国家级高职高专精品课程教材
教育部高职高专规划教材
Jiaoyubu Gaozhi Gaozhuan Guihua Jiaocai

工科高等数学

侯风波 李仁芮 主编

辽宁大学出版社
www.lnupress.com.cn

国家级精品课程教材

教育部高职高专规划教材

工科高等数学

侯风波　李仁芮　主编

辽宁大学出版社

www.lnupress.com.cn

内容提要

本书是国家级精品课教材，是教育部高职高专规划教材．

本书是在认真总结、分析、吸收全国高职高专院校高等数学课程教学改革的经验基础上编写完成的．从高职高专教育人才培养目标出发，以教育部最新修订的《高职高专教育高等数学课程教学基本要求》为指导，适度降低了难度，注重贯彻循序渐进的教学原则，精心配置了每节的例题、思考题、练习题和每章的综合习题，便于学生对有关知识点的掌握与巩固．

本书内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、级数共十章．在每章的最后两节分别安排了一节习题课和一节用数学软件包Mathematica进行相应数学运算的内容．

本书特别注重培养学生用数学概念、思想、方法消化吸收工程概念和工程原理的能力；把实际问题转化为数学模型的能力；利用计算机和数学软件包 Mathematica 求解数学模型的能力．

本书可作为高职高专、成人高等学校各专业高等数学课程的教学用书，也可作为工程技术人员的自学用书.

图书在版编目(CIP)数据

工科高等数学／侯风波　李仁芮主编．—沈阳：辽宁大学出版社，2006. 4

ISBN 7-5610-5064-X

Ⅰ. 工…　Ⅱ. ①侯…　②李…　Ⅲ. 工科高等数学-高等学校-教材　Ⅳ. O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2006)第 025470 号

责任编辑：董晋骞　　封面设计：陈连辉

责任校对：夏　天

辽　宁　大　学　出　版　社

地址：沈阳市皇姑区崇山中路 66 号　　邮政编码：110036

联系电话：024-86782813　　http://www.lnupress.com.cn

Email: mailer@lnupress.com.cn

沈阳市北陵印刷厂印刷　长春市东联高教图书有限公司发行

幅面尺寸：787mm×1092mm　1/16　印张：19

字数：474 千字

2006 年 7 月第 1 版　　2006 年 7 月第 1 次印刷

定价：25.00 元

前　　言

本书是国家级高等数学精品课程教材.教材作为学校教学内容和教学方法的知识载体，在深化教育教学改革、全面推进素质教育、培养创新人才中有着举足轻重的地位.随着高等教育的蓬勃发展，高校教学改革在不断地深入进行.本书是为了适应我国高等职业教育培养高技能人才的需要，适应高等职业教育大众化发展趋势的现实，更好地贯彻《中共中央国务院关于进一步加强人才工作的决定》提出的“实施国家高技能人才培训工程和技能振兴行动，通过学校教育培养、企业岗位培训、个人自学提高等方式，加快高技能人才的培养”和教育部等七部门《关于进一步加强职业教育工作的若干意见》(教职成[2004]12号)：“职业院校制造业与现代服务业技能型紧缺人才培养培训计划”“国家高技能人才培训工程”“三年五十万新技师培养计划”“农村劳动力转移培训计划”的有关精神，在认真总结全国高职高专院校工科类各专业高等数学课程教学改革经验，认真分析、研究借鉴国外同类优秀教材编写特色的基础上编写的.

在本书编写过程中我们努力贯彻了如下原则：

1. 注重以实例引入知识点，并最终回到数学应用的思想，加强学生对数学的应用意识、兴趣及能力培养.

2. 注重基本概念和基本方法的教学，培养学生用数学原理和方法消化吸收工程概念和工程原理的能力.

3. 恰当把握教学内容的深度和广度，遵循基础课理论知识以必需够用为度的教学原则，不过分追求理论上的严密性，尽可能显示微积分的直观性与应用性，适度注意保持数学自身的系统性与逻辑性.

3. 注重利用数学软件包 Mathematica 求解数学问题，并结合具体教学内容在每章最后一节都专门安排了用数学软件包 Mathematica 进行相应数学运算的内容.

4. 在每章后面都安排了一节习题课，其内容包括内容提要、要点解析、例题精讲、课堂练习四部分内容，既便于教师组织习题课教学，又便于学生复习巩固.

5. 充分考虑高职高专学生的认知特点.在内容处理上兼顾对学生抽象概括能力、逻辑推理能力、自学能力、以及较熟练的运算能力和综合运用所学知识分析问题、解决问题的能力培养.对课程的每一主题都尽量从几何、数值、解析、文字四个方面加以体现，避免只注重解析推导.

6. 注意有关概念及结果的实际情况解释，力求表述确切、思路清晰、通俗易懂，并注重数学思想与方法的阐述.注意培养学生综合素质，体现数学课程改革的新思路，数学教学不仅要具备工具功能，而且还要具备思维训练和文化素质教育的功能，也就是要立足于综合素质教育，重视培养学生的科学精神、创新意识和综合运用数学解决实际问题的能力.

7. 在每章或每节开始，都用了尽可能短的语言点题，以使读者了解本章或本节所研究的问题的来龙去脉，起到承上启下的作用，增加了可读性.

8. 注重贯彻循序渐进的教学原则，精心设置了教学内容，配置了每节的例题、思考题、练习

题和每章的综合习题，特别注意知识点、例题、思考题之间的相互呼应，便于学生对有关知识点的消化吸收.

9.精心编写了与本书配套教材《工科数学学习指导》，便于学生自主性学习.

本书内容包括函数与极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分、常微分方程、向量与空间解析几何、多元函数微分学、重积分、无穷级数共十章.书后附有本书综合习题答案.

参加本书编写的有侯风波（承德石油高等专科学校）、李仁芮（承德石油高等专科学校）.

本书由侯风波、李仁芮担任主编.

本书框架结构、编写大纲及最终审定稿由侯风波教授完成.

由于编者水平有限，时间也比较仓促，书中难免有不妥之处，我们衷心地希望得到专家、同行和读者的批评指正，使本书在教学实践中不断完善起来.

侯风波

2006年春

目　录

绪　论

高等数学是高职高专各专业必修的一门重要基础课，它的内容主要包括一元函数微积分学、多元函数微积分学、微分方程、级数等内容，其核心内容是微积分.

一、高等数学的发展过程

现实世界中的万事万物，都在不断地运动变化，并且在运动变化过程中都存在一定的数量关系.数学就是研究现实世界中数量关系与空间形式的科学.简略地说，就是研究数和形的科学.时至今日，虽然数学的内容非常抽象，数学的应用非常广泛，但是，关于数学的上述说法大体上还是正确的，只是随着人们对事物认识的逐渐深化，作为数学研究对象的“数”和“形”，在数学发展的不同阶段，表现形式不相同罢了！

17 世纪以前的数学，研究的数是常数或常量(即在某一运动变化过程中保持不变，可以看作一个固定数值的量)，研究的形是孤立的、不变的规则几何形体.研究常量间的代数运算和不同几何形体内部及相互间的关系，分别形成了初等代数和初等几何，统称为初等数学.因此，通常把这个阶段称为初等数学阶段.

1637 年，法国数学家笛卡儿(Descartes)引入了直角坐标系，建立了解析几何.解析几何的建立，沟通了数学中两个基本研究对象“数”与“形”之间的联系，用代数运算去处理几何问题，使数学的发展进入了一个新阶段.在此阶段中，研究的“数”是变数或变量(即在某一运动变化过程中不断变化，可以取不同数值的量)，研究的“形”是不规则的几何形体，如曲线、曲面、曲边形和曲面体等，而且“数”和“形”开始紧密地联系起来.由于 17 世纪工业革命的直接推动，英国科学家牛顿(Newton)和德国数学家莱不尼茨(Leibniz)在许多数学家工作的基础上创立了微积分，他们破天荒地为变量建立了一种行之有效的运算规则，去描述因变量在一个短暂瞬间相对于自变量的变化率，以及在自变量的某个变化过程中因变量作用的整体积累，前者称为微商，后者称为积分，统称为微积分.此后，数学的发展出现了一日千里之势，形成了内容丰富的高等代数、高等几何与数学分析三大分支，在此基础上，还出现了其他分支.相对于初等数学，它们被称为高等数学.因此，通常把这一阶段(1637 年到 19 世纪末)称为高等数学阶段.

在 20 世纪 40 年代，计算数学的发展促进了电子计算机的发展；反过来，电子计算机及相应数学软件包的迅速发展又加快了数学的发展.电子计算机及相应数学软件包的使用，使得传统的高等数学内容与电子计算机及数学软件包的联系日益密切.过去只能由数学专业人员才能完成的一些繁琐的数学计算与推理，现在也可以由一般工程技术人员借助计算机与数学软件包方便地完成.因此，熟练地使用数学软件包已成为高等数学教学内容的重要组成部分.

二、微积分研究的两个基本问题

从研究常量到研究变量，从研究规则的几何体到研究不规则的几何体，是人类对自然界认识的一大飞跃，是数学发展的一个转折点.在这两个阶段中，不但研究的对象不同，而且研究的方法也不同.初等数学主要采用形式逻辑的方法，静止地、孤立地研究问题，而高等数学则不

然,它是以运动的、变化的观点去研究问题.下面,我们以“速度问题”和“面积问题”这两个经典问题为例,介绍微积分的基本思想方法.

1.变速直线运动的瞬时速度

运动有两种:一种是匀速运动,快慢始终保持不变;一种是变速运动,时而快时而慢.客观实际中,变速运动是常见的,例如,汽车的行使、飞机的飞行、物体的降落和抛射、经济的增长等,通常都是变速运动.

对于匀速运动的速度,我们有公式

$$\text{速度} = \frac{\text{路程}}{\text{时间}} = \frac{s}{t}$$

现在我们要着重研究的是如何求变速运动的速度.

例 1 求自由落体的运动速度.

解 假设物体在初始时刻是静止的,并且忽略空气阻力的作用,则由高中物理知:从开始时刻($t=0$)到时刻 t,物体下落的路程 s 由下列公式给出:

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \tag{$*$}$$

其中 $g \approx 9.8\text{m/s}^2$ 是重力加速度.下面计算自由落体在任一时刻 t 的瞬时速度.

对于速度保持不变的匀速运动,我们用走过的路程除以经历的时间就得出各个时间的速度,而现在考察的自由落体运动,其速度是随时间而变化的,这时就不能简单地用路程除以时间去求某一时刻的速度.如何解决这一问题?在此,我们只考察某一很小时间间隔内速度的变化情况,在整段时间内,速度是变的,但在很小的一段时间内,速度可以近似地看成不变,换句话说,可以近似地“以匀速代变速”.

按照这种想法,为了求自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度 v_0,我们考察从时刻 t_0 到时刻 $t_0+\Delta t$ 这段时间内的运动,这里 Δt 代表从 t_0 开始的一段时间.由($*$)式得,在这段时间内自由落体所走过的路程为

$$\Delta s = \frac{1}{2}g(t_0+\Delta t)^2 - \frac{1}{2}gt_0^2 = gt_0\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2,$$

如果 Δt 很小,在这段时间内,运动就可以近似地看成是匀速的,因而就可以用这段时间内的平均速度

$$\frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{gt_0\Delta t + \frac{1}{2}g(\Delta t)^2}{\Delta t} = gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t$$

来近似地代替时刻 t_0 的瞬时速度 v_0.显然,Δt 越小,近似程度越高.但是,不论 Δt 多么小,这个平均速度总还只是瞬时速度 v_0 的近似值而不是它的精确值.

为了从近似值过渡到精确值,我们令 Δt 无限地接近于0(记为 $\Delta t \to 0$,读作 Δt 趋近于0).当 $\Delta t \to 0$ 时,平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 无限接近的那个唯一确定常数,称其为平均速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ 的极限,记为 $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t}$,就应该是瞬时速度 v_0,即

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta s}{\Delta t} = v_0,$$

因此,我们有

$$v_0 = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0}\left(gt_0 + \frac{1}{2}g\Delta t\right) = gt_0.$$

这就是自由落体在时刻 t_0 的瞬时速度. 例如,当 $t_0 = 1$ 时,$v_0 = g$;$t_0 = 2$ 时,$v_0 = 2g$ 等等.

变速直线运动的瞬时速度问题及其求解方法是微积分中微分问题的典型代表,微积分的基本概念 —— 导数,就是从这类问题抽象出来的. 该问题的进一步研究,将在第二章中详细讨论.

2. 平面图形的面积问题

求平面图形的面积是微积分的另一个经典问题.

例 2　设给定一个如图0 - 1 所示的平面图形,它由抛物线 $y = x^2$,直线 $x = 1$ 及 x 轴围成,试计算这个平面图形的面积.

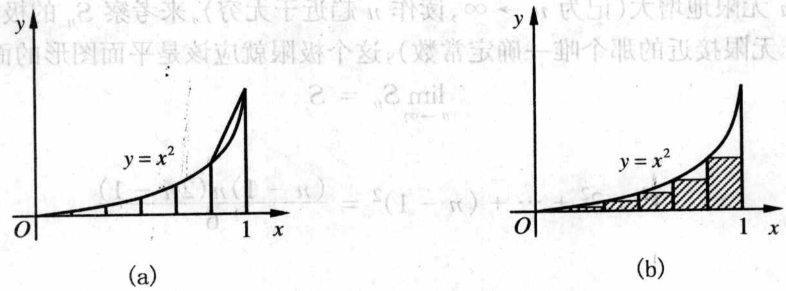


图 0-1

由于该平面图形有一边是曲线,其面积不能用矩形或三角形面积公式计算. 在这里,我们遇到的是"曲与直" 的矛盾.

为了解决这一矛盾,我们把 x 轴上从 0 到 1 那段分成许多小段,再从所有分点引平行于 y 轴的直线,而将整个平面图形分成许多很窄的竖条. 虽然每一个竖条的上面那个边都是曲线,由于竖条很窄,从计算面积的角度来看,我们可以像图 0 - 1(a) 中那样把它近似看成小梯形,或者思想更解放一些,像图 0 - 1(b) 中那样把它近似地看成小矩形,在这个意义上,"以直代曲".

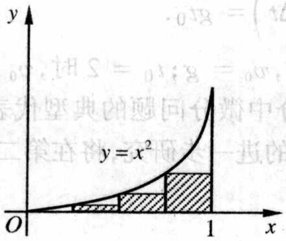
下面按第二种想法来进行计算. 假设我们把 x 轴上从 0 到 1 那一段分成 n 个相等的小段,则每一段的长为$\frac{1}{n}$,分点的坐标分别为$\frac{1}{n},\frac{2}{n},\cdots,\frac{n-1}{n}$. 小矩形共有 $n - 1$ 个,它们的宽度都是$\frac{1}{n}$,而高度分别是抛物线 $y = x^2$ 在各分点处的函数值:$\left(\frac{1}{n}\right)^2,\left(\frac{2}{n}\right)^2,\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2$. 因此,各小矩形的面积分别等于

$$\left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n},\left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n},\cdots,\left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n}$$

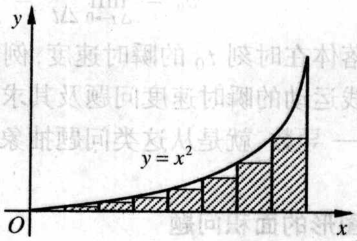
把这些小矩形面积加起来就得到平面图形面积的一个近似值

$$\begin{aligned} S_n &= \left(\frac{1}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \left(\frac{2}{n}\right)^2\frac{1}{n} + \cdots + \left(\frac{n-1}{n}\right)^2\frac{1}{n} \\ &= \frac{1}{n^3}[1^2 + 2^2 + \cdots + (n-1)^2] \end{aligned}$$

它就是图 0 - 1(b) 中小矩形面积之和. 分得越细,即 n 越大,近似程度越高(如图 0 - 2).



(a) n=4



(b) n=8

图 0-2

我们让 n 无限地增大(记为 $n\to\infty$,读作 n 趋近于无穷),来考察 S_n 的极限(即当 n 无限地增大时,S_n 无限接近的那个唯一确定常数),这个极限就应该是平面图形的面积 S:

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S$$

利用公式

$$1^2+2^2+\cdots+(n-1)^2=\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

将 S_n 写成

$$S_n=\frac{1}{n^3}\cdot\frac{(n-1)n(2n-1)}{6}6=\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)$$

显然

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)=1,\lim_{n\to\infty}\left(2-\frac{1}{n}\right)=2$$

从而

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1\times 2}{6}=\frac{1}{3}$$

因此

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{6}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{3}$$

即该平面图形的面积等于$\frac{1}{3}$.

上述平面图形面积的求解方法是微积分学中积分问题的典型代表,积分学中的基本概念——定积分,就是从这类问题抽象出来的.我们将在第五章中进行研究.

上述两个例子代表了微积分中两类典型问题,具有普遍的意义.其求解的思想方法就是微积分思想方法的具体体现.由此可以看到,与初等数学不同,高等数学不是个别地讨论问题;而是普遍地解决问题.有了导数,就可以解决一批关于求函数在某点变化快慢程度的问题;有了积分,就可以解决一批关于求函数在某区间变化大小的问题.其次,导数和积分分别是从局部和整体认识同一事物的两个方面.导数是研究函数在一点处的变化情况的,仅与函数在该点附近局部性态有关;而积分则研究函数在一个区间上的变化,与函数在该区间上的整体性态有关.虽然如此,它们的研究方法却是类似的.在上面两个例子中,采取的方法都是:在微小局部"以匀代非匀","以直代曲",求得近似值,通过求极限转化为精确值.这是微积分解决问题的基

本思想方法,体现了通过矛盾的转化解决矛盾的唯物辩证法的矛盾分析方法,与初等数学主要依据形式逻辑的推演方法有本质的不同.

三、怎样学习高等数学

由于高等数学的研究对象和研究方法与初等数学有本质的不同.因此,高等数学呈现出概念更复杂、理论性更强、表达形式更加抽象和推理更加严谨的特点.读者在学习高等数学的时候,应当认真阅读和深入钻研教材的内容.一方面,要透过抽象的表达形式,深刻理解基本概念的内涵与实质以及它们之间的内在联系,正确领会一些重要的数学思想方法.另一方面,也要培养抽象思维和逻辑运算能力.学习数学,必须做一定数量的习题,做习题不仅是为了掌握数学的基本运算方法,而且可以帮助我们更好的理解概念、理论和思想方法.因此,读者不应该仅仅满足于做题,更不能认为,只要做了题,就能学好了数学.作为工科院校的大学生,学习数学的主要目的是为了用数学.当代科学技术的飞速发展,不但要求我们掌握更多的数学知识,而且要求会运用这些知识去解决实际问题.因此,我们应当逐步培养自己综合运用所学的数学知识解决实际问题的意识和兴趣,培养建立实际问题的模型,运用数学方法分析解决实际模型的能力.在学习中还要提倡独立钻研,勤于思考,敢于大胆地提出问题,善于钻研问题,培养自己的创造性思维和学习能力.

在学习数学的过程中,一定要善于运用计算机及数学软件包来完成一些典型的习题,一方面可以逐步培养我们用计算机和数学软件包处理数学问题的能力,另一方面,可以提高对有关问题的感性认识,加深对数学概念及方法的理解.因此,在学习高等数学的基本概念及方法的同时,要特别注意数学软件包的学习及使用.

最后,我们要谈谈如何读数学书.读数学书与读其他书有明显的不同.由于数学书在表达形式上的抽象性,这使得数学书往往有些难懂.读者不能期望数学书一读就懂,复杂的地方要反复读和反复思考,甚至要读到后面再返回来重读才能真正理解.在读数学书时要特别留意定义及定理的叙述.我们不主张单纯记忆或背诵.但是,在理解的基础上,适当的记忆某些最基本的公式、重要定义的叙述以及定理的条件与结论也是必要的.

为了加深理解,在读数学书时,手边放些草稿纸,边读边做些习题或画个草图是非常有益的.数学书中为了突出重点或节省篇幅,经常要节省一些推导或演算.有时会用“显然”“显而易见”“事实上”或“经过简单计算表明”之类的话放在某个结论之前.凡是对你说来,并不是那么“显然”的事实,或者你认为有必要去验算的地方,不妨去试着补上自己的证明或计算.这对初学者加强对内容的理解是一个很好的练习.

学好数学并不是一件难事,只要你付出必要的努力,数学就不应当是枯燥乏味的.数学并不是一堆繁琐无用的公式,掌握了它的真谛,就会给你增添智慧与力量,你就会体会到学习数学的快乐.

第一章 函数与极限

函数是微积分研究的对象,极限是研究微积分的工具.本章先复习中学已学习过的函数及其性质,进而给出基本初等函数与初等函数的定义.然后,重点研究极限的概念与性质及函数的连续性.

第一节 函数及其性质

本节除了复习函数的定义和常见的几种特性外,还特别介绍基本初等函数、初等函数的概念.

一、函数的概念

函数的概念在 17 世纪之前一直与公式紧密关联,到了 1837 年,德国数学家狄利克雷(1805—1859)抽象出了直至今日仍为人们易于接受,并且较为合理的函数概念.

1. 函数的定义

定义 1 设有两个变量 x 和 y, D 是一个非空数集,若当变量 x 在集合 D 内,任意取定一个数值时,变量 y 按照一定的规律 f,有唯一确定的值与之对应,则称 y 是 x 的函数,记作

$$y = f(x), \qquad x \in D,$$

其中变量 x 称为自变量,变量 y 称为函数(或因变量). 自变量的取值范围 D 称为函数的定义域.

若对于确定的 $x_0 \in D$,通过对应规律 f,函数 y 有唯一确定的值 y_0 相对应,则称 y_0 为 $y = f(x)$ 在 x_0 处的函数值,记作

$$y_0 = y\big|_{x=x_0} = f(x_0),$$

函数值的集合,称为函数的值域,记作 M.

若函数在某个区间上的每一点都有定义,则称这个函数在该区间上有定义.

2. 函数的两个要素

函数的对应规律和定义域称为函数的两个要素.

(1) 对应规律

函数的对应规律指的是由自变量的取值确定因变量取值的规律.

例 1 $f(x)=8x^2+3x-1$ 就是一个特定的函数，f 确定的对应规律为：

$$f(\ )=8(\ )^2+3(\ )-1.$$

例 2 设 $y=f(x)=\dfrac{1}{2}\sin\dfrac{1}{x}$，求 $f\left(\dfrac{2}{\pi}\right)$.

解
$$y|_{x=\frac{2}{\pi}}=f\left(\frac{2}{\pi}\right)=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{2}=\frac{1}{2}.$$

(2) 定义域

自变量的取值范围称为函数的定义域.

例 3 求函数 $y=\sqrt{9-x^2}+\arcsin(2x-5)$ 定义域.

解 该函数由两个函数相加而得，先分别求出每个函数的定义域，然后求其公共部分即可.

使 $\sqrt{9-x^2}$ 有定义，必须满足 $9-x^2\geqslant 0$，即

$$x^2\leqslant 9,$$

解得
$$-3\leqslant x\leqslant 3,$$

即 $\sqrt{9-x^2}$ 的定义域是 $[-3,3]$；

使 $\arcsin(2x-5)$ 有定义，必须满足 $|2x-5|\leqslant 1$，即

$$-1\leqslant 2x-5\leqslant 1,$$

解得
$$2\leqslant x\leqslant 3,$$

即 $\arcsin(2x-5)$ 的定义域为 $[2,3]$.

于是，所求函数的定义域是 $[-3,3]\cap[2,3]=[2,3]$.

例 4 下列函数是否相同，为什么？

(1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$；

(2) $\omega=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$.

解 (1) $y=\ln x^2$ 与 $y=2\ln x$ 不是相同的函数，因为定义域不同.

(2) $\omega=\sqrt{u}$ 与 $y=\sqrt{x}$ 是相同的函数，因为对应规律与定义域均相同.

3. 函数的记号

y 是 x 的函数，可以记作 $y=f(x)$，也可以记作 $y=\varphi(x)$ 或 $y=F(x)$ 等，但同一函数在同一问题的讨论中应取定一种记法，同一问题中涉及多个函数时，则应取不同的记号分别表示它们各自的对应规律，为方便起见，有时也用记号 $y=y(x)$，$u=u(x)$，$s=s(x)$ 等表示函数. 这种函数的记号也称为函数的解析表达式.

4. 函数的表示法

函数可以用至少三种不同的方法来表示：表格法、图像法和公式法.

例 5 据统计，某地 2006 年 9 月 19 日 —29 日每天的最高气温如表 1.1 所示.

表 1.1

日期(9月)	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
最高气温(℃)	29	31	31	30	24	21	23	19	26	28	30

这个表格确实表达了该地区的最高温度是日期的函数，这里不存在任何计算温度的公式(否则就不需要气象局了)，但是每一天都会产生出一个唯一的最高气温，对每个日期 t，都有

一个与 t 相应的唯一最高气温 N.

例 6　王先生到郊外去观景，他匀速前进，离家不久，他发现一骑车人的自行车坏了，他帮助这个人把自行车修好，随后又上路了．请把王先生离家的距离关于时间的函数用图形描述出来．

解　王先生离家的距离关于时间的函数图形如图 1—1 所示．

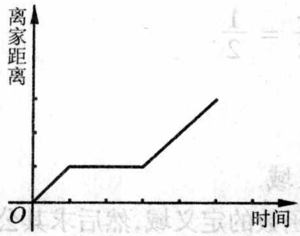


图 1-1

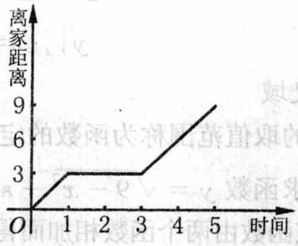


图 1-2

如果给图 1—1 标明具体的数值(如图 1—2)，则可由解析表达式表示为

$$f(x)=\begin{cases}3x, & 0\leqslant x\leqslant 1,\\ 3, & 1<x\leqslant 3,\\ 3x-6, & 3<x\leqslant 5.\end{cases}$$

该函数 $f(x)$ 的定义域为 $D=[0,5]$，但它在定义域内不同的区间上是用不同解析式来表示的，这样的函数称为分段函数．分段函数是定义域上的一个函数，不要理解为多个函数，分段函数需要分段求值，分段作图．

例 7　作出下面分段函数的图形：

$$f(x)=\begin{cases}0, & -1<x\leqslant 0,\\ x^2, & 0<x\leqslant 1,\\ 3-x, & 1<x\leqslant 2.\end{cases}$$

解　该分段函数的图形如图 1—3 所示．

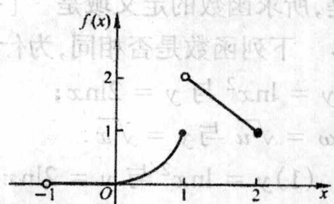


图1-3

二、函数的几种特性

1. 有界性

设函数 $f(x)$ 的定义域为 D，若存在正数 M，使得在区间 D 上 $|f(x)|\leqslant M$，则称 $f(x)$ 在 D 上有界．

例 8　$f(x)=\sin x$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上有界，因为 $|\sin x|\leqslant 1$．而 $\varphi(x)=\dfrac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 内无界．

2. 单调性

设函数 $f(x)$ 在区间 I 上有定义，若对于区间 I 内任意两点 x_1,x_2，当 $x_1<x_2$ 时，有 $f(x_1)<f(x_2)$，则称 $f(x)$ 在 I 上单调增加，区间 I 称为单调增区间；若 $f(x_1)>f(x_2)$ 则称 $f(x)$ 在 I 上单调减少，区间 I 称为单调减区间．单调增区间或单调减区间统称为单调区间．

3. 奇偶性

设 I 为关于原点对称的区间，若对于任意 $x\in I$，都有 $f(-x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的偶函数；若 $f(-x)=-f(x)$，则称 $f(x)$ 为定义在区间 I 上的奇函数．