# 高等代数

主编 袁秉成

东北师范大学出版社

# 高等代数

# 高　等　代　数

主编：袁秉成

东北师范大学出版社

(吉)新登字12号

高　等　代　数

GAODENG DAISHV

主编：袁秉成

责任编辑：李殿国　　封面设计：张沐沉　　责任校对：袁秉成

东北师范大学出版社出版　　吉林省新华书店发行
(长春市斯大林大街110号)　　吉林工学院印刷厂制版
(邮政编码：130024)　　吉林工学院印刷厂印刷

开本：850×1168毫米 1/32　　1992年8月第1版
印张：13.5　　1992年8月第1次印刷
字数 330千　　印数：0 001—3 000册

ISBN 7-5602-0701-4/O·64　　(压膜)定价：7.00元

# 前　　言

本书按照国家教育委员会规定的高等师范院校高等代数教学大纲内容的要求，参考东北师范大学数学系多年自编教材编写而成.

本书在内容选取上，体系安排上，叙述方式上，编者做了一些探索，并结合编者多年的教学经验及部分研究工作，增加了一些新内容，使高等代数的知识结构更趋于合理. 具有下面几方面的特点.

**一、内容方面**

1. 精选了整数的因数分解理论.

2. 强化了矩阵及其标准形理论.

3. 舍弃了传统的现行教材中用 8 条公理定义的线性空间，而采用了用 7 条公理定义线性空间的方法，使知识更科学，更合理.

4. 在教材中我们提出了化二次型为标准形的三角形方法，使实际计算量减少一半，同时又可减少讲义叙述篇幅.

**二、体系安排方面**

1. 将整数的因数分解与一元多项式理论分别安排在一、二两章. 这是我们这本教材区别传统的同类高等代数教材的一个特点. 因为整数的因数分解学生易于接受，多项式理论大部分与它平行，所以在第一章基础上学习多项式并不感到困难. 经过多年的教学实践的体会，我们感到这样安排不仅有利于学生

的理解和接受，同时又避免了多项式后移造成的知识割裂，使后面的知识更系统化.

2. 矩阵标准形一章安排在线性变换之后，把线性变换标准形与矩阵的标准形融为一体用矩阵语言叙述，这样做可以突出和强化矩阵，同时又不使内容重迭，这是我们在教材改革上的又一新探索.

3. 二次型安排在线性空间之后，目的是要使读者不仅会化标准形，同时知道对二次型化标准形就是寻找该二次型在一个特殊基底上的对角形的表示矩阵.

4. 我们认为用高等代数切实地指导中学数学教学，是摆在我们面前的一个历史任务. 因此在内容的选取上，我们选进了与中学数学关系较密切的部分，如整数的因数分解理论，有理系数多项式的有理根的求法等.

5. 语言叙述上力求做到既通俗易懂又少而精. 尽管本书包含内容较多，但篇幅不长.

6. 本书十分重视矩阵的作用. 矩阵这一重要工具在实际问题中有广泛应用，在教材中的许多地方，用矩阵处理不仅直观，容易接受，而且篇幅少，在本教材中能够充分观察到用矩阵处理的优势.

7. 本书注意了理论联系实际. 高等代数是门基础课，我们注意了高等代数知识在其它学科及实际问题中的应用. 如二次型理论在确定极值方面的应用等.

8. 书中少数画*号的地方，表示该内容难度较大，可根据具体情况酌情删减.

本书第三章、第十章由谷文祥编写，第七章、第十二章由王仁发编写，第八章由张永正编写，第九章由游宏编写，其余六章由袁秉成编写. 全书最后由袁秉成修改、定稿.

限于编者水平，书中不当和错误之处在所难免，我们热诚

希望使用本教材的老师和同学们提出批评指正.

编者

1990 年 6 月

# 目　　录

# 第一章　数的基础知识

为了后面学习的需要，本章主要讲三个问题.

1. 自然数与数学归纳法；

2. 整数的整除性；

3. 数域.

## §1　自然数与数学归纳法

所谓自然数就是

$$1、2、3、\cdots\cdots,n, \qquad (1)$$

我们把自然数的全体做成的集合用N表示.

**命题1**　（最小数原理）任意一个自然数集的非空子集必有最小数.

事实上　设M是自然数集N的一个非空子集.在M中任取一个数$m$，由于N中从1到$m$共有$m$个自然数，所以M中不超过$m$的自然数最多有$m$个.因为这是有限个数，所以其中有一个最小数，用$r$表示这个最小数.于是$r$对于M中不超过$m$的自然数来说是最小的，而M中其余的数都比$m$大，因而更比$r$大，所以$r$是M中的最小数.证完.

最小数原理是自然数集中的一个特殊属性.正分数集，整数集都没有这个特性.下面来介绍数学归纳法.

**定理1**　（第一数学归纳法原理）：设有一个与自然数$n$有

**关的命题. 如果**

**(1)当 $n=1$ 时命题成立;**

**(2)假设 $n=k(k\geqslant 1)$ 时命题成立,则 $n=k+1$ 时命题也成立;**

**那么这个命题对于一切自然数 $n$ 都成立.**

**证明** 用反证法,假设命题不是对一切自然数都成立. 令 M 表示使命题不成立的自然数所组成的集合. 显然 $M\neq\phi$. 于是根据最小数原理,M 中有最小数 $r$,由条件(1)可知 $r\neq 1$. 因而 $r-1$ 是一个自然数. 由于 $r$ 是 M 中最小数,所以 $r-1\overline{\in}M$. 这就是说,命题对于 $r-1$ 来说成立. 再由条件(2)知,命题对于 $r$ 也成立,与 $r\in M$ 矛盾. 故命题对一切自然数都成立,证完.

**例 1** 证明等式

$$1+r+r^2+\cdots+r^{n-1}=\frac{1-r^n}{1-r}(r\neq 1), \qquad (1)$$

对一切自然数 $n$ 都成立

**证明** 当 $n=1$ 时,(1)式左右两边均为 1,故等式成立.

假设对 $n=k$ 时,等式(1)成立,即

$$1+r+r^2+\cdots+r^{k-1}=\frac{1-r^k}{1-r}.$$

在上式两边各加上 $r^k$,得

$$1+r+r^2+\cdots+r^{k-1}+r^k$$
$$=\frac{1-r^k}{1-r}+r^k=\frac{1-r^{k+1}}{1-r}.$$

这一式子表明当 $n=k+1$ 时等式(1)成立. 由定理 1 知等式(1)对一切自然数都成立.

有些命题从某一个整数 $n_0$($n_0$ 可以是零及负整数)以后成立,这时仍然可以用第一数学归纳法. 只要把条件(1)中的 $n=1$ 换成 $n=n_0$;而条件(2)中的 $n=k$ 应满足 $k\geqslant n_0$,即写为 $n=k(\geqslant n_0)$

**例 2** 证明 当 $n\geqslant 5$ 时,不等式 $2^n>n^2$ 成立.

**证明** 当 $n=5$ 时，左边 $=2^5=32$，右边 $=25$，不等式成立.

假设当 $n=k$ 时，$2^k>k^2$，那么 $n=k+1$ 时，

左边 $=2^{k+1}=2\cdot 2^k>2k^2$，

右边 $=(k+1)^2=k^2+2k+1$.

由于

$$2k^2-(k^2+2k+1)=(k-1)^2-2,$$

上式右端当 $k\geqslant 5$ 时大于 0，因此 $2k^2>(k+1)^2$. 但是 $2^{k+1}>2k^2$，于是 $2^{k+1}>(k+1)^2$. 即原不等式当 $n=k+1$ 时仍成立. 因此当 $n\geqslant 5$ 时，不等式 $2^n>n^2$ 成立.

对于有些命题的证明，只假设"命题对于 $n=k$ 成立"还不够，而需要较强的假设. 我们有

**定理 2** （**第二数学归纳法原理**）设有一个与自然数 $n$ 有关的命题. 如果

(1) 当 $n=1$ 时命题成立；

(2) 假设对自然数 $n\leqslant k$ 时命题都成立，则 $n=k+1$ 时命题也成立；那么这个命题对于一切自然数 $n$ 都成立.

**证明** 用反证法 假设命题不是对一切自然数都成立. 令 M 表示使命题不成立的自然数所组成的集合. 显然 $M\neq\phi$，于是根据最小数原理，M 中有一个最小数 $r$，由条件(1)知 $r\neq 1$，因而 $r-1$ 是一个自然数. 由 $r$ 是 M 中最小数可知 $r-1\overline{\in} M$. 这就是说，命题对于 $\leqslant r-1$ 的一切自然数来说成立，据条件(2)知，命题对于 $r$ 也成立，与 $r\in M$ 矛盾. 因此命题对一切自然数都成立，证完.

第二数学归纳法与第一数学归纳法所差的只是条件(2). 即要求对一切 $\leqslant k$ 的自然数都成立.

**例 3** 已知数列 $a_{-1},a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$ 其中 $a_{-1}=\dfrac{3}{2}$，$a_0=2$，$a_n=3a_{n-1}-2a_{n-2}$，$(n=1,2,\cdots)$. 求证：$a_n=2^n+1$，$n=1,2,\cdots$.

**证明** 应用第二数学归纳法.

(1) $n=1$ 时,一方面 $a_1=3a_0-2a_{-1}=6-2\times\frac{3}{2}=3$,另一方面 $2^1+1=3$,所以命题成立.

(2) 假设对于一切 $n\leqslant k(\geqslant 1)$ 时命题都成立,我们来考察 $n=k+1$,因为

$$\begin{aligned}a_{k+1}&=3a_k-2a_{k-1}\\&=3(2^k+1)-2(2^{k-1}+1)\quad\text{(根据归纳假设)}\\&=3\times 2^k+3-2^k-2\\&=2^k(3-1)+1\\&=2^{k+1}+1.\end{aligned}$$

所以,当 $n=k+1$ 时命题也成立,故命题对一切自然数都成立.

在使用数学归纳法作证明时,必须证明定理 1 或定理 2 中的(1),(2)两个条件都成立,缺少任何一个都不行.例如设

$$f(n)=(n^2-5n+5)^2,$$

则 $f(1)=1,f(2)=1,f(3)=1,f(4)=1$,如果由此得出结论:$n$ 为任何自然数时都有 $f(n)=1$,那就错了.因为 $f(5)=25\neq 1$.这个错误是由于我们没有验证条件(2)所造成的.

同样,不验证条件(1)也会导致错误的结论.例如:如果不验证条件(1),而只验证条件(2),就将得出下面的错误结论:

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1.$$

事实上,假定 $n=k$ 时上式成立,去证明 $n=k+1$ 时上式也成立.因为在 $n=k+1$ 时,

$$\begin{aligned}&1+3+5+\cdots+(2k-1)+[2(k+1)-1]\\&=[1+3+5+\cdots+(2k-1)]+[2(k+1)-1]\\&=k^2+1+[2(k+1)-1]\\&=(k+1)^2+1.\end{aligned}$$

由此得出

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2+1,$$

对所有自然数都成立，这是一个错误结论.

综上所述，数学归纳法的条件(1)是归纳假设的基础；而条件(2)是递推的依据. 缺那一条都不行.

## 练 习 一

用数学归纳法证明：

1. $1^2+3^2+5^2+\cdots+(2n-1)^2=\frac{1}{3}n(4n^2-1)$.

2. $\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 5}+\frac{1}{5\cdot 7}+\frac{1}{(2n-1)(2n+1)}=\frac{n}{2n+1}$

3. $2^n>n$.

4. $(1+a)^n\geqslant 1+na$ 其中 $a$ 是一个正数.

5. 证明：含 $n$ 个元素的集合的一切子集的个数等于 $2^n$.

6. 证明 任意$\geqslant 8$ 的自然数 $n$ 可表为

$$n=3\lambda+5\mu$$

其中，$\lambda$、$\mu$ 为非负整数.

## §2 整数的整除性

所谓整数就是…，$-3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$. 全体整数组成的集合叫做整数集，用 **Z** 表示.

任意两个整数的和、差、积仍为整数. 也就是说：在整数集 **Z** 中能施行加法、减法、乘法运算.

一般地，我们把可以进行加、减、乘三种运算的数集叫做数环. 整数集构成的数环叫做整数环.

以下的讨论，如不特殊声明都是在**整数环**中进行，所涉及到的数都是整数.

**定义 1** 设 $a,b$ 是整数，如果存在一个整数 $q$，使

$$a=bq,$$

则称(在 **Z** 上)$b$ **整除** $a$，记作 $b|a$，否则就说(在 **Z** 上)$b$ **不整除** $a$，记作 $b\nmid a$，当 $b|a$ 时就说 $b$ 是 $a$ 的**约数**或说 $b$ 是 $a$ 的**因数**，$a$ 是 $b$ 的**倍数**.

注意，$0=oq$($q$ 为任意数). 因此 $o|o$，但不能写 $\frac{0}{0}$.

**整除有下列重要性质：**

1. 若 $a|b,b|c$，则 $a|c$;
2. 若 $a|b$ 或 $a|c$，则 $a|bc$;
3. 若 $a|b,a|c$，则 $a|(b\pm c)$;
4. $a|b$ 又 $b|a$ 当且仅当 $b=\pm a$;

5. 设 $a$ 为一确定的整数，$x$ 为任意整数，那么 $a|x$ 当且仅当 $a=\pm 1$; $x|a$ 当且仅当 $a=0$.

我们只证 4、5，其余 3 条留给读者做为练习.

事实上，由 $a|b$ 又 $b|a$ 则有 $q_1$、$q_2\in$ **Z** 使

$$b=aq_1,\quad a=bq_2.$$

于是，

$$b=bq_2q_1.$$

如果 $b=0$，那么显然也有 $a=0$；如果 $b\neq 0$，那么可得 $q_2q_1=1$. 因为 $q_1$、$q_2$ 都是整数，从而必有 $q_1=q_2=1$ 或 $q_1=q_2=-1$. 这就得到了 $b=\pm a$. 反之，如果 $b=\pm a$，那么就有 $a=\pm b$，这就是说 $a|b$又 $b|a$. 性质 4 得到证明.

下面证性质 5.

如果 $a=\pm 1$，那么对任意整数 $x$，显然都有 $a|x$. 反之，如果对任意整数 $x$ 都有 $a|x$，当 $x=1$ 时，也有 $a|1$. 即存在 $q\in$ **Z**. 使 1

$=aq$,从而必有 $a=\pm1$.

显然,当 $a=0$ 时,必有 $x|a$,反之,如果对任意整数 $x$ 都有 $x|a$,那么取 $x=2a$ 也有 $2a|a$,即存在 $q\in\mathbf{Z}$,使 $a=2a\times q$. 因此 $a(1-2q)=0$,必有 $a=0$,性质 5 证完.

下面证明一个重要定理,它是整数整除的理论基础.

**定理 1** (带余除法)设 $a,b$ 为任二整数,但 $b\neq0$,则有一对整数 $q$、$r$ 使

$$a=bq+r \qquad 0\leqslant r<|b| \tag{1}$$

**并且使(1)式成立的 $q$、$r$ 只有一对.**

**证明** 由于 $a=bq+r$ 成立当且仅当 $a=(-b)(-q)+r$ 成立,因此我们可以仅就 $b$ 是正整数的情形证明定理 1. 我们考虑 $b$ 的一切整数倍:

$$\cdots,-3b,-2b,-b,0,2b,3b,\cdots,$$

于是只有两种可能,即

1) $a$ 恰好是 $b$ 的某一倍数,即有 $q\in Z$ 使 $a=bq$,这就说明存在整数 $q,r=0$ 使(1)式成立.

2) $a$ 不是 $b$ 的一个倍数,因而 $a$ 必在 $b$ 的两个相邻倍数之间,即有 $q\in Z$ 使 $bq<a<b(q+1)$,或者写为:

$$a=bq+r,\text{其中 } 0<r<b$$

把以上两种可能的情形合起来写就有

$$a=bq+r,\text{其中 } 0\leqslant r<b.$$

下面证明满足(1)式的 $q$、$r$ 只有一对.

设还有一对整数 $q'$、$r'$满足.

$$a=bq'+r',\quad 0\leqslant r'<b,$$

那么 $\quad bq+r=bq'+r'$,

因此 $\quad b(q-q')=r'-r$;

$$b|q-q'|=|r-r'|,$$

但是 $r$、$r'$ 都是小于 $b$ 的正整数,因此 $|r-r'|<b$,如果 $q\neq q'$,那么