们编写了《数学分析选讲》这本书。

本书分七章，内容包括：一元函数极限与连续，一元函数微分学、积分学，级数理论，多元函数微分学、积分学。在每一节，设有内容简析，主要是对内容进行归纳、总结；范例分析，所举例子难易适度，具有典型性、多样性，在解题上注重揭示实质和规律，突出解题思路与方法。在某些题后加了引申拓展，有的是想指出题目的作用和意义，使读者对问题的实质有所理解，而不停留于只会解一个问题。有的是把读者所学过的内容归纳起来，哪些容易出错，哪些有简捷思路等，使知识更系统化、条理化，以达到对数学分析内容的准确理解和提高解题能力的目的。书中还给出了练习题，书末对练习题给出了提示或解答。

笔者想借本书，让读者去构造完美的知识整体，把所学的内容和方法归纳总结，养成独立思考的习惯。本书既可作为数学专业高年级的选修课教材，也可作为学习数学分析的辅导教材及教学参考书，对报考硕士研究生的读者来说，也是考前复习的良师益友。

编　者

2007.10

目　　录

第 1 章　函数、极限与连续

§1-1　函　数

内容简析

1. 数集的概念虽易理解,但应注意以下几点:

(1) 实数集的有序性,稠密性;

(2) 非空有界数集上、下确界的存在性及其唯一性.

2. 函数概念是从客观事物运动变化规律中抽象出来的一种数量关系,决定一个函数需具备定义域,值域,对应法则. 但由于对应法则 f 和定义域 D 可唯一确定函数的值域 $f(D)$,所以通常说函数有两要素——对应法则与定义域 D. 并记为

$$y=f(x),x\in D.$$

3. 平面点集

$$\{(x,y)\mid y=f(x),x\in D\}$$

构成函数的图象.

4. 尽管函数的有界性,单调性,奇偶性,周期性等特点,在中学时就有所了解,但对其定义理解一定要准确. 虽然并不是所有函数都具备以上性质,但应会利用定义判别所涉及函数是否具有某种性质.

5. 要熟悉基本初等函数(常值函数,幂函数,指数函数,对数函数,三角函数,反三角函数)的性质及图象,理解初等函数的概念.

6. 应熟记一些重要的非初等函数. 如:符号函数,黎曼函数,狄里克雷函数等.

7. 并不是任何函数都具有反函数;严格单调的函数一定有反函数, 但有反

函数的函数未必都是单调的.

8. 并不是任何两个函数都能复合. 注意复合函数的条件.

范例

范例 1　设$f(x),g(x)$在D上有界,证明:

$\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant\inf\limits_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf\limits_{x\in D}f(x)+\sup\limits_{x\in D}g(x)$.

[思路分析]　下确界仍是下界且下界之和仍为和的下界.

[证]　$\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)\leqslant f(x)+g(x),x\in D$. 即$\inf\limits_{x\in D}f(x)+\inf\limits_{x\in D}g(x)$是$f(x)+g(x)$在$D$上的一个下界. 由下确界的定义,有

$$\inf_{x\in D}f(x)+\inf_{x\in D}g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\tag{1-1-1}$$

另一方面,由下确界的定义,

$$\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant f(x)+g(x)\leqslant f(x)+\sup_{x\in D}g(x),x\in D.$$

$$\begin{aligned}\therefore\ \inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}&\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+\sup_{x\in D}g(x)\}\\&=\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x)\end{aligned}\tag{1-1-2}$$

综合(1-1-1)、(1-1-2)得

$$\inf_{x\in D}f(x)+\inf_{x\in D}g(x)\leqslant\inf_{x\in D}\{f(x)+g(x)\}\leqslant\inf_{x\in D}f(x)+\sup_{x\in D}g(x).$$

[引申拓展]　解这一类问题的方法是,先把集合$\{f(x)\},\{g(x)\}$,$\{f(x)+g(x)\}(x\in D)$缩小(放大)得下(上)确界,再利用确界的定义得到要证的不等式. 若函数无界,式(1-1-2)的推导过程可能无意义.

范例 2　证明$f(x)=x-[x]$是$(-\infty,+\infty)$上以1为周期的周期函数.

[思路分析]　观察的$f(x)$的值域为$[0,1)$,再按定义验证.

[证]　因为$[x]\leqslant x<[x]+1$,所以

$$[x]+1\leqslant x+1<[x]+1+1.$$

由$[x]$的定义知$[x+1]=[x]+1$,从而

$$f(x+1)=x+1-[x+1]=x-[x]=f(x)$$

即$f(x)$是以1为周期的函数.

[引申拓展]　解决这类问题的关键是,要利用$[x]\leqslant x<[x]+1$与$[x+k]=[x]+k$,k为整数.

范例 3　证明:非空有下界的正整数集存在最小元素.

[思路分析]　非空有下界的集合必有下确界,下确界与该集任一元素间的正整数仅有有限个,易得结论.

[证]　设S为非空有下界的正整数集,由确界原理,S有下确界. 并记$\inf S$

$=\zeta\in\mathbf{R}$，由下确界的定义，取 $\varepsilon=1$，存在 $n\in S$，使

$$\zeta\leqslant n<\zeta+1$$

下证，ζ 是 S 的最小元素. 反设 S 中存在正整数 m 满足 $m<n$，则 $m\leqslant n-1$，又由上式

$$n-1<\zeta$$

即 $m<\zeta$. 这与 ζ 是 S 的下确界矛盾.

［引申拓展］　这里主要用到，整数 $n-1$ 与 n 的相邻性. 而对于非整数集，如有理数集，由有理数集的稠密性，即非空有下界的有理数集不一定有最小元素. 如 $\{x\mid x^2-2,x$为有理数$\}$ 就没有最小元素.

范例 4　设 $S\subseteq\mathbf{R}$ 为有界无限点集. 则 S 必有最大聚点和最小聚点.

［思路分析］　由聚点定理知 S 的聚点是存在的，再利用有界性验证最小（大）聚点存在.

［证］　令 $H=\{x\mid x\in\mathbf{R},S$ 中只有有限个数小于 $x\}$，显然 S 的下界属于 H，故 H 是非空的. 又 S 是无穷集. 故 S 的上界不属于 H，并为 H 的上界. 即 H 非空有上界，由确界原理. H 有上确界. 记 $x_0=\sup H$.

因为 $\forall\varepsilon>0$，$x_0+\varepsilon\notin H$. 由 H 的定义可知在 S 中有无穷多个数小于 $x_0+\varepsilon$，又因为 $x_0-\varepsilon$ 不是 H 的上界，故 $\exists\bar{x}\in H$，使 $x_0-\varepsilon<\bar{x}\leqslant x_0$.

因此 S 中小于 $\bar{x}$ 的数是有限的，从而 S 中小于 $x_0-\varepsilon$ 的数是有限的，由定义即 x_0 不但是 S 的聚点，且是 S 的最小聚点. 类似可证最大聚点的存在性.

［引申拓展］　这是分析中常用的一种手法，将问题转化，利用确界原理. 确定 x_0，再用定义衡量 x_0 既是聚点，又是最小的.

范例 5　设 $f(x)$ 是区间 I 上的凸函数，证明：$f(x)$ 在 I 的任意闭子区间上有界.

［思路分析］　由凸函数的定义知，闭区间上任一点的函数值可用闭区间两端点的函数值线性表出，得到上界，下界与此类似.

［证］　设 $[a,b]\subseteq I$，$\forall x\in[a,b]$，存在 $0\leqslant\lambda\leqslant1$，使 $x=\lambda a+(1-\lambda)b$. 由凸函数定义，

$$f(x)=f(\lambda a+(1-\lambda)b)\leqslant\lambda f(a)+(1-\lambda)f(b)\leqslant\max\{f(a),f(b)\},$$

即 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有上界，设 M 为 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上的一个上界，

另一方面，$\forall x\in[a,b]$ 作变换 $t=x-\frac{1}{2}(a+b)$，得

$$\frac{1}{2}(a+b)-t=a+b-x,\quad a\leqslant a+b-x\leqslant b,$$

即 $\frac{1}{2}(a+b)-t\in[a,b]$，$x=\frac{1}{2}(a+b)+t$.

于是，

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=f\left[\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}+t\right)+f\left(\frac{a+b}{2}-t\right)\right]$$
$$\leqslant\frac{1}{2}[f(x)(+M)].$$

因此，$2f\left(\frac{a+b}{2}t\right)-M\leqslant f(x)$.

综上所述，$f(x)$在$[a,b]$上有界.

[引申拓展]　这里的结论是针对任一闭子区间，否则其结论不真. 如 $f(x)=\frac{1}{x}$ 虽是$(0,+\infty)$上的凸函数，但在$(0,+\infty)$上无界.

范例6　设$f(x)$是$(-\infty,+\infty)$内的函数，而且$f(x+T)=kf(x)(k,T>0)$，证明:$f(x)=a^x\varphi(x)$，a 为常数，$\varphi(x)$是以 T 为周期的函数.

[思路分析]　先确定常数 k，再确定 a，得 $\varphi(x)$，再验证.

[证]　若$f(x)=0$，结论显然，不妨$f(x)\neq0$，则存在 $x_0\in(-\infty,+\infty)$，使$f(x_0)\neq0$. 于是$f(x_0+T)=kf(x_0)$. 故

$$k=\frac{f(x_0+T)}{f(x_0)}>0.$$

令 $a\left[\frac{f(x_0+T)}{f(x_0)}\right]^{\frac{1}{T}}(>0)$，$\varphi(x)=a^{-x}f(x)$，因为

$$\varphi(x+T)=a^{-(x+T)}f(x+T)=\left[\frac{f(x_0+T)}{f(x_0)}\right]^{-\frac{x+T}{T}}\cdot kf(x)$$
$$=\left[\frac{f(x_0+T)}{f(x_0)}\right]^{-\frac{x}{T}-1}\cdot kf(x)=\left[\frac{f(x_0+T)}{f(x_0)}\right]^{-\frac{x}{T}}\cdot f(x)$$
$$=a^{-x}f(x)=\varphi(x),$$

故 $\varphi(x)$是以 T 为周期的函数，且$f(x)=a^x\varphi(x)$.

[引申拓展]　若已知函数满足某个方程，要证明或确定函数的具体形式具有某种性质，常常通过简单的变形，先把其中的常数(或系数)确定，得一具体形式，再加以验证.

范例7　设函数 $y=f(x)$，$x\in(-\infty,+\infty)$ 的图象关于直线 $x=a$ 和 $x=b$

对称,证明$f(x)$是周期函数.

[思路分析]　首先由条件及图形观察出,周期可能为$2(b-a)$.

[证]　由图象的对称性,$\forall x\in(-\infty,+\infty)$,

$$f(x)=f(2a-x),\quad f(x)=f(2b-x)$$

因此

$$f(x+2(b-a))=f[2b-(2a-x)]=f(2a-x)=f(x).$$

故$f(x)$是以$2(b-a)$为周期的函数.

[引申拓展]　此类题一般都可利用条件先确定其周期,然后再按定义加以验证.

范例8　设$f:\mathbf{R}\longrightarrow\mathbf{R}$上的函数,$A,B\subseteq\mathbf{R}$是实数集.证明:

(1) $A\subseteq f^{-1}[f^{-1}(A)]$, $f[f^{-1}(A)]\subseteq A$;

(2) $f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;

(3) $f^{-1}[A\cap B]=f^{-1}(A)\cap f^{-1}(B)$;

(4) $f^{-1}[A^c]=[f(A)]^c$.

这里$A^c=\mathbf{R}\backslash A$, $f^{-1}(A)=\{x\mid x\in\mathbf{R},f(x)\in A\}$

[证]　以(1)(2)为例,(3)(4)可用类似的方法证明.

(1) 设$x\in A\subseteq\mathbf{R}$,则$f(x)\in f(A)$.由条件$x\in f^{-1}(f(A))$.故$A\subseteq f^{-1}[f^{-1}(A)]$.

设$y\in f[f^{-1}(A)]$,由条件$f^{-1}(y)\in f^{-1}(A)$, $y\in A$故$f[f^{-1}(A\cup B)]\subseteq A$.

(2) 设$x\in f^{-1}[A\cup B]$,则$f(x)\in A\cup B$,若$f(x)\in A$,则$x=f^{-1}(A)$,于是$x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$;若$f(x)\in B$,则$x\in f^{-1}(B)$,于是$x\in f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$,故$f^{-1}[A\cup B]=f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)$.

类似可证:$f^{-1}(A)\cup f^{-1}(B)\subseteq f^{-1}(A\cup B)$.

[引申拓展]　本类问题虽没什么技巧,但一定要熟悉反函数的定义,值域与定义域间的关系以及集合相等的概念.

范例9　设A为有界数集,α为常数,$\beta=\{x+\alpha\mid x\in A\}$.证明:$\sup B=\sup A+\alpha$, $\inf B=\inf A+\alpha$.

[证]　$\forall y\in B,y=x+\alpha\leqslant\sup A+\alpha,\sup B\leqslant\sup A+\alpha$　　(1-1-3)

$\forall x\in A,x+\alpha\in B,x+\alpha\leqslant\sup B$,即$x\leqslant\sup B-\alpha$.

于是　$\sup A\leqslant\sup B-\alpha$,

从而　$\sup A+\alpha\leqslant\sup B$　　(1-1-4)

综合(1-1-3)、(1-1-4)得$\sup B=\sup A+\alpha$.

类似可证:$\inf B=\inf A+\alpha$.

[引申拓展] 这类题目基本是一个模式,要注意一个集合的上(下)确界首先是该集合的上(下)界.

范例 10 设 f 是以 $T(>0)$ 为基本周期的周期函数 $g(x)=f(x^2)$. 证明:$g(x)$ 不是周期函数.

[证] 用反证法. 设 $g(x)$ 为周期函数,并假设 $\tau(>0)$ 为 $g(x)$ 的一个周期. 则有

$$f((x+\tau)^2)=g(x+\tau)=g(x)=f(x^2) \qquad (1-1-5)$$

以 $x=0$ 代入(1-1-5)式得

$$f(\tau^2)=f(0)=f(kT),k\in\mathbf{N}^+$$

故

$$\tau^2=kT,\tau=\sqrt{kT}.$$

以 $x=\sqrt{(k+1)T}$ 代入(1-1-5)式得

$$f((\sqrt{(x+1)T}+\sqrt{kT})^2)=g(\sqrt{k+1T})=f[(k+1)T]=f(0).$$

另一方面,由 $f(0)=f((\sqrt{(k+1)T}+\sqrt{kT})^2)=f(2\sqrt{(k+1)kT})$,知,$2\sqrt{(k+1)k}$ 为正整数,记为 n,于是,$\left(\frac{n}{2}\right)^2=k(k+1)$. 故 $\frac{n}{2}$ 为正整数,且 $k<\frac{n}{2}<k+1$,矛盾. 所以,$g(x)$ 不是周期函数.

[引申拓展] 对于这种强条件下结论的证明,往往反证较易.

范例 11 设 $f(x)=x^2+ax+b$. 证明:$\max\{|f(0)|,|f(1)|,|f(-1)|\}\geqslant\frac{1}{2}$.

[思路分析] 先求出 $f(0)$,$f(1)$,$f(-1)$,观察其特点.

[证] 反设 $\max\{|f(0)|,|f(1)|,|f(-1)|\}<\frac{1}{2}$,

由 $f(0)=b$, $f(1)=1+a+b$, $f(-1)=1-a+b$,知

$$2=-2f(0)+f(1)+f(-1)\leqslant 2|f(0)|+|f(1)|+|f(-1)|<2.$$

[引申拓展] 该题的难度并不大,但其方法具有一定的代表性,先对其结论给予否定,然后再解读条件. 最后推出矛盾.

范例 12 设函数 $f(x)$ 定义在 $\mathbf{R}$ 上,满足 $2f(x)+f(1-x)=x^2,x\in\mathbf{R}$,求 $f(x)$ 的表达式.

[思路分析] 消去 $f(1-x)$,自然就联想到以 $1-x$ 代 x.

[解] 在所给函数方程中,以 $1-x$ 代 x 并与所给方程联立得方程组

$$\begin{cases}2f(1-x)+f(x)=(1-x)^2 & (1-1-6)\\ f(1-x)+2f(x)=x^2 & (1-1-7)\end{cases}$$

(1 -1 -7) ×2 - (1 -1 -6)得

$$3f(x) = 2x^2 - (1-x)^2$$

解出

$$f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 2x - 1) .$$

[引申拓展] 解题方法常常隐藏在题目之中,关键是要想办法去寻找,合理地利用条件.

§1 - 2　数列的极限

内容简析

1. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists N \in \mathbf{N}^+$. 当 $n > N$ 时,$|a_n - a| < \varepsilon$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a \Leftrightarrow \{a_n\}$ 的任何子列均收敛于同一极限 a.

3. $\{a_n\}$ 收敛$\Leftrightarrow \forall \varepsilon, \exists N \in \mathbf{N}^*$. 当 $m,n > N$ 时,$|a_n - a_m| < \varepsilon$.

这里,$\varepsilon(>0)$是任意给定的. 它表示 a_n 与 a 的接近程度. 由$|a_n - a| < \varepsilon$ 来寻找正整数 N. 即得到一个与 n 和 ε 有关的不等式. 最后解出 N. 这里虽然 N 是由 ε 来确定,但不唯一. 这就给寻找 N 带来了极大的方便. 可用熟知不等式中的结论"适当"放大(注意放大的结果不但要保证原式能够任意小,还应使 N 便于求解). 使得当 $n > N$ 时,都有$|a_n - a| < \varepsilon$. 一般地,ε 越小,N 就越大,这就与我们直观的 n 无限变大时 a_n 就无限接近 a 统一起来.

还需指出的是,从 2 可以看出 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 我们只要求当 $n > N$ 时,有 $a_n \in U(a,\varepsilon)$. 至于 $n < N$ 的项我们并没有要求. 所以,我们还可得到如下结论:"数列去掉或改变有限项,不会改变其敛散性,若收敛,其极限值也不会改变". 但又会有这样的问题:既然已知道$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. 何必再去证明? 这是初学者常提及的问题. 我们的目的是严格按照数学中的公理化系统去推导和建立更高、更强的判别法则. 比如,我们通过 1 建立了不需要$\{a_n\}$以外的数,通过自身的关系就可确定其敛散性的法则即"Cauchy 收敛准则". 特别是在利用定义所建立的性质和一系列法则,将问题"化繁为简","化难为易",而这些法则成立的前提是由 1 ~3作为工具推导出来的. 常用的性质与法则如下.

4. 收敛数列的基本性质与运算法则

（1）收敛数列的极限必唯一；

（2）收敛数列必有界；

（3）收敛数列的保号性、保不等式性；

（4）四则运算法则.

其中，(1)保证了运算法则的可行性，即用法则或不同的方法所得极限相同. (2)不但给出了无界数列发散结论，还使得关于某收敛数列性质的推导变得简单.

5. 一些常用的结论

（1）$\{a_n\}$是单调有界数列. 则$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$存在.

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\lim\limits_{n\to\infty}b_n=c$，又 $a_n\leqslant c_n\leqslant b_n(n=1,2,\cdots)$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=c$.

（3）设$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=a$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}=a$.

（4）（施笃茨定理）设$\{b_n\}$是严格递增的无穷大数列. 它与$\{a_n\}$一起满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}-a_n}{b_{n+1}-b_n}=l,$$

则有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=l.$$

范例

范例 1　设 $a>1,a_n'=\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{2}{a^2}+\cdots+\dfrac{n}{a^n}\right),n=1,2\cdots$，求$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

[思路分析]　因为$\left\{\dfrac{n}{a^n}\right\}$的分母是等比，分子是等差，对其部分和$\{a_n\}$同乘$\dfrac{1}{a}$. 与$\{a_n\}$作差得一等比数列的前 n 项和.

[解]　由$\dfrac{a_n}{a}=\dfrac{1}{a^2}+\dfrac{2}{a^3}+\cdots+\dfrac{(n-1)}{a^n}+\dfrac{n}{a^{n+1}}$，得

$$a_n-\frac{a_n}{a}=\frac{1}{a}+\frac{1}{a^2}+\cdots+\frac{1}{a^n}-\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$=\left(\frac{a-\dfrac{1}{a^n}}{a-1}-1\right)-\frac{n}{a^{n+1}}$$

$$a_n=\frac{1}{1-\frac{1}{a}}\left[\left(\frac{a-\frac{1}{a^n}}{a-1}-1\right)-\frac{n}{a^{n+1}}\right]$$

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{a}{(a-1)^2}.$$

[引申拓展]　本题中所用错位减法适用于分子为等差、分母为等比形式的数列计算前 n 项和. 如 $a_n=\frac{d}{a}+\frac{2d}{a^2}+\cdots+\frac{nd}{a^n}$.

范例2　计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

[解]　由 $1-\frac{1}{k^2}=\frac{(k-1)(k+1)}{k^2}$, $k=2,3,\cdots$, 得

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\=&\frac{1\cdot 3}{2^2}\cdot\frac{2\cdot 4}{3^2}\cdots\frac{(n-1)(n+1)}{n^2}\\=&\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}\end{aligned}$$

于是

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^3}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

范例3　计算: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)$.

[解]　由 $1-\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{(k+1)(k+2)}$, $k=1,2,\cdots$, 得

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{6}\right)\cdots\left(1-\frac{2}{(n+1)(n+2)}\right)\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 4}{2\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 5}{3\cdot 4}\cdot\frac{3\cdot 6}{4\cdot 5}\cdots\frac{n\cdot(n+3)}{(n+1)(n+2)}\\=&\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\cdot\frac{n+3}{n+1}\\=&\frac{1}{3}\end{aligned}$$

范例 4 计算：$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$.

[解] 由
$$\frac{k^3-1}{k^3+1}=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)(k^2-k+1)}$$
$$=\frac{(k-1)(k^2+k+1)}{(k+1)[(k-1)^2+(k-1)+1]},k=2,3,\cdots$$
$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^3-1}{2^3+1}\cdot\frac{3^3-1}{3^3+1}\cdots\frac{n^3-1}{n^3+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1\cdot 7}{3\cdot 3}\cdot\frac{2\cdot 13}{4\cdot 7}\cdot\frac{3\cdot 21}{5\cdot 13}\cdot\frac{4\cdot 31}{6\cdot 21}\cdots\frac{(n-1)(n^2+n+1)}{(n+1)[(n-1)^2+(n-1)+1]}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{n^2+n+1}{n(n+1)}=\frac{2}{3}$$

[引申拓展] 范例2,3,4基本上属于一个模式,若数列的通项为多因子相乘,一般方法为先展开各因式,按其规律约简,得到该数列的简单形式,再求出其极限,或展开后创造条件利用迫敛性定理.

范例 5 设 $\left|a_{n+2}-a_{n+1}\right|<\frac{1}{2}\left|a_{n+1}-a_n\right|,n\geq 1$. 证明：$\{a_n\}$ 收敛.

[思路分析] 由条件可联想到 Cauchy 准则,即对 $|a_n-a_m|$ 添加项,利用三角不等式,结合条件得出结论.

[证] 令 $b_n=|a_{n+1}-a_n|$,于是 $0\leqslant b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2}b_n$,可归纳得
$$b_{n+1}\leqslant\frac{1}{2^n}b_1,n=1,2,\cdots$$

对任意 $n>m$,
$$a_n-a_m=\sum_{i=m}^{n-1}(a_{i+1}-a_i)$$
所以
$$|a_n-a_m|=\sum_{i=m}^{n-1}b_i\leqslant b_m\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2^{n-m-1}}\right)<2b_m\to 0(m\to\infty)$$
即 $\{a_n\}$ 是柯西数列,所以 $\{a_n\}$ 收敛.

[引申拓展] 条件的解读也是证题思路的显现,问题的转化能达到事半功倍的效果. 一个数列相邻两项具有某些特殊的特征,此时判别该数列的敛散,一般采用添加项,再利用 Cauchy 准则,得出结论.

范例6　证明：$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$

[思路分析]　对这些较特殊的数列的证明可创造条件利用迫敛性定理.

[证]　对任意 $n<k$，有

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{1}{k}\right)^k &= 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)+\cdots\\ &\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right)+\cdots\\ &\quad+\frac{1}{k!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{k-1}{k}\right)\\ &\geqslant 1+1+\frac{1}{2!}\left(1-\frac{1}{k}\right)+\frac{1}{3!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)+\cdots\\ &\quad+\frac{1}{n!}\left(1-\frac{1}{k}\right)\left(1-\frac{2}{k}\right)\cdots\left(1-\frac{n-1}{k}\right).\end{aligned}$$

让 $k\to\infty$，有 $e\geqslant 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}$，

另一方面，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n\leqslant 1+1+\dfrac{1}{2!}+\dfrac{1}{3!}+\cdots+\dfrac{1}{n!}.$

于是，

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\leqslant 1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\leqslant \mathrm{e}.$$

由迫敛性定理得

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+1+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots+\frac{1}{n!}\right)=\mathrm{e}.$$

[引申拓展]　本题用的是常规的方法，对其作“适当”放大，再由迫敛性定理得出结论，但这个“放大”的办法应视具体问题而定，没有一个固定的模式. 一些必要的不等式结论还是要熟记. 这样便能达到事半功倍的效果. 下例也是如此.

范例7　证明：数列 $a_n=1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}-\ln n$，$n=1,2,\cdots$. 有极限 c（c 为 Euler 常数）.

[证]

$$\begin{aligned}a_n &= \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)-[\ln n-\ln(n-1)+\ln(n-1)]\\ &\quad-\ln(n-2)+\ln(n-2)-\cdots-\ln 2+\ln 2-\ln 1\\ &=1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}-\frac{1}{n}-\ln\frac{n}{n-1}-\ln\frac{n-1}{n-2}-\cdots-\ln\frac{2}{1}\end{aligned}$$