高等职业教育数学系列教材

线性代数学习教程

XIANXINGDAISHUXUEXIJIAOCHENG

杜俊文 陈洁 主编

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

线性代数学习教程

主　编　杜俊文　陈　洁
副主编　蒋凤光　王鲁静　王钦烈
主　审　陈秀岐　丁　杰

天津大学出版社
TIANJIN UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

线性代数学习指导 /杜俊文,陈洁编.—天津:天津大学出版社,2007.10
ISBN 978-7-5618-2580-8

Ⅰ.线...　Ⅱ.①杜...②陈...　Ⅲ.线性代数-高等学校-教学参考资料　Ⅳ.0151.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2007)第 166081 号

出版发行　天津大学出版社
出 版 人　杨欢
地　　址　天津市卫津路 92 号天津大学内(邮编:300072)
网　　址　www.tjup.com
电　　话　发行部:022-27403647　邮购部:022-27402742
印　　刷　河北省昌黎县第一印刷厂
经　　销　全国各地新华书店
开　　本　148mm×210mm
印　　张　7.125
字　　数　213 千
版　　次　2007 年 10 月第 1 版
印　　次　2007 年 10 月第 1 次
印　　数　1-3 000
定　　价　15.00 元

前　言

线性代数是一门重要的应用基础课.线性代数的基本理论、基本方法广泛应用于自然科学、技术科学、社会科学的各个方面.掌握这门学科的基本理论和方法,对提高运用数学知识解决有关问题的能力是重要的,也为后继课、专业课的学习打下良好的基层.为帮助学生学好这门学科,根据多年从事线性代数教学积累的经验,编写了《线性代数学习教程》.

全书每章以节为单位展开辅导,每节设有知识要点,重点难点释疑,典型题型分析,同步练习及其答案五部分.对线性代数的知识点进行归纳总结,介绍一般的解题方法.本书有助于学生掌握正确的学习线性代数的方法,巩固学习效果,可作为学习线性代数的辅导用书,也可作为教学参考书.

本书由杜俊文、陈洁担任主编,蒋凤光、王鲁静、王钦烈担任副主编, 陈秀岐、丁杰 担任主审.

限于编者水平,本书难免存在问题和错误,恳请读者批评指正.

编者

2007 年 9 月于天津

目　　录

第 1 章 行列式

1.1 行列式的定义

1.1.1 知识要点

1. 排列

1)排列 由 n 个数码组成的一个有序数组,称为一个 n 阶排列.由 $1,2,3,\cdots,n$ 构成的 n 阶排列种数 $P_n = n!$.

2)标准排列 按从小到大的次序构成的一个排列 $123\cdots(n-1)n$ 称为标准排列.

3)逆序 在一个排列中,当某两个数码的先后次序与标准次序不同时,则称有一个逆序.

4)逆序数 排列 $p_1p_2\cdots p_n$ 的逆序总数称为排列的逆序数,记为 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)$.

5)奇、偶排列 逆序数为偶数的排列称为偶排列,逆序数为奇数的排列称为奇排列.

6)对换 将一个排列中某两个数码的位置互换,而其余数码不变得到另一个排列,这样的变换称为一个对换.

7)排列的性质:

①任意一个排列经过一次对换后改变其奇偶性.

②在 $n!$ 个 n 阶排列中,奇偶排列各占一半.

2. 二、三阶行列式的对角线法则

1)二阶行列式

$$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad ①$$

2)三阶行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-a_{11}a_{23}a_{32}-a_{12}a_{21}a_{33}-a_{13}a_{22}a_{31}.$$

3. n 阶行列式定义

1)由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$排成 n 行 n 列,用记号

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

表示 n 阶行列式,也可以简记为 $D=|a_{ij}|$.

2)n 阶行列式定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1j_2\cdots j_n}(-1)^{\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}.$$

3)n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 还可以定义为

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{i_1i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i\cdots i_{n2})}a_{i_11}a_{i_22_1}\cdots a_{i_nn}.$$

4)n 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的一般项可以记为

$$(-1)^{2(i_1i_2\cdots i_n)+\tau(j_1j_2\cdots j_n)}a_{i_1j_1}a_{i_2j_2}\cdots a_{i_nj_n}.$$

4. 特殊行列式

1)上三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

2)下三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

3)反三角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1\,n-1} & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2\,n-1} & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{(n-11)} & a_{(n-1)2} & \cdots & 0 & 0 \\ a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}a_{1n}a_{2\,n-1}\cdots a_{n1}.$$

4)对角行列式

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}.$$

1.1.2 重点、难点释疑

1. 求逆序数的方法

设 $p_1p_2\cdots p_n$ 为 n 个自然数的一个排列，考虑 $p_i(i=1,2,\cdots,n)$，按本书定义如果比 p_i 小且排在 p_i 后面的数有 τ_i 个，就说 p_i 的逆序数为 τ_i，那么

$$\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i.$$

亦可按比 p_i 大且排在 p_i 前面的数有 $2i$ 个,就说 p_i 的逆序数为 τ_i,则 $\tau(p_1p_2\cdots p_n)=\sum_{i=1}^{n}\tau_i$ 来计算.

2.注意

计算二、三阶行列式可以用对角线法则计算.但是四阶以上(含四阶)行列式没有对角线法则.

3.用定义计算行列式值的方法

n 阶行列式的定义是指,行列式中所有不同行、不同列元素的乘积的代数和,共有 $n!$ 项.用定义计算行列式值,计算量比较大.但是,对某些特殊的行列式,例如零元素比较多时,可以标出不为零的元素的位置,再计算其值,较为方便.

1.1.3 典型题型分析

题型一

求下列排列的逆序数:

(1)36715284;(2)$13\cdots(2n-1)24\cdots(2n)$.

解 (1)3 的逆序为 2,6 的逆序为 4,7 的逆序为 4,1 的逆序为 0,5 的逆序为 2,2 的逆序为 0,8 的逆序为 1,4 的逆序为 0.所以

$$\tau(36715284)=2+4+4+0+2+0+1+0=13.$$

(2)3 的逆序为 1,5 的逆序为 2,7 的逆序为 3,……$2n-1$ 的逆序数为 $n-1$.所以

$$\begin{aligned}\tau(13\cdots(2n-1)24\cdots(2n))&=1+2+3+\cdots\cdots+(n-1)\\&=\frac{n(n-1)}{2}.\end{aligned}$$

题型二

选择 i 与 k 使 $1i25k4897$ 成为奇排列.

解 由题意 i, k 只有两种选择 $i=3,k=6$ 或 $i=6,k=3$.

因为 $\tau(132564897)=5,\tau(162534897)=8$,

所以 132564897 为所求.即 $i=3,k=6$.

题型三

当 x 取何值时，$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} \neq 0$.

解　由对角线法则

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & x \\ 4 & x & 0 \\ 1 & 0 & x \end{vmatrix} = 3x^2 - x^2 - 4x = 2x^2 - 4x = 2x(x-2) \neq 0.$$

所以 $x \neq 0$　且　$x \neq 2$.故当 x 为0或2时行列式不为0.

题型四　用行列式定义计算行列式.

计算:

(1) $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & a_{25} \\ a_{31} & a_{32} & 0 & 0 & 0 \\ a_{41} & a_{42} & 0 & 0 & 0 \\ a_{51} & a_{52} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b & 0 \\ 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d \end{vmatrix}$

解　(1)此行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4j_5)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4} a_{5j_5}$，那么 $j_3j_4j_5$ 为1,2,3,4,5中取三个元素的某一排列，从而至少有一个元素取自3,4,5中.

设 j_3 取自3,4,5中.则 $a_{3j_3}=0$，从而 $a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$ 中至少有一个因子是零，所以行列式的值为零.

(2)因为 $a_{11}=a, a_{23}=b, a_{32}=c, a_{44}=d$ 其余元素均为零，由定义知，行列式的一般项为 $(-1)^{\tau(j_1j_2j_3j_4)} a_{1j_1} a_{2j_2} a_{3j_3} a_{4j_4}$，$j_1j_2j_3j_4$ 为1,2,3,4的一个排列.而此时，仅1324排列中 $(-1)^{\tau(1324)} a_{11} a_{23} a_{32} a_{44}$ 不为零，其他均为零.

所以此行列式的值是 $-abcd$.

题型五

设 n 阶行列式中有 n^2-n 个以上元素为零，证明该行列式的值为零.

证明　设 $D_n=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$

$$=\sum_{i_1 i_2\cdots i_n}(-1)^{\tau(i_1 i_2\cdots i_n)}a_{i_1 1}a_{i_2 2}\cdots a_{i_n n},$$

而 n 阶行列式共有 n^2 个元素,现有 n^2-n 个以上元素为零,则不为零的元素个数小于 n.即 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}$ 中至少有一个元素为零.故所有 $a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n}=0$,所以 $D_n=0$.

1.1.4　同步练习

一、选择题

1.下列(　　)是偶排列.

A.4123　　B.1324　　C.4321　　D.2341

2.若 $(-1)^{\tau(1k4l5)}a_{11}a_{2k}a_{34}a_{4l}a_{55}$ 为五阶行列式 $|a_{ij}|$ 的一项,则 k、l 的值及该项的符号为(　　).

A.$k=2,l=3$ 符号为正　　B.$k=2,l=3$ 符号为负

C.$k=3,l=2$ 符号为负　　D.以上都不对

3.$k=-1$ 是行列式 $\begin{vmatrix} 2 & k-1 \\ k-1 & 2 \end{vmatrix}=0$ 的(　　)条件.

A.必要　　B.充分　　C.充要　　D.无关

4.$\begin{vmatrix} k & 2 & 1 \\ 2 & k & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=0$ 的充分条件是(　　).

A.$k=2$　　B.$k=-3$　　C.$k=3$　　D.$k=0$

5.$\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & a_{14} \\ 0 & 0 & a_{23} & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 & 0 \\ a_{41} & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}=$(　　).

A. $a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$　　B. $-a_{14}a_{23}a_{32}a_{41}$

C. 0　　D. 以上都不对

二、填空题

1. 排列 $13\cdots(2n-1)(2n)(2n-2)\cdots42$ 的逆序数为________.

2. 四阶行列式中含有因子 $a_{11}a_{23}$ 的项为__________.

3. 六阶行列式中 $a_{21}a_{53}a_{16}a_{42}a_{65}a_{34}$ 应取的符号为_________.

4. 当 $a=$____，且 $b=$____ 时，$\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ -b & a & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix}=0$.

5. $f(x)=\begin{vmatrix} 2x & x & -1 \\ -1 & -x & 1 \\ 3 & 2 & -x \end{vmatrix}$ 中，x^3 的系数是__________.

三、计算及证明题

1. 按自然数从小到大为标准次序，求下列各排列的逆序数.

(1)54231786；(2)$n(n-1)\cdots21$

2. $\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & a & a \end{vmatrix}>0$ 的充分必要条件是什么?

3. 用定义计算下列行列式.

(1)$\begin{vmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & n-1 & \cdots & 0 & 0 \\ n & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{vmatrix}$；(2)$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$.

1.1.5　同步练习答案

一、选择题

1. C　2. B　3. B　4. C　5. A

二、填空题

1. $n(n-1)$　2. $-a_{11}a_{23}a_{32}a_{44}$ 或 $a_{11}a_{23}a_{34}a_{42}$　3. $-$　4. 0、0　5. 2

三、计算及证明题

1.(1)11.(2)$\frac{n(n-1)}{2}$.2.$|a|<2$.3.(1)$(-1)^{\frac{n(n+1)}{2}}n!$.(2)0.

1.2 行列式的性质

1.2.1 知识要点

1.转置行列式

n 阶行列式 D 的转置行列式记为 D^{T},且

$$D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}, \qquad D^{\mathrm{T}}=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

2.行列式的性质

1)行列式与它的转置行列式相等,即 $D=D^{\mathrm{T}}$.

2)交换行列式的两行(列),行列式的符号改变.

3)用数 k 乘以行列式的某一行(列),等于用数 k 乘以行列式.

4)如果行列式有两行(列)的对应元素成比例,那么此行列式的值为零.

5)行列式的某行(列)的元素加上另一行(列)对应元素的 k 倍,行列式的值不变.

6)如果行列式 D 的某一行(列)的每一个元素都可以写成两个数的和,那么此行列式可以写成两个行列式的和,这两个行列式分别以这两个数为所在行(列)对应位置的元素,其他位置的元素与 D 的元素相同.

3.行列式的值等于零的几种情况

1)如果行列式中有两行(列)对应元素相等,那么行列式的值为零.

2)如果行列式中有一行(列)的元素全为零,那么行列式的值为零.

3)如果行列式中有两行(列)对应元素成比例,那么行列式的值为

零.

1.2.2 重点难点释疑

1)转置行列式的性质 $D=D^{\mathrm{T}}$ 的意义是,行列式对行成立的性质,对列相应的性质也成立.

2)一个数乘以行列式,要用数乘以某一行(列)的所有元素.换言之,行列式某一行(列)有公因子,可以提到行列式外面.

3)性质5)可以叙述为,行列式第 i 行(列)的每一个元素的 k 倍($k\neq0$),加到第 j 行(列)对应元素上,行列式的值不变.而此时,行列式中第 i 行的元素没有改变.即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ ka_{i1}+a_{j1} & ka_{i2}+a_{j2} & \cdots & ka_{in}+a_{jn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

4) $$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_1 & b_2 \\ c_1 & d_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_1 \\ c_2 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}.$$

要注意,$\begin{vmatrix} a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ c_1+c_2 & d_1+d_2 \end{vmatrix} \neq \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{vmatrix}$.

5)利用三角形法计算 n 阶行列式.

利用行列式的性质,将行列式化为上三角形行列式,具体步骤如下:

以 $a_{11},a_{22},\cdots,a_{n-1n-1}$所在行为准,将其下方的元素化为零,直至化为一个三角形行列式,这时主对角线上元素的乘积就是所求 n 阶行列式的值.

6)利用行列式元素的某种特征计算 n 阶行列式.

如果行列式的元素有明显的规律性,考虑用一些特殊的计算方法,可以简化行列式的计算.

1.2.3 典型题型分析

题型一

设三阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=3$,求:

$$D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{33} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}.$$

解 由性质

$$\begin{aligned} D_1 &= \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11}-3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21}-3a_{22} & a_{33} \\ 4a_{31} & 2a_{31}-3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} 4a_{11} & 2a_{11} & a_{13} \\ 4a_{21} & 2a_{21} & a_{23} \\ 4a_{31} & 2a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & -3a_{22} & a_{23} \\ 4a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \\ &= 4\cdot(-3)\cdot\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = 4\cdot(-3)\cdot 3=-36. \end{aligned}$$

或将 D_1 中第一列的元素用 $-\frac{1}{2}$ 乘后加到第二列上去,得到

$$D_1=\begin{vmatrix} 4a_{11} & -3a_{12} & a_{13} \\ 4a_{21} & -3a_{22} & a_{33} \\ 4a_{31} & -3a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}=-36.$$

题型二

设 n 阶行列式 $D=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$，则

$$D_1=\begin{vmatrix} -a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & -a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & -a_{nn} \end{vmatrix}=(\quad).$$

A. $-D$　　B. $(-1)^n D$　　C. D　　D. D^{-1}

解　D_1 中每一行提取 (-1)，于是

$$D_1=(-1)^n\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}=(-1)^n D,\text{故选 B.}$$

题型三

计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 34\ 215 & 35\ 215 \\ 28\ 092 & 29\ 092 \end{vmatrix}$；(2) $\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} 1 & b_1 & 0 & 0 \\ -1 & 1-b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & -1 & 1-b_2 & b_3 \\ 0 & 0 & -1 & 1-b_3 \end{vmatrix}$.

计算数字行列式，可以用行列式的性质将行列式中数字化简，使其

运算简单.

(1)把第一列的(-1)倍加到第二列,

$$\begin{vmatrix} 34\ 215 & 35\ 215 \\ 28\ 092 & 29\ 092 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 34\ 215 & 1\ 000 \\ 28\ 092 & 1\ 000 \end{vmatrix} = 1\ 000 \begin{vmatrix} 34\ 215 & 1 \\ 28\ 092 & 1 \end{vmatrix}$$

$$=6\ 123\ 000.$$

(2)**解法一**　将行列式化为三角行列式.

$$\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -2 \end{vmatrix}$$

$$= -\begin{vmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{3}{4} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{5}{2} \end{vmatrix} = \frac{5}{16}.$$

解法二　将行列式第二、三、四列加到第一列上,