湖南省高等职业教育规划教材

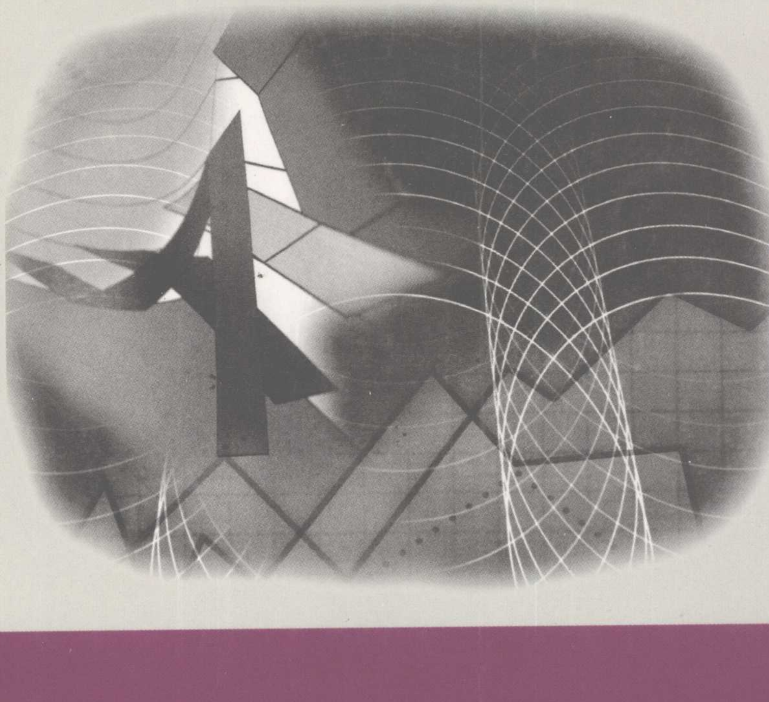
HUNANSHENG GAODENG ZHIYE JIAOYU

GUIHUA JIAOCAI

线性代数与概率统计

XIANXING DAISHU YU GAILU TONGJI

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会 编审



湖南大学出版社

湖南省高等职业教育规划教材

HUNANSHENG GAODENG ZHIYE JIAOYU

GUIHUA JIAOCAI

线性代数与概率统计

XIANXING DAISHU YU GAILU TONGJI

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会 编审

总主编：杨向群

主　编：屈宏香

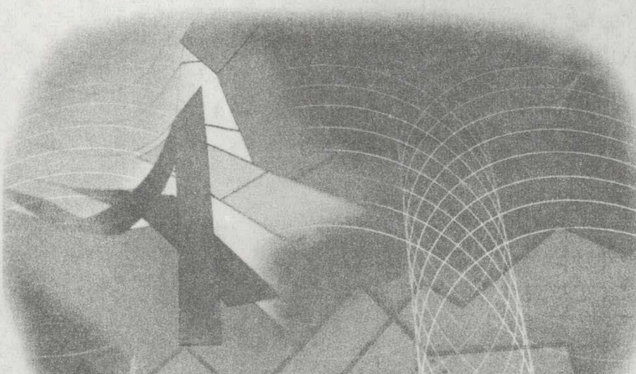
副主编：钟　莫

编写成员：钟　莫 陈江兵 谢沙金

陈　宁 汤北齐 屈宏香

审定组组长：高纯一

审定组成员：黄立宏 吴金文 沈　竹 徐玉林



湖南大學出版社

图书在版编目(CIP)数据
线性代数与概率统计/屈宏香主编．—长沙：湖南大学出版社，2005.1
ISBN 7-81053-888-8
Ⅰ.线…　Ⅱ.屈…　①线性代数—高等学校—教材　②概率论—高等学校—教材　③数理统计—高等学校—教材　Ⅳ.①O151.2 ②O21
中国版本图书馆CIP数据核字(2005)第002785号

线性代数与概率统计

Xianxing Daishu yu Gailü tongji

主　　编：屈宏香　　副 主 编：钟　英
责任编辑：罗素蓉　　特约编辑：袁作兴
封面设计：花景勇　　责任校对：张建平
出版发行：湖南大学出版社
社　　址：湖南·长沙·岳麓山　　邮　　编：410082
电　　话：0731-8821691(发行部)，8649149(编辑室)，8821006(出版部)
传　　真：0731-8649312(发行部)，8822264(总编室)
电子邮箱：press@hnu.net.cn
网　　址：http://press.hnu.net.cn
印　　装：湖南航天长宇印刷有限责任公司
总 经 销：湖南省新华书店
开本：787×1092　16开　　印张：14.25　　字数：330千
版次：2005年1月第1版　　印次：2005年1月第1次印刷　　印数：1～5 000册
书号：ISBN 7-81053-888-8/O·59
定价：20.00元

前　言

这套教材是湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会根据教育部最新制定的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》和《高职高专教育专业人才培养目标及规格》编写的高等职业教育规划教材，是高等职业院校各专业的通用教材.

全套书分《高等数学（上册）》、《高等数学（下册）》及《线性代数与概率统计》三册，《高等数学（上册）》内容为函数、极限与连续、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用；《高等数学（下册）》内容为向量代数与空间解析几何、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程、无穷级数、拉普拉斯变换；《线性代数与概率统计》内容为行列式、矩阵、线性方程组、随机事件及其概率、随机变量及其分布、随机变量的数字特征、数理统计初步和数学建模.

本套教材具有以下特点：

(1) 对高等职业教育数学课程体系采用“模块化”编排，选择各专业必需的、共同的数学内容作为基础模块，要求所有专业必修，在基础模块上再设置若干模块，供不同专业教学选用.

(2) 教学内容的选择充分体现学生学习的自主性，不同专业的学生可根据需要选用教材中用 * 号标注的内容；学有余力的学生可自学教材中用小号字体排版的内容.

(3) 教材提出了一些启发性的问题，以培养学生的创新意识和思维能力.

(4) 利用“阅读材料”和“拓展性知识”栏目，介绍有关数学史、数学思想方法、数学应用等方面的内容，拓展学生的知识视野，提高学生的数学文化素养.

本套教材是在湖南省教育厅领导下，由湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会组织普通高等院校专家和高等职业技术学院骨干教师编写的，由湖南师范大学杨向群教授担任总编，湖南省教科院职业与成人教育研究所王江清同志任组编，彭文胜同志任责任编审，本册教材的主编是湖南铁道职业技术学院屈宏香同志，副主编是湖南工业职业技术学院钟莫同志，参编人员是岳阳职业技术学院陈江兵（第 1 章、第 2 章）、钟莫（第 3 章）、湖南商务职业技术学院谢沙金同志（第 4 章）、湖南经济管理干部学院陈宁同志（第 5 章、第 6 章）、永州职业技术学院汤北齐同志（第 7 章）、屈宏香（第 8 章）. 本教材编写完

毕后，湖南省教育厅特聘请以长沙理工大学数学与计算科学学院院长高纯一教授为组长的审定组对书稿进行了认真的审定，审定组的其他人员有：湖南大学教学与计量经济学院黄立宏教授、保险职业学院吴金文教授、湖南师范大学数学与计算机科学学院沈竹副教授、湖南生物机电职业技术学院徐玉林副教授. 审定组对本教材给予了较高评价，并提出了许多宝贵的意见，谨在此表示衷心感谢.

由于成书仓促，不足之处在所难免，欢迎专家和广大师生批评指正.

湖南省职业教育与成人教育教材编审委员会

2005年1月

目　次

第 1 章　行　列　式

行列式是求解线性方程组的重要工具，在数学本身和其他科学中有广泛的应用，本章主要在二阶、三阶行列式的基础上，研究 n 阶行列式的定义及其性质，最后给出利用行列式求解线性方程组的方法——克莱姆(Gramer)法则.

第 1 节　行列式的定义

一　二阶行列式

设二元线性方程组

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2. \end{cases} \tag{Ⅰ}$$

由加减消元法，得

$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_1 = b_1a_{22} - a_{12}b_2,$$
$$(a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})x_2 = a_{11}b_2 - b_1a_{21}.$$

若 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}\neq 0$，得方程组(Ⅰ)的唯一解

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{b_1a_{22} - a_{12}b_2}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}, \\ x_2 = \dfrac{a_{11}b_2 - b_1a_{21}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}. \end{cases} \tag{1-1}$$

为了简便，把式(1-1)中的分母 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 用记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \tag{1-2}$$

来表示，即

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \tag{1-3}$$

记号(1-2)叫做**二阶行列式** $a_{ij}(i=1,2;j=1,2)$称为行列式的**元素**，横排称为行列式的**行**，竖排称为行列式的**列**. a_{ij} 的下标 i 表示它位于自上而下的第 i 行，下标 j 表示它位于从左到右的第 j 列，a_{ij} 是位于行列式第 i 行与第 j 列相交的一个元素. 从左上角 a_{11} 到右下角 a_{22} 的对角线叫做**主对角线**，右上角 a_{12} 到左下角 a_{21} 的对角线叫做**次对角线**. 等式(1-3)的右端 $a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}$ 叫做式(1-2)的**展开式**，即主对角线上两个元素的积减去次对角线上两个元素的积所得的差. 如图 1-1 所示.

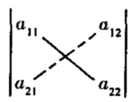


图 1-1

根据二阶行列式的定义，式(1-1)中的两个分子可分别用二阶行列式表示为:

$$\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix} = b_1 a_{22} - a_{12} b_2,$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix} = a_{11} b_2 - b_1 a_{21}.$$

通常用字母 D、D_1、D_2 依次表示这三个二阶行列式：$D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}$，$D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{12} & b_2 \end{vmatrix}$. 则线性方程组(Ⅰ)的解可简单地表示为：

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}. \end{cases} \quad D \neq 0 \tag{1-4}$$

很明显，行列式 D 是由方程组(Ⅰ)中的未知数 x_1，x_2 的系数按原来的位置顺序构成的，我们把它称为方程组(Ⅰ)中的**系数行列式**. 用(Ⅰ)中的常数项代替 D 中的第 j 列就得到行列式 $D_j (j=1,2)$.

例 1 求下列二阶行列式的值：

(1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & a \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} = 2\times3-(-1)\times5=11.$

(2) $\begin{vmatrix} a & 0 \\ c & a \end{vmatrix} = a\times a - 0\times c = a^2.$

例 2 用行列式解二元一次方程组

$$\begin{cases} 3x_1 - 7x_2 = 1, \\ 5x_1 - 4x_2 = 17. \end{cases}$$

解 因为 $D = \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = 3\times(-4)-(-7)\times5 = 23 \neq 0,$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 1 & -7 \\ 17 & -4 \end{vmatrix} = 1\times(-4)-(-7)\times17 = 115,$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 17 \end{vmatrix} = 3\times17-1\times5 = 46.$$

所以，根据公式(1-4)得

$$x_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{115}{23} = 5, \qquad x_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{46}{23} = 2,$$

故原方程组的解是 $\begin{cases} x_1 = 5, \\ x_2 = 2. \end{cases}$

二　三阶行列式

类似于解二元线性方程组，用加减消元法，求得三元线性方程组

$$
\begin{cases}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1, \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \\
a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.
\end{cases} \tag{Ⅱ}
$$

的解为

$$
\begin{cases}
x_1 = \dfrac{b_1a_{22}a_{33} + b_2a_{32}a_{13} + b_3a_{12}a_{23} - b_1a_{23}a_{32} - b_2a_{12}a_{33} - b_3a_{22}a_{13}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\
x_2 = \dfrac{b_1a_{31}a_{23} + b_2a_{11}a_{33} + b_3a_{21}a_{13} - b_1a_{21}a_{33} - b_2a_{13}a_{31} - b_3a_{23}a_{11}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}, \\
x_3 = \dfrac{b_1a_{21}a_{32} + b_2a_{12}a_{31} + b_3a_{11}a_{22} - b_1a_{22}a_{31} - b_2a_{32}a_{11} - b_3a_{12}a_{21}}{a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}}.
\end{cases}
$$

仿照二阶行列式的记法，把分母

$$
a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31} \tag{1-5}
$$

用记号

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \tag{1-6}
$$

来表示，即

$$
D = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{13}a_{22}a_{31}.
$$

记号(1-6)称为**三阶行列式**，式(1-5)称为三阶行列式的展开式. 三阶行列式有 3 行 3 列 9 个元素，其展开式共有 6 项，3 个正项，3 个负项，每项都是 3 个元素的乘积，它们来自不同的行和不同的列. 三阶行列式的展开规则可用画线的方法记忆. 如图1-2.

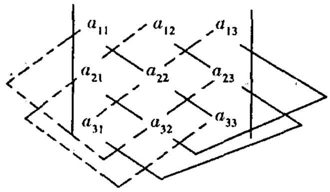


图 1-2

图中各实线联结的三个元素的乘积是展开式的正项，各虚线联结的三个元素的乘积是展开式的负项，这种展开三阶行列式的方法叫做对角线法.

利用三阶行列式，方程组(Ⅱ)的解 x_1, x_2, x_3 的分子可依次表示为

$$
D_1 = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},
$$

$$
D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}.
$$

于是，方程组(Ⅱ)的解可表示为

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{D_1}{D}, \\ x_2 = \dfrac{D_2}{D}, \qquad D \neq 0 \\ x_3 = \dfrac{D_3}{D}. \end{cases} \tag{1-7}$$

注意 D_1, D_2, D_3 中常数列 b_1, b_2, b_3 的位置变化.

例 3 计算下列行列式:

(1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$; (2) $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$.

解 (1) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \\ -3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1\times2\times2+2\times1\times3+(-3)\times(-1)\times(-2)$

$-3\times2\times(-3)-(-2)\times2\times2-1\times1\times(-1)=4+6-6+18+8+1=31.$

(2) $\begin{vmatrix} a & x & y \\ 0 & b & z \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc+0+0-0-0-0=abc.$

主对角线一侧的元素都为零的行列式叫做**三角行列式**. 如例 3 的(2). **三角行列式的值等于主对角线上元素的乘积.**

例 4 求下列行列式的值:

(1) $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix}$; (2) $D'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix}$.

解 $D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & 4 \\ -2 & 0 & 5 \end{vmatrix} = -5-16-6=-27,$

$D'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \end{vmatrix} = -5-16-6=-27.$

想一想 上例中 D 和 D' 中的元素排列有什么联系?

例 5 解三元一次方程组

$$\begin{cases} 2x_1 - 4x_2 + x_3 = 1, \\ x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + x_3 = -1. \end{cases}$$

解 因为

$$D=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -8 \neq 0,$$

$$D_1=\begin{vmatrix} 1 & -4 & 1 \\ 2 & -5 & 3 \\ -1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=11,$$

$$D_2=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}=9,$$

$$D_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 1 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{vmatrix}=6.$$

所以，方程组的解为

$$\begin{cases} x_1=-\dfrac{11}{8}, \\ x_2=-\dfrac{9}{8}, \\ x_3=-\dfrac{3}{4}. \end{cases}$$

三　n 阶行列式

作为定义 n 阶行列式的准备，我们先介绍 n 级排列与逆序的概念.

定义 1　由 $1,2,3,\cdots,n$ 组成的一个有序数组称为一个 **n 级排列**.

例如，2431 是一个四级排列，54321 是一个五级排列.

定义 2　在一个排列中，如果一对数的前后位置与大小顺序相反，即前面的数大于后面的数，那么它们就称为一个逆序，一个排列中逆序的总数称为这个排列的**逆序数**.

例如 2431 中 21，43，41，31 是逆序，2431 的逆序数就是 4.

排列 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数记为 $N(j_1j_2\cdots j_n)$. 如 $N(2431)=4$，$N(54312)=9$.

一个 n 级排列中，逆序数为偶数的叫**偶排列**，逆序数为奇数的叫**奇排列**.

下面我们给出 n 阶行列式的定义.

定义 3　由 n^2 个元素 $a_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$ 组成的记号

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{1-8}$$

称为 n 阶行列式，它等于所有取自不同行不同列的 n 个元素的乘积

$$a_{1j_1}a_{2j_2}\cdots a_{nj_n} \tag{1-9}$$

的代数和. 式(1-9)的符号当行标按自然数顺序排列后，由列标 $j_1j_2\cdots j_n$ 的逆序数确定. 当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为偶排列时，式(1-9)取正号，当 $j_1j_2\cdots j_n$ 为奇排列时，式(1-9)取负号，于是有

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \sum_{j_1 j_2 \cdots j_n} (-1)^{N(j_1 j_2 \cdots j_n)} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n}. \tag{1-10}$$

式(1－10)的右边称为 n 阶行列式的展开式，式中 $\sum\limits_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 表示对所有 n 级排列求和.

n 阶行列式有时简记为 $|a_{ij}|$. 当 $n=2$ 和 $n=3$ 时，就是前面所讲的二阶行列式和三阶行列式，当 $n>3$ 时，称 n 阶行列式为高阶行列式.

二阶行列式的展开式有 2 项，三阶行列式的展开式有 6 项，n 阶行列式的展开项一共有 $n!$ 项.

例 6 求三角行列式

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 5 & -3 \\ 0 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{vmatrix}$$

的值.

解 由定义知，行列式 D 展开一共有 $4!=24$ 项，但它的许多项为零，只有当第一行取 1，第二行取 2，第三行取 3，第四行取 4 时，它们的乘积才不为零，这时行标为 1,2,3,4，列标为 1,2,3,4，为偶排列，因此

$$D = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24.$$

习 题 1－1

1. 计算下列各行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} \cos x & \sin^2 x \\ -1 & \cos x \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} \tan x & a \\ 0 & \cot x \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 2+\sqrt{3} & \sqrt{2}-1 \\ \sqrt{2}+1 & 2-\sqrt{3} \end{vmatrix}$；

(5) $\begin{vmatrix} -1 & 0 & 7 \\ 0 & 3 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$；　　(6) $\begin{vmatrix} a & b & 0 \\ c & 0 & b \\ 0 & c & a \end{vmatrix}$.

2. 选择题

(1) $\begin{vmatrix} -a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & -c_3 \end{vmatrix}$ 的展式中项前面的符号为正的项数是(　　).

(A) 2　　(B) 3　　(C) 4　　(D) 5

(2) 5 阶行列式的展开式中共有(　　)项.

(A) 24　　(B) 60　　(C) 120　　(D) 150

3. 展开下列行列式，并化简.

(1) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & a+b & 1 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} a & ka & x \\ b & kb & y \\ c & kc & z \end{vmatrix}$；

(3) $\begin{vmatrix} a^2 & ab & b^2 \\ 2a & a+b & 2b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$；　　(4) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x^3 \end{vmatrix}$.

4. 判定下列乘积是否是 5 阶行列式 $D=|a_{ij}|$ 的项？若是，试确定该项的正负号.

(1) $a_{32}a_{23}a_{41}a_{12}a_{55}$；　　(2) $a_{51}a_{13}a_{34}a_{25}a_{42}$；

(3) $a_{41}a_{22}a_{35}a_{54}a_{13}$；　　(4) $a_{51}a_{13}a_{34}a_{25}a_{42}$.

5. 用行列式定义计算下列行列式：

(1) $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -3 & 4 \\ 0 & 6 & 1 & 2 \\ 4 & -2 & 2 & 2 \end{vmatrix}$；　　(2) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \\ n & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$.

6. 用行列式解下列方程组：

(1) $\begin{cases} 5x_1+2x_2=0, \\ 3x_1-x_2=0; \end{cases}$　　(2) $\begin{cases} 3x_1-2x_2=3, \\ -4x_1+3x_2=-1; \end{cases}$

(3) $\begin{cases} x_1+2x_2+x_3=0, \\ 2x_1-x_2+x_3=1, \\ x_1-x_2+2x_3=3; \end{cases}$　　(4) $\begin{cases} x_1+2x_2-3x_3=-2, \\ 2x_1-x_2+4x_3=4, \\ x_1+x_2+x_3=1. \end{cases}$

7. 证明

$$\begin{vmatrix} 1 & x & y \\ a & 1 & 0 \\ b & 2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & a & b \\ x & 1 & 2 \\ y & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

第 2 节　行列式的性质

一般来说，利用行列式的定义计算行列式的值是很麻烦的，如计算 4 阶行列式就要算 24 项. 为此，需要通过研究行列式的性质，来简化行列式的计算.

将行列式 D 的行与对应的列依次互换后得到的行列式，称为 D 的**转置行列式**. 记为 D'. 如

$$D=\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix}, \qquad D'=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix}.$$

注意　(1) D'是 D 的转置行列式，D 也是 D'的转置行列式.

(2) D 与 D'中对应位置的元素发生了变化，但主对角线上的元素是不会变的.

根据行列式的定义可以证明：