刘小河 编著

非线性系统分析与控制引论

清华大学出版社

内容简介

非线性系统理论近二十余年来取得了长足的进展，成为非线性科学中最具活力的学科分支之一. 非线性系统的基本理论和分析方法，已成为自动化、电气工程、电子与通信等专业工程技术人员、研究生、大学生应具备的基础之一.

本书根据国内外非线性系统领域的研究进展，并结合作者近年来的研究成果，介绍非线性系统分析的基本理论和非线性系统控制的一些方法. 本书由两部分组成：第一部分介绍非线性系统分析的基本理论和方法，第二部分重点介绍非线性系统的几何理论基础及非线性系统自适应控制的一些方法.

本书可供控制科学与工程、电气工程、机械工程及力学等学科领域研究生作为教学参考书使用，也可供自动化、控制工程、电气工程、机电系统等专业领域的大学生、研究人员和工程技术人员参考.

图书在版编目（CIP）数据

非线性系统分析与控制引论/刘小河编著. —北京：清华大学出版社，2008.4

ISBN 978-7-302-17211-6

Ⅰ. 非…　Ⅱ. 刘…　Ⅲ. 非线性系统（自动化）—系统分析—研究生—教材　Ⅳ. TP271

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 035287 号

责任编辑：刘　颖　王海燕

责任校对：赵丽敏

责任印制：何　芊

出版发行：清华大学出版社　　**地　　址**：北京清华大学学研大厦 A 座

http://www.tup.com.cn　　**邮　　编**：100084

社　总　机：010-62770175　　**邮　　购**：010-62786544

投稿与读者服务：010-62776969，c-service@tup.tsinghua.edu.cn

质 量 反 馈：010-62772015，zhiliang@tup.tsinghua.edu.cn

印 刷 者：北京四季青印刷厂

装 订 者：北京市密云县京文制本装订厂

经　　销：全国新华书店

开　　本：185×230　**印　张**：21　**字　数**：432 千字

版　　次：2008 年 4 月第 1 版　　**印　　次**：2008 年 4 月第 1 次印刷

印　　数：1～4000

定　　价：32.00 元

前言

FOREWORD

近年来，非线性系统理论作为非线性科学的重要学科分支，取得了长足的进展. 非线性系统的基本理论，已经成为自动化、电气工程、电子工程、机械、力学等专业研究生、工程技术人员所必须具备的研究基础之一. 许多高校为研究生或高年级学生开设了非线性系统理论方面的课程，国内外出版了一些很有价值的相关专著，但是，适合于工科背景初学者的参考书还不多见. 本书的目的就是为工科研究生及工程技术人员提供在非线性领域进行研究的入门性参考书.

本书介绍非线性系统分析与控制的基础知识. 全书分为 7 章. 第 1 章为绪论，简要介绍了非线性系统分析与控制的研究内容和方法；第 2 章介绍非线性系统的基本概念；第 3 章为二阶系统；第 4 章为非线性系统的稳定性分析，主要介绍了 Lyapunov 方法；第 5 章为非线性系统的分叉与混沌；第 6 章为非线性系统的微分几何方法基础；第 7 章为非线性系统的自适应控制.

本书在论证方面尽量做到严谨而详尽. 对本书涉及的多数定理，只要不需要过多的数学预备知识时，我们都尽可能地给出了比较详尽的证明. 作者认为，从事非线性科学研究，关键是掌握研究的思路与方法，一些定理的结论只是研究的具体结果. 希望读者在阅读时掌握证明问题的思路，这样对读者以后开展研究工作将会很有帮助. 为避免读者阅读的困难，对一些数学工具(例如泛函分析的基础知识等)给予了简明的介绍. 这样，凡具有大学数学分析、线性代数、自动控制理论基础的读者就可以顺利阅读本书.

本书对非线性系统分析讨论较为详细，其中对二阶系统奇点的分类，极限环及其稳定性，非线性系统的各种稳定性，非线性系统的分叉与混沌等，都作了较为详细的介绍. 在部分章节中也介绍了作者自己的一些相关研究成果. 非线性系统的控制是近年来的研究热点，已经取得很多成果. 但限于篇幅，我们主要介绍了非线性系统几何方法的基础知识及非线性系统的自适应控制问题. 其中非线性系统的自适应控制主要介绍了作者近年来的

一些研究成果.

本书可作为控制科学与工程、电气工程、电子工程、机械工程、力学等学科、专业研究生非线性系统理论课程的教学参考书，也可作为大学高年级学生相关课程的参考教材. 对高校相关专业的专业教师和从事非线性系统研究的工程技术人员，本书也具有较大的参考价值.

本书所涉及的作者本人的研究工作得到了国家自然科学基金、北京市教委科技发展基金、北京市创新拔尖人才项目的资助. 在此向国家自然科学基金委员会、北京市教育委员会表示衷心的感谢.

在本书的编写和出版过程中，得到了北京市教委重点建设学科建设项目基金的资助，并得到了清华大学出版社的大力支持，对此作者表示诚挚的感谢.

限于作者水平和能力，书中谬误之处在所难免，恳请各位专家、学者、读者给予批评指正.

刘小河

2007 年 9 月于北京望京

目录

CONTENTS

第 1 章　绪论 …… 1

1.1　非线性系统的特点 …… 1

1.2　非线性系统分析与控制的研究内容和方法 …… 2

1.2.1　非线性系统分析的研究内容和方法 …… 3

1.2.2　非线性系统控制的研究内容和方法 …… 4

1.3　数学基础 …… 7

1.3.1　线性空间 …… 7

1.3.2　函数与映射 …… 15

1.3.3　算子及其范数 …… 19

第 2 章　非线性系统的基本概念 …… 21

2.1　非线性系统的描述 …… 21

2.2　状态方程解的存在性和唯一性 …… 26

2.2.1　基本概念 …… 26

2.2.2　不动点定理 …… 29

2.2.3　存在唯一性定理 …… 31

2.3　非线性自治系统的轨线及平衡状态 …… 36

2.4　非线性系统的无源性 …… 39

第 3 章　二阶系统 …… 43

3.1　相平面法 …… 43

3.1.1 相平面 …… 44
3.1.2 等倾线法 …… 46
3.1.3 Liénard 法 …… 48
3.2 奇点附近轨线的性质 …… 50
3.2.1 二阶线性自治系统奇点的分类 …… 50
3.2.2 非线性自治系统奇点的分类 …… 59
3.3 周期和极限环 …… 69
3.3.1 极限环的概念 …… 69
3.3.2 极限环的存在性 …… 72
3.3.3 极限环的稳定性 …… 78
3.3.4 Poincaré 指数 …… 81
3.4 近似解析法 …… 83
3.4.1 摄动法 …… 84
3.4.2 平均法 …… 88

第 4 章 非线性系统的稳定性 …… 95

4.1 稳定性的基本定义 …… 96
4.2 Lyapunov 直接法的基本定理 …… 104
4.2.1 V 函数的定义及其性质 …… 105
4.2.2 Lyapunov 直接法的几何思想 …… 107
4.2.3 自治系统的 Lyapunov 第二方法 …… 108
4.2.4 指数稳定性和全局稳定性 …… 118
4.2.5 非自治系统的 Lyapunov 第二方法 …… 120
4.3 按首次近似决定稳定性 …… 125
4.3.1 线性自治系统的稳定性 …… 126
4.3.2 按首次近似决定稳定性 …… 132
4.3.3 应用举例 …… 137
4.4 Lyapunov 直接法的推广 …… 139
4.4.1 Lasalle 不变原理 …… 140
4.4.2 控制系统的绝对稳定性 …… 146
4.4.3 控制系统的超稳定性 …… 153
4.5 输入-输出稳定性 …… 158
4.5.1 L_p 空间的延拓 …… 158
4.5.2 输入-输出稳定性的定义 …… 160

4.5.3 输入-输出稳定性与 Lyapunov 稳定性之间的关系 …… 163
4.6 Lyapunov 函数的构造和吸引域的估计 …… 166
4.6.1 特殊类型自治系统的 Lyapunov 函数 …… 166
4.6.2 Clasurfsky 方法 …… 168
4.6.3 变量梯度法 …… 169
4.6.4 Lyapunov 函数的递推设计 …… 171
4.6.5 吸引域的估计 …… 173
4.7 非线性系统稳定性分析实例 …… 174
4.7.1 连续非对称网络的全局稳定性 …… 174
4.7.2 一类非线性控制系统的全局稳定性 …… 177

第 5 章 非线性系统的分叉与混沌 …… 183

5.1 动力系统基础 …… 183
5.1.1 动力系统与流形 …… 183
5.1.2 线性化流与双曲性 …… 186
5.1.3 中心流形定理 …… 191
5.1.4 离散动力系统与 Poincaré 映射 …… 195
5.2 非线性系统的分叉 …… 199
5.2.1 结构稳定性和分叉的概念 …… 199
5.2.2 静态分叉 …… 201
5.2.3 Hopf 分叉 …… 206
5.2.4 其他分叉简介 …… 215
5.3 非线性系统的混沌 …… 217
5.3.1 非线性系统的混沌的概念 …… 217
5.3.2 混沌运动的识别方法 …… 222
5.3.3 映射的混沌行为 …… 226
5.3.4 Lorenz 系统 …… 229
5.4 混沌的控制 …… 234
5.4.1 OGY 控制方法 …… 234
5.4.2 VFC 控制法 …… 235
5.4.3 OPF 技术 …… 236

第 6 章 非线性系统的微分几何方法基础 …… 238

6.1 向量场的 Lie 导数及分布 …… 238

6.1.1 向量场的 Lie 导数 …… 239
6.1.2 分布 …… 242
6.1.3 Frobenius 定理 …… 244
6.2 非线性控制系统的局部分解 …… 246
6.2.1 非线性控制系统局部分解 …… 247
6.2.2 非线性系统的局部能控性和可观性 …… 250
6.3 非线性系统的精确线性化 …… 253
6.3.1 反馈线性化的基本概念 …… 254
6.3.2 状态空间的局部坐标变换 …… 256
6.3.3 非线性系统的反馈线性化 …… 261
6.4 渐近跟踪与扰动解耦 …… 273
6.4.1 渐近输出跟踪 …… 273
6.4.2 扰动解耦 …… 276

第 7 章 非线性系统的自适应控制 …… 278

7.1 线性系统的模型参考自适应控制 …… 279
7.1.1 模型参考自适应控制系统的设计问题 …… 279
7.1.2 基于 Lyapunov 稳定性理论的设计方法 …… 280
7.1.3 基于超稳定性理论的设计方法 …… 282
7.1.4 自适应模型跟随控制系统 …… 290
7.2 一类单输入-单输出非线性系统分段线性化自适应控制 …… 294
7.2.1 基于 Lyapunov 理论的分段线性化自适应控制 …… 295
7.2.2 基于超稳定性理论的分段线性化自适应控制 …… 299
7.2.3 仿真实例 …… 304
7.3 一类多输入-多输出非线性系统的自适应模型跟随控制 …… 309
7.3.1 系统的描述 …… 310
7.3.2 基于 Newton 迭代法的非线性系统的模型跟随控制 …… 311
7.3.3 非线性系统的自适应模型跟随控制 …… 313
7.3.4 仿真实例 …… 315
7.4 基于后推法的非线性系统自适应控制 …… 317

参考文献 …… 324

第1章 绪论

一切实际存在的系统都或多或少地具有非线性.有些非线性是系统本身所固有的,例如机械手的控制必须考虑各关节之间的非线性耦合,许多工业过程具有非线性的特性.而有些非线性系统(如通信系统、电力电子系统等)则常常要利用电子器件的非线性来达到设计要求.近年来得到飞速发展的神经网络系统,更是一个本质非线性的大规模非线性系统.因此,对非线性系统进行深入的分析,并研究对其进行控制的方法,具有十分重要的意义.虽然目前在非线性系统理论的研究中尚有许多问题亟待解决,但这一理论本身已经取得了许多重要成果,形成了一个内容相当广博的学科.

本章简单介绍非线性系统的特点,重点介绍非线性系统理论的主要研究内容及研究方法.对后续章节所用到的基础数学知识,作简洁而实用的介绍.

1.1 非线性系统的特点

当系统的运动规律可以用线性微分方程或线性算子来描述时,该系统称为线性系统.线性系统的一个基本性质是它满足叠加原理,由此产生了线性系统理论的基本分析方法:如时域中的卷积,频域和复频域中的传递函数方法等.

如果系统中至少含有一个非线性的环节或单元时(例如电路系统中的非线性电路元件,控制系统中的非线性环节等),系统的运动规律将要由非线性微分方程或非线性算子来表征,我们称之为非线性系统.与线性系统相比,非线性系统具有如下特点.

1. 非线性系统不满足叠加定理

是否满足叠加原理是线性系统和非线性系统的最主要区别.对于线性系统,由于可以使用叠加原理,使系统的分析较为简单,小信号和大信号作用下的结果在基本性质上是一

致的，系统的局部性质与全局性质是一致的. 但由于非线性系统不满足叠加原理，因此线性系统中一系列行之有效的分析方法在非线性系统中不再适用，必须另辟途径.

2. 非线性系统的解不一定唯一存在

当考察非线性系统的稳态性质时，其系统的特性由一组非线性代数方程来描述. 这组方程可能有唯一解，可能有多个解，还可能根本无解. 因此，在求解之前，应该对系统的解的性质进行判断. 如果解根本不存在，求解它就没有任何意义；如果解存在但不唯一，就应对解的个数及位置在求解之前有一个大致的了解.

非线性动态系统的特性一般由一组非线性微分方程或状态方程来描述. 对一个实际系统来说，它在一定初始条件下的解应该存在并且唯一. 但由于系统的方程总是在对实际对象进行了某些简化或近似后而得到的，因此，这组方程不一定存在唯一解. 对于不存在唯一解的非线性系统模型，用计算机来求其近似解就失去了意义.

3. 非线性系统平衡状态的稳定性问题

线性系统一般存在一个平衡状态，并且很容易判断系统的平衡状态是否为稳定的. 而非线性系统往往存在多个平衡状态，其中有些平衡状态是稳定的，有些平衡状态则是不稳定的. 工程中常常需要确定解的稳定区和不稳定区的分界线，有时还需要研究某些参数变化时解的稳定性的变化规律.

4. 非线性系统的一些特殊现象

非线性系统中常常会发生一些奇特的现象，这些非线性现象在过去和现在一直是非线性理论的重要研究课题，促进了非线性理论的研究和发展. 例如非线性自治系统的自激振荡，周期激励作用下非线性系统的次谐波振荡和超次谐波振荡；激励频率连续变化时，系统幅频响应的跳变现象；分叉现象，即系统解的形式因为参数的微小变动而发生本质的改变的现象；对于某些非线性系统，还会出现类似于随机系统出现的现象，即混沌现象. 分叉、混沌现象的研究大大丰富了非线性系统的理论，促进了系统科学的发展.

1.2 非线性系统分析与控制的研究内容和方法

非线性系统理论的研究内容是十分广泛的，非线性系统分析是非线性系统理论的基础，非线性系统的控制则是非线性系统理论的重要应用方向之一. 下面我们简要介绍非线性系统分析与控制的主要研究内容和方法.

1.2.1　非线性系统分析的研究内容和方法

非线性系统分析是对给定的非线性系统采用一定的数学工具进行定性及定量的分析研究，得出系统的局部和全局特性. 由于非线性微分方程一般不存在闭式解，故非线性系统目前还不存在统一的分析方法. 从研究内容来看，非线性系统分析研究的内容和方法大体可分为二阶系统相平面方法和近似解析方法，高阶系统的定性分析，基于 Volterra 级数的非线性系统的频域方法，非线性系统的稳定性，非线性系统的特殊现象，非线性系统的分叉和混沌等.

1. 二阶系统的分析方法

对于二阶系统，通常采用相平面法进行分析. 相平面法本质上是一种几何作图法，所用数学工具简单，可以看到系统特性的全貌，适合于定性分析. 缺点是不够准确，且仅能应用于二阶系统.

近似解析法使用范围较为广泛，但一般用于研究具有“缓变”特点的非线性振荡系统，在一定范围内可以得到较准确的解答. 主要方法有摄动法、慢变参数法、多尺度法、谐波平衡法等. 这些方法的主要缺点是计算较为复杂，主要应用于二阶系统，很难应用于高阶系统.

2. 高阶系统的定性分析

高阶系统的定性分析来源于对动力学问题常微分方程的定性研究，即动力系统的理论. 它可以视为二阶系统定性分析方法向高阶系统的推广. 动力系统理论研究系统的轨线的拓扑性质，研究系统随时间演化过程中系统的全局定性行为. 其中，平衡点附近轨线的拓扑性质，周期轨道等不变集的性质是研究的重点内容.

3. 基于 Volterra 级数的非线性系统的频域方法

弱非线性系统的 Volterra 级数方法在 20 世纪 80 年代以来取得了长足的进展. 这种方法适用于相当广泛的一大类弱非线性系统，可以对该类非线性系统进行频域分析，使得人们像使用 Laplace 变换分析线性系统那样，使用基于 Volterra 级数的非线性传递函数分析一般的非线性系统. Volterra 级数方法已在非线性系统的频率响应、系统建模、灵敏度分析、失真分析和 Hopf 分叉等方面获得了广泛的应用，成为分析非线性动态系统的一种有力方法.

4. 非线性系统的稳定性分析

任何实际的系统在工作时都必须考虑“稳定性”问题，只有稳定的系统才能保证系统

在受到扰动后仍然能恢复到系统原来的工作状态，所以稳定性问题一直是非线性系统研究的重点内容之一.

Lyapunov 意义下的稳定性是非线性系统稳定性分析的主要理论依据. 此外，绝对稳定性、输入-输出稳定性、大系统的稳定性等方法都在非线性系统稳定性分析中得到应用.

非线性系统的稳定性分析研究的内容主要包含以下几方面的内容：①平衡点的稳定性，包含平衡点的局部稳定性和大范围稳定性. ②周期解的稳定性，主要是极限环的稳定性. ③轨线结构的稳定性，这一类问题与分叉等问题密切相连. 稳定性研究中还有许多问题亟待解决.

5. 非线性振荡系统的特殊现象

非线性振荡系统的特殊现象是非线性系统经典理论研究的主要内容之一. 研究非线性系统的许多经典方法是在研究非线性振荡系统的过程中提出来的，非线性振荡系统的特殊现象如自激振荡、次谐波振荡、高次谐波振荡、同步现象、非同步激励现象、拟周期振荡等引人入胜的现象曾在过去的几十年中激励了众多的学者、专家对此进行研究，对它们的研究大大丰富了经典的非线性系统分析的理论. 现在，人们往往将这部分内容作为非线性系统理论的入门教程之一.

6. 非线性系统的分叉和混沌

分叉与混沌现象的研究自 20 世纪 70 年代后期以来得到非线性科学工作者的普遍重视，成为当代科学研究的热点之一. 20 世纪 80 年代以来，不断地有在一些简单的非线性电路与系统中发现分叉及混沌现象的报道，这说明在非线性系统中，混沌现象是一个比较普遍的现象.

“分叉”这一概念是 Poincaré 首次提出的，他用这一术语来描述微分方程组平衡点的“分裂”现象. 所谓混沌现象，通俗地讲是指具有整体稳定性的耗散系统由于其内部的不稳定性而出现的貌似随机系统的现象. 混沌系统具有对初始条件的极度敏感依赖性，而系统的轨道又只能在有限范围内运动，这样就造成了轨道在有限的空间内缠绕往复而形成非常复杂的形状. 一个非线性系统常通过倍周期分叉和准周期分叉的道路而走向混沌，因此分叉和混沌的研究是紧密联系的.

分叉和混沌的研究以动力系统理论为数学基础，涉及的数学工具较为艰深. 其研究方法主要有拓扑学方法(如 Cantor 集合、分形几何、奇怪吸引子等)、数学分析方法(如 Melnikov 方法和 Smale 马蹄映射等)、数值方法(如功率谱法、Lyapunov 指数等)、实验方法等.

1.2.2 非线性系统控制的研究内容和方法

对非线性系统进行控制时，从研究问题的提法和解决问题的方法都与不考虑控制时

非线性系统的分析有了很大的不同. 控制系统的最大的特点在于存在反馈,通常反馈可以由系统的状态构成(称为状态反馈),或系统的输出构成(称为输出反馈). 控制系统的基本问题就是系统在何种条件下可以通过反馈的选取及设计控制器来保证系统的稳定性,并实现一定的性能指标的要求. 早期的非线性控制系统的研究是针对一些特殊的、基本的非线性特性(如继电、饱和、死区等),研究合适的控制方法以得到较为理想的性能. 20 世纪 80 年代以来,随着非线性系统理论的发展,产生了许多非线性系统控制的方法. 应当指出,由于非线性控制系统的复杂性,目前还没有分析设计非线性控制系统的通用方法,已有的各种方法均有一定的适用范围. 下面仅就有代表性的方法作一简单介绍.

1. 描述函数法

描述函数法是 20 世纪 40 年代末提出的非线性系统控制的一种工程近似方法,这种方法适合于一类具有低通滤波特性的非线性系统. 对于具有非线性部件的控制系统,当输入为正弦信号时,输出将含有高次谐波. 但是对于具有低通滤波特性的非线性系统,高次谐波对系统的影响较小. 因此,人们设想用非线性部件的基波特性来近似代替该部件,这样就可以用线性系统的频域分析方法来分析非线性系统. 描述函数法可用来分析非线性系统的稳定性和自持振荡问题,也可以用来进行非线性控制系统的综合.

2. 变结构控制

变结构控制是目前非线性控制系统较普遍的一种控制方法. 所谓变结构控制系统,就是系统在工作时可以根据某种规则,在若干个控制器之间来回切换,以改善系统的动态性能. 这是一种有跳变的不连续系统,即使控制对象和各个控制器都是线性的,整个系统也是一种本质非线性系统. 构造变结构控制器的核心是滑动模态的设计,即切换函数的选择算法. 对于线性控制对象,滑动模态的设计已有了比较完善的结果,对于某些非线性控制对象,也提出了一些控制方法. 滑动模态控制有许多优点: 第一,只要切换面是可达的,一旦系统的相点到达切换面后,系统的运行方式就只决定于切换面的方程,与系统原来的参数无关. 第二,滑模控制可以实现对任一连续变化的输入信号的跟踪. 第三,滑模控制对外部干扰具有较强的鲁棒性. 滑模控制也存在一些不足,主要是当切换开关不理想时,会产生高频颤动. 除此之外,为实现滑模控制,必须得到系统全部状态变量的信息,这在许多场合是比较困难的. 变结构控制在某种意义上体现了一定的"智能"功能,具有较好的发展前景.

3. 非线性系统的镇定

稳定性是控制系统的基本问题,一个控制系统首先必须是稳定的,然后才可以考虑其他动态及稳态指标. 当系统的控制作用仅由反馈决定时,如何寻找反馈使得系统为稳定就

称为镇定. 对于线性系统，镇定问题已得到完全解决. 对于非线性系统，由于其能控性和可镇定性之间的关系是不明显的，虽然已经提出许多方法来解决某些非线性系统的全局镇定问题，但是，一般非线性系统的镇定问题还存在一些难点，还有许多亟待解决的问题.

4. 非线性系统的微分几何方法

对于线性系统，其能控性、能观性以及系统的可控分解和可观测分解是线性系统的基本性质，相应地，我们有明显的判别条件来判断系统是否具备这些性质. 那么，对于非线性系统，是否还具有诸如能控性、能观性这样一些性质？近年来发展起来的非线性系统的微分几何方法，从几何的角度，研究了一类具有仿射非线性的控制系统的能控性、能观性等基本性质. 这些研究有利于揭示非线性系统的某些本质特性. 不过，非线性系统能控性、能观性还没有找到像线性系统那样简明而易于使用的判别条件. 利用微分几何方法，对非线性系统的反馈线性化问题，取得了很好的结果，并且在一些实际系统的控制中得到了应用. 然而，能实现反馈线性化的非线性系统总是少量特定的一类非线性系统，因此，非线性系统的微分几何方法所能解决的问题是十分有限的.

5. 非线性系统的鲁棒控制

控制系统的设计要以被控系统的数学模型为依据. 然而，由于种种原因，被控对象总是存在着不确定性或摄动. 这些不确定性包含参数不确定性、结构不确定性和各种干扰等，一般来说，这些不确定性或摄动是无法确切知道的. 因此，从研究的角度来看，我们面对的对象不是一个单一的对象，而是一族对象. 这样就必须用一类系统族来描述实际系统. 所谓鲁棒性，就是所设计的控制系统对于具有不确定性的系统族仍然可以正常工作，如保证稳定性，并仍能保持较好的系统动态性能等. 随着控制对象的日益复杂，环境的多变，大量的不确定因素的存在，研究控制系统的鲁棒控制显得日益重要，成为现代控制理论中的一个重要研究方向.

线性系统的鲁棒控制已有了不少理论成果，其中，线性系统的 H_∞ 控制的理论体系已经建立，其应用研究也取得了许多成果. 对于非线性控制系统，鲁棒性分析与设计提出了多种方法. Lyapunov 方法是早期研究鲁棒稳定性采用的主要方法，但是其结果偏于保守. 近年来，一些学者将基于非线性系统的无源性、耗散性及增益分析等方法应用于非线性控制系统的鲁棒分析与设计，提出了许多鲁棒镇定、鲁棒干扰抑制、鲁棒自适应控制的设计方法. 由于非线性系统的复杂性，非线性控制系统的鲁棒分析和设计还存在很多困难，是一个具有很强的挑战性的课题.

作为导论性质的读物，我们主要介绍非线性系统分析的基本理论和分析方法，对于非线性系统的控制，则主要介绍非线性系统的微分几何方法及作者研究中涉及的一类非线性系统的自适应控制方法，以便为读者进行非线性系统的研究打下初步的基础.

1.3 数学基础

在非线性系统的分析过程中，常常要应用一些基本的数学工具来说明问题，其中包含泛函分析、稳定性的数学理论、微分方程的定性分析等内容. 本节主要对泛函分析的一些基本内容作一简单介绍，以后相关章节还将就要用到的数学工具进行简要介绍. 应该说明的是，我们的主要目的是利用现代数学工具及相应结论来分析非线性系统的实际问题，因此仅引述相关的定义、定理而不作详细论证. 为了理解有关定理和结论，我们通过一些例子来说明.

1.3.1 线性空间

1. 线性向量空间

定义 1.1 设 L 为一个集合，假如在 L 中规定了线性运算——元素的加法运算以及实（复）数与 L 中元素的乘法运算，满足下列条件：

(1) L 关于加法成为交换群. 即 $\forall x,y\in L$，都存在 $u\in L$，记 $u=x+y$，称 u 是 x,y 的和，这个运算满足：

① $x+y=y+x$（加法交换律）；

② $(x+y)+z=x+(y+z)$，$\forall x,y\in L$（加法的结合律）；

③ L 中存在唯一的元素 O_L（称它为零元素. 若从上下文中看，O_L 是清楚的，可用 0 表示），使得

$$x+O_L=O_L+x=x,\quad \forall x\in L \quad \text{（加法恒等式成立）；}$$

④ 对每一个 $x\in L$，存在一个元素，用 $-x$ 表示，使得

$$x+(-x)=O_L.$$

(2) 对任何 $x\in L$ 及任何实数（或复数）α，存在元素 $\alpha x\in L$，称 αx 是 α 和 x 的标量乘积，这个运算满足：

① $1\cdot x=x$；

② $a(bx)=(ab)x$，a,b 是实数（或复数）；

③ $(a+b)x=ax+bx$，a,b 是实数（或复数）；

④ $a(x+y)=ax+ay$，a 是实数（或复数）.

那么称 L 为线性实（复）向量空间，L 中的元素称为向量.

我们通过几个例子来说明上述的定义.

例 1.1 考虑 n 维空间 $\mathbb{R}^n$，其中的向量 $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}$ 是由 n 个有序的实数构成，即 $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)$，$\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\cdots,y_n)$，定义

$$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,\cdots,x_n+y_n),$$
$$\alpha x=(\alpha x_1,\alpha x_2,\cdots,\alpha x_n),\quad \alpha \text{ 为实数},$$

那么,$\mathbb{R}^n$ 成为实线性向量空间. 换句话说,两个 n 维向量之和可通过各个分量分别相加而得到,而一个实数与一个 n 维向量之积可以通过此实数与 n 维向量的各个分量逐个相乘而得到.

例 1.2 设 $F[a,b]$代表定义于$[a,b]$区间上所有实值函数的集合. $F[a,b]$中的代表性元素就是将$[a,b]$映射到实数集合$\mathbb{R}$ 的函数 $f(\cdot)$. 定义函数的和及函数与数的积如下:对于 $t\in[a,b]$,令

$$(f+g)(t)=f(t)+g(t),\quad f(\cdot),g(\cdot)\in F[a,b],$$
$$(\alpha f)(t)=\alpha f(t),\quad f(\cdot)\in F[a,b],\alpha \text{ 是实数}.$$

显然对任意 $f(\cdot),g(\cdot)\in F[a,b]$,给定任意实数 α,β 时有

$$\alpha f(t)+\beta g(t)\in F[a,b],$$

因此 $F[a,b]$就成为实线性向量空间.

例 1.3 设 $L[y]=\dfrac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}t^n}+\alpha_1\dfrac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}t^{n-1}}+\cdots+\alpha_{n-1}\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\alpha_n y=0$ 是一常系数线性微分方程. R 表示方程 $L[y]=0$ 的解的全体所组成的集合,则 R 是一个线性空间.

事实上,由微分方程解的性质我们知道,对于常系数线性微分方程,如果 y_1,y_2 分别是 $L[y]=0$ 的解,则 $y_1(\cdot)+y_2(\cdot)$也是 $L[y]=0$ 的解. 其次,若 $y(\cdot)$是 $L[y]=0$ 的解,则对任意给定数 α,$\alpha y(\cdot)$也是 $L[y]=0$ 的解. 故 R 为一线性空间. 最后,由于 $L[y]=0$ 仅有 n 个线性无关的解,故 R 为一 n 维向量空间.

下来我们介绍子空间的概念. 设 L 是一个线性向量空间,V 是 L 的一个子集合,如果对任意 $x,y\in V$,有 $x+y\in V$,且对任何数 α,$\alpha x\in V$,那么 V 称为 L 的一个线性子空间,简称子空间.

显然 L 的任何线性子空间本身也是一个线性空间.

例 1.4 设 $F[a,b]$定义同例 1.2,取 $t_0\in[a,b]$,并令 $F_{t_0}[a,b]$表示 $F[a,b]$中使 $x(t_0)=0$ 的所有 $x(\cdot)$组成的子集合,则不难验证,$F_{t_0}[a,b]$是 $F[a,b]$的一个子空间.

线性空间的概念是从 n 维欧氏空间抽象得来的. 众所周知,n 维欧氏空间的概念又是从平面与空间几何中点或向量的坐标化抽象并推广得来的. n 维欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 的含义当然比人们日常生产中所能体验的直线、平面等要广泛得多,但在$\mathbb{R}^n$ 中不通过坐标原点的超平面却不能称为它的子空间. 线性空间比$\mathbb{R}^n$ 又更加广泛了,同理,它不可避免地失去欧氏空间$\mathbb{R}^n$ 所具有的某些熟知的性质,例如向量的长度,空间中两点间的距离等,这些性质在定义 1.1 中没有论及. 因此在上述线性向量空间中,人们无法讨论收敛性和连续性,邻域、点集的内点等概念,这就促使人们去研究线性赋范空间,它基本上是一个可度量向量"长度"的线性向量空间.

2. 线性赋范空间

首先介绍空间中两点距离的概念. 欧氏空间$\mathbb{R}^n$中两点的距离已为大家熟悉,它的定义为

$$\rho(x,y)=[(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\cdots+(x_n+y_n)^2]^{\frac{1}{2}}. \tag{1.1}$$

距离$\rho(x,y)$具有如下性质:

(1) $\rho(x,y)\geqslant 0$,当且仅当$x=y$时,$\rho(x,y)=0$;

(2) $\rho(x,y)\leqslant\rho(x,z)+\rho(y,z)$.

性质(2)就是人们熟知的三角不等式.

对连续函数族也可以定义距离的概念. 设$C[a,b]$是区间$[a,b]$上全体连续函数的集合,对$x(\cdot),y(\cdot)\in C[a,b]$,记

$$\rho(x,y)=\max_{t\in[a,b]}|x(t)-y(t)|, \tag{1.2}$$

则不难验证,$\rho(x,y)$也具有上面所指出的两个性质. 我们称式(1.2)所定义的$\rho(x,y)$为函数空间$C[a,b]$中两点x,y间的距离.

线性空间中两个向量之间的距离通过范数来确定,我们首先给出范数的定义.

定义 1.2　设L是实(或复)线性空间,$\|\cdot\|$是定义在L上的一个实值函数,即对每一个$x\in L$,有一个实数$\|x\|$与之对应,使得

(1) $\|x\|\geqslant 0$,当且仅当$x=O_L$时,$\|x\|=0$;

(2) $\|\alpha x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$,$\alpha$为一数;

(3) $\|x+y\|\leqslant\|x\|+\|y\|$,$\forall x,y\in L$(三角不等式).

则称$\|\cdot\|$是L上的范数,而L按这个范数$\|\cdot\|$称作线性赋范空间.

显然,定义 1.2 中的范数是$\mathbb{R}^n$中向量长度的概念的自然推广. 因此,在线性赋范空间L中,给定一个向量x,则$\|x\|$可以认为是向量x的长度. 但范数比向量长度有更广泛的含义. 例如对线性空间$\mathbb{R}^n$中的任意向量$\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\cdots,x_n)^{\mathrm{T}}$,不但可以像我们所熟知的那样定义

$$\|\boldsymbol{x}\|=(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}} \tag{1.3}$$

为$\boldsymbol{x}$的范数(通常称之为欧氏范数,记为$\|\boldsymbol{x}\|_2$),而且也可以定义

$$\|\boldsymbol{x}\|_1=\sum_{i=1}^{n}|x_i| \quad \text{或} \quad \|\boldsymbol{x}\|_\infty=\max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|. \tag{1.4}$$

因为后两种定义也同样满足定义 1.2 中的 3 条性质. 我们称$\|\cdot\|_1$为 1 范数,$\|\cdot\|_\infty$为∞范数. 更一般地,我们定义$\mathbb{R}^n$中的$\|\cdot\|_p$: $\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$为

$$\|\boldsymbol{x}\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|\right)^{\frac{1}{p}}, \quad p\geqslant 1. \tag{1.5}$$

当$p=1$时,就为 1 范数; 当$p=2$时,为欧氏范数; 当$p=\infty$时,为∞范数.