2001年最新版

最新
全国硕士研究生
入学统一考试

全真模拟试卷

[经济数学（三）]

主编：北京大学 林朝祥　张静
审定：考研命题研究组

中国人民公安大学出版社

前　　言

“忽如一夜春风来，千树万树梨花开。”每年九月间，数十万名手持“硕士研究生入学考试录取通知书”的新生，在经历了人生中最难忘的一段拼搏后，来到各名牌大学，开始了新的人生旅程！

在这些天之骄子中，有为数众多的考生，选择过这套《最新全国硕士研究生入学统一考试全真模拟试卷》作为他们主要的考研复习资料并因此而获成功。该套试卷由全国考研命题研究组组织编写，编写者为北京大学、中国人民大学、清华大学等著名高校的教授及学者们。其中部分教授是国家考研命题组成员和阅卷组成员。他们同时具有丰富的考研辅导经验，对命题有惊人的把握，所编资料以高命中率而闻名！

今年本套试卷严格遵循教育部最新修订的2001年全国硕士研究生入学考试大纲的精神，同时结合多年的教学经验和考研经验来进行编写。每套试卷的题型题量、难易程度、分值比例、评分标准完全按照新大纲的要求精心设计和编写。使考生通过模拟训练，及时查漏补缺，提高应试能力。

本丛书特点在于：它绝非一般的模拟试卷，而是由著名考研专家根据考研最新动态和精神，开会共同研讨对策，对2001年考研作出精确预测，并呕心沥血，最终形成此套“高含金量”的试卷！权威而又准确的预测是本丛书的最大特色！去年读过此丛书的考生都纷纷给本中心来电话，称他们在进入考场后有太多的“似曾相识”、“早已做过此题”的感觉！

该套试卷涵盖文科政治、理科政治、英语、理工数学(一)、理工数学(二)、经济数学(三)、经济数学(四)、西医综合、中医综合、MBA及法硕等考研科目。

“不经历风雨，哪能有彩虹，人生不会随随便便成功……”歌词铿锵，掷地有声！立志于考研的同学们，我们深信，只要你们认真通读本书，掌握答题思路与分析方法的要领，严格完成全部习题，并融会贯通，举一反三，一定会取得考研的成功，进而改变你人生的轨迹，从胜利走向胜利！

考研命题研究组

公元2000年7月

目　　录

模拟试题(一)

一、填空题

1. 设 $y = f(\ln x)e^{f(x)}$，其中 f 可微，则 $dy =$ ________.

2. $\int \frac{1}{(x+1)^3\sqrt{x^2+2x}}dx =$ ________.

3. 已知 $\boldsymbol{\alpha}_1 = (1,1,0,1)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_2 = (0,1,a,4)^T$，$\boldsymbol{\alpha}_3 = (2,1,-2,-2)^T$ 线性相关，则 $a =$ __2__.

4. 已知 A, B 两个事件满足条件 $P(AB) = P(\overline{A}\,\overline{B})$，且 $P(A) = p$，则 $P(B) =$ __1-p__.

5. 设随机变量 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布 $N(0,3^2)$，而 $X_1,\cdots,X_9$ 和 $Y_1,\cdots,Y_9$ 分别是来自总体 X 和 Y 的简单随机样本，则统计量 $U = \frac{X_1+\cdots+X_9}{\sqrt{Y_1^2+\cdots+Y_9^2}}$ 服从________分布，参数为________.

二、选择题

1. 设 $f(x)$ 在 $x = a$ 的某邻域内有定义，则 $f(x)$ 在 $x = a$ 处可导的一个充分条件是(　　).

(A) $\lim\limits_{n\to\infty}\left[f(a+\frac{1}{n}) - f(a)\right]$存在

(B) $\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(a+2n)-f(a+n)}{n}$ 存在

(C) $\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(a+n)-f(a-n)}{2n}$ 存在

(D) $\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(a)-f(a-n)}{n}$ 存在

2. 设 $f(x,y)$ 连续，且 $f(x,y)=xy+\iint\limits_D(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v$，其中 D 是由 $y=0,y=x^2,x=1$ 所围区域，则 $f(x,y)$ 等于(　　).

(A)xy　　(B)$2xy$

(C)$xy+\frac{1}{8}$　　(D)$xy+1$.

3. 已知 n 阶矩阵 $\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$，其中 $\boldsymbol{B},\boldsymbol{C}$ 可逆且满足 $2\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}+\boldsymbol{C}$，则 $\boldsymbol{A}$ 等于(　　).

(A)$(2\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})\boldsymbol{C}$　　(B)$\boldsymbol{B}(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{C}$

(C)$\boldsymbol{C}(2\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E})^{-1}\boldsymbol{B}$　　(D)$\boldsymbol{C}(\frac{1}{2}\boldsymbol{E}-\boldsymbol{B})$

4. 已知 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2$ 是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的两个不同的解，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 是相应齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 的基础解系，k_1,k_2 是任意常数，则 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解是(　　).

(A)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(B)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(C)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

(D)$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2(\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2)+\frac{\boldsymbol{\beta}_1+\boldsymbol{\beta}_2}{2}$

5. 已知随机变量 X 服从二项分布，且 $E(X)=2.4,D(X)=1.44$，则二项分布的参数 n,p 的值为(　　).

(A)$n=4,p=0.6$　　(B)$n=6,p=0.4$

(C)$n=8,p=0.3$　　(D)$n=24,p=0.1$.

三、设函数

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{g(x)-\mathrm{e}^{-x}}{x}, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$$

其中 $g(x)$ 有二阶连续导数且 $g(0)=1, g'(0)=-1$,

(1) 求 $f'(x)$;

(2) 讨论 $f'(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续性.

四、计算 $I=\iint\limits_{x^2+y^2\leqslant R^2}(x^2-2x+3y+2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$.

五、假设某消费者可将其每天的时间 $H(H=24)$ 分为工作时间 x 与休息时间 t (x, t 均以小时为单位). 若每小时的工资率为 r, 则他每天的工作收入 $Y=rx$. 如果表示其选择工作与休息时间的效用函数(注)为

$$U=atY-bY^2-ct^2 \quad (a,b,c>0),$$

(1) 为使其每天的效用最大, 他每天应工作多少小时?

(2) 若按税率 $t(0<t<1)$ 交纳收入税, 他每天的工作时间应是多少小时?

注　效用就是商品或劳务满足人的欲望或需要的能力. 这里的效用函数是指该消费者的目标函数.

六、求函数 $y=(x-1)e^{\frac{\pi}{2}+\arctan x}$ 的单调区间和极值, 并求该函数图形的渐近线.

七、　已知 $a_0, a_1, \cdots, a_n, \cdots$ 为等差数列 $(a_0\neq 0)$, 试求:

(1) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的收敛半径;　　　(2) 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n}$ 的和 S.

八、设 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 上可导, 且 $0\leqslant f(x)\leqslant\frac{x}{1+x^2}$

证明: $\exists\,\xi\in(0,+\infty)$, 使 $f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}$.

九、设 3 阶方阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $1, 0, -1$, 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,2)^T, \boldsymbol{\alpha}_2=(2,-2,1)^T, \boldsymbol{\alpha}_3=(-2,-1,2)^T$

(1) 求方阵 $\boldsymbol{A}$;

(2) 令 $\boldsymbol{P}=[-2\boldsymbol{\alpha}_2, 3\boldsymbol{\alpha}_3, \boldsymbol{\alpha}_1]$, 求 $P^{-1}AP$.

十、设 $\boldsymbol{A}$ 是 $m \times n$ 矩阵，其秩 $r(\boldsymbol{A}) = n$，若 n 维向量 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2 \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 与 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 满足 $A\boldsymbol{\alpha}_i = \boldsymbol{\beta}_i (i = 1, 2, \cdots, s)$，证明若 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \cdots, \boldsymbol{\alpha}_s$ 线性无关，则 $\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2, \cdots, \boldsymbol{\beta}_s$ 也线性无关.

十一、设有来自三个地区的各 10 名、15 名和 25 名考生的报名表，其中女生的报名表分别为 3 份、7 份和 5 份. 随机地取一个地区的报名表，从中先后抽出两份.

(1) 求先抽到的一份是女生表的概率 p；

(2) 已知后抽到的一份是男生表，求先抽到的是一份是女生表的概率 q.

十二、设 $X = e^Y$，而 Y 服从 $N(\mu, \sigma^2)$ 分布，则 X 的分布称为对数正态分布.

(1) 求出 X 的概率密度；

(2) 设 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是 X 的一个简单随机样本，求 μ 和 σ^2 的矩估计量和最大似然估计量.

参考答案

一、填空

1. 答案是：$e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx$

【分析】

$$\begin{aligned}dy&=d[f(\ln x)e^{f(x)}]\\&=[df(\ln x)]\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)de^{f(x)}\\&=\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)dx\right]\cdot e^{f(x)}+f(\ln x)e^{f(x)}\cdot f'(x)dx\\&=e^{f(x)}\left[\frac{1}{x}f'(\ln x)+f'(x)f(\ln x)\right]dx.\end{aligned}$$

2. 答案是：$-\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1}+\frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2}+C$

【分析】

$$I=\int\frac{1}{(x+1)^3\sqrt{(x+1)^2-1}}dx$$

$$\xlongequal{\text{令} x+1=\frac{1}{t}}\int\frac{t^3}{\sqrt{\frac{1}{t^2}-1}}\left(-\frac{1}{t^2}\right)dt$$

$$=-\int\frac{t^2dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int\frac{(1-t^2)dt}{\sqrt{1-t^2}}-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$=\int\sqrt{1-t^2}dt-\int\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

$$= \frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2} + \frac{1}{2}\arcsin t - \arcsin t + C$$

$$= -\frac{1}{2}\arcsin\frac{1}{x+1} + \frac{1}{2}\frac{\sqrt{x^2+2x}}{(x+1)^2} + C$$

3. 答案是:2

【分析】 由于 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3$ 线性相关,齐次方程组

$[\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2, \boldsymbol{\alpha}_3]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$ 有非零解.对系数矩阵作初等行变换,

有

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & a & -2 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & a-2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

所地应填 $a = 2$

4. 答案是:$1 - p$

【分析】 由 $P(AB) = P(\overline{A}\ \overline{B})$,有

$P(AB) = P(\overline{A+B}) = 1 - P(A+B)$

$\qquad = 1 - [P(A) + P(B) - P(AB)]$,

从而有

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - p.$$

5. 答案是:t,9

【分析】 令 $X'_i = \frac{X_i}{3}, Y'_i = \frac{Y_i}{3}, i = 1,2,\cdots,9$

则 $X'_i \sim N(0,1), Y'_i \sim (0,1), i = 1,2,\cdots,9.$

$X' = X'_1 + \cdots + X'_9 \sim N(0,3^2), Y' = {Y'_1}^2 + \cdots + {Y'_9}^2 \sim \chi^2(9)$

因此 $U = \frac{X_1 + \cdots + X_9}{\sqrt{Y_1^2 + \cdots + Y_9^2}} = \frac{X'_1 + \cdots + \chi'_9}{\sqrt{{Y'_1}^2 + \cdots + {Y'_9}^2}} =$

$$\frac{X'}{\sqrt{Y'}}=\frac{X'/3}{\sqrt{\frac{Y'}{9}}}$$

由于　$X'/3\sim N(0,1)$, $Y'\sim \chi^2(9)$. 故 $U\sim t(9)$.

二、选择题

1. 答案是: D

【分析】　$\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(a)-f(a-n)}{n}=\lim\limits_{n\to 0}\frac{f(a-n)-f(a)}{-n}=f'(a)$, 故 (D) 入选.

2. 答案是: C

【分析】　令 $\iint\limits_D f(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v=A$, 则 $f(x,y)=xy+A$ 两边取二重积分得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_D (xy+A)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{x^2}(xy+A)\mathrm{d}y$

$$=\int_0^1(\frac{1}{2}x^5+Ax^2)\mathrm{d}x=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A$$

即　$A=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A$ 解得 $A=\frac{1}{8}$, 故 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

3. 答案是: C

【分析】　$2A=AB^{-1}+C\Rightarrow A(2E-B^{-1})=C\Rightarrow A=C(2E-B^{-1})^{-1}$

$=C(2B^{-1}B-B^{-1})^{-1}=C[B^{-1}(2B-E)]^{-1}=C(2B-E)^{-1}B$. 可知 (C) 入选.

4. 答案是: B

【分析】　$\frac{\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 不是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的解, 从解的结构来看应排除 (A), (C), 虽 $\boldsymbol{\beta}_1-\boldsymbol{\beta}_2$, $\boldsymbol{\alpha}_1$ 都是 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 的解, 但是否线性无关不能保证, 能否成为基础解系不明确, (D) 应排除. 由 $\boldsymbol{\alpha}_1\boldsymbol{\alpha}_2$ 是基础解

系，得 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_1 - \boldsymbol{\alpha}_2$ 线性无关是基础解系，而 $\dfrac{\boldsymbol{\beta}_1 + \boldsymbol{\beta}_2}{2}$ 是 $\boldsymbol{Ax} = \boldsymbol{b}$ 的解，故(B) 正确.

5. 答案是：B

【分析】 由 $E(X) = np, D(X) = np(1-p)$ 得方程组

$$np = 2.4,\ np(1-p) = 1.44.$$

解方程组即得 $n = 6, p = 0.4$.

三、**【解】** (1) 当 $x \neq 0$ 时，有

$$f'(x) = \frac{x[g'(x) + e^{-x}] - g(x) + e^{-x}}{x^2} = \frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}$$

当 $x = 0$ 时，由导数的定义可得

$$f'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{g(x) - e^{-x}}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{g'(x) + e^{-x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}[g''(0) - 1].$$

所以 $$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}, & x \neq 0, \\ \dfrac{1}{2}[g''(0) - 1], & x = 0. \end{cases}$$

(2) 因为在 $x = 0$ 处，由洛必达法则可得

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0}\frac{xg'(x) - g(x) + (x+1)e^{-x}}{x^2}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{g'(x) + xg''(x) - g'(x) - xe^{-x}}{2x}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{g''(x) - e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}[g''(0) - 1],$$

而 $f'(x)$ 在 $x \neq 0$ 处是连续的，所以 $f'(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上为连续函数.

四、**【解】** 由二重积分的性质，则

$$I=\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y-\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint_D 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

因积分域为圆域 $x^2+y^2\leqslant R^2$，关于 x 轴、y 轴及坐标原点均对称，所以

$$\iint_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint_D y^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\frac{1}{2}\iint_D (x^2+y^2)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^R r^3\mathrm{d}r=\frac{\pi}{4}R^4$$

又 $2x,3y$ 分别为 x 和 y 的奇函数，故 $\iint_D 2x\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$,

$\iint_D 3y\mathrm{d}x\mathrm{d}y=0$

而 $2\iint_D \mathrm{d}x\mathrm{d}y=2\pi R^2$，故 $I=\frac{\pi}{4}R^4+2\pi R^2.$

五、【解】 依题设 $H=x+t, Y=rx$

(1) 这是以效用函数为目标函数，以 $H=x+t$ 为约束条件的极值问题，作拉格朗日函数，并把效用函数中的 Y 以 rx 代入，有

$F(x,t)=atrx-br^2x^2-ct^2+\lambda(x+t-H).$

令

$$\begin{cases}\dfrac{\partial F}{\partial x}=art-2br^2x+\lambda=0,\\ \dfrac{\partial F}{\partial t}=arx-2ct+\lambda=0,\\ x+t-H=0,\end{cases}$$

可解得

$$x_0=\frac{(ar+2c)H}{2(ar+br^2+c)}\text{(小时)}. \qquad (1)$$

因驻点惟一，而实际问题有最大值，故每天工作时数为 x_0 时，效用最大.

(2) 由于征收税率为 $t(0<t<1)$ 的收入税，消费者所交税额

为 tY，其每天的收入为

$$Y - tY = (1-t)Y = (1-t)rx.$$

若令 $r_t = (1-t)r$，则用 r_t 代替(1)式中的 r，便可得到纳税后的日工作时数

$$x_t = \frac{(ar_t + 2c)H}{2(ar_t + br_t^2 + c)}(\text{小时}).$$

六、【解】 $y' = \frac{x^2 + x}{1 + x^2} e^{\frac{\pi}{2} + \arctan x}$

令 $y' = 0$，得驻点 $x_1 = 0, x_2 = -1$.

列表

x	$(-\infty, -1)$	-1	$(-1,0)$	0	$(0, +\infty)$
y'	+	0	−	0	+
y	↗	$-2e^{\frac{\pi}{4}}$	↘	$-e^{\frac{\pi}{2}}$	↗

由此可见，递增区间为 $(-\infty, -1)$，$(0, +\infty)$；递减区间为 $(-1,0)$.

极小值为 $f(0) = -e^{\frac{\pi}{2}}$；极大植为 $f(-1) = -2e^{\frac{\pi}{4}}$.

由于

$$a_1 = \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x} = e^{\pi},$$

$$b_1 = \lim_{x\to+\infty}[f(x) - a_1 x] = 2e^{\pi}$$

$$a_2 = \lim_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x} = 1,$$

$$b_2 = \lim_{x\to-\infty}[f(x) - a_2 x] = -2$$

可见渐近线为

$$y_1 = a_1 x + b_1 = e^{\pi}(x-2)$$

$$y_2 = a_2 x + b_2 = x - 2.$$

七、【解】 (1) 设等差数列$\{a_n\}$的公差为d，即

$$a_n = a_0 + nd \qquad n = 1,2,\cdots \qquad (*)$$

由此可知

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{a_0+(n+1)d}{a_0+nd} = 1$$

故可得幂级数$\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$的收敛半径$r = 1$

(2) 因为由($*$)式可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} = a_0\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} + d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2a_0 + d\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$$

所以我们只须计算$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n}$

由于

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{2^n} = \frac{x}{2-x} \quad x\in(-2,2)$$

逐项求导，有

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{2^n} = \frac{2}{(2-x)^2}$$

上式中取$x = 1$，即得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{2^n} = 2$$

于是可得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{2^n} = 2(a_0+d).$$

八、【证】 令$F(x) = f(x) - \dfrac{x}{1+x^2}$

显然$F(x)$在$[0,+\infty)$上连续，在$[0,+\infty)$内可导

又由 $0\leqslant f(x)\leqslant\dfrac{x}{1+x^2}$，可知 $f(0) = 0$

$\because \quad \lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x}{1+x^2}=0$ ，可知 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=0$

$\therefore F(0)=0,\ \lim\limits_{x\to+\infty}F(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\dfrac{x}{1+x^2}]=0$

可知 $F(x)$ 满足洛尔定理，于是 $\exists\,\xi\in(0,+\infty)$，使得

$$F'(\xi)=0,\quad 即\ f'(\xi)=\frac{1-\xi^2}{(1+\xi^2)^2}.$$

九、【解】 (1)$\boldsymbol{A}[\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3]=[\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1,\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2,\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3]=[\boldsymbol{\alpha}_1,0\boldsymbol{\alpha}_2,-\boldsymbol{\alpha}_3]$

$$\Rightarrow \boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&-2\\2&-2&-1\\2&1&2\end{bmatrix}^{-1}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1&0&2\\2&0&1\\2&0&-2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&2&2\\2&-2&1\\-2&-1&2\end{bmatrix}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-1&0&2\\0&1&2\\2&2&0\end{bmatrix}.$$

(2) 令 $\eta_1=-2\boldsymbol{\alpha}_2,\ \eta_2=3\boldsymbol{\alpha}_3,\ \eta_3=\boldsymbol{\alpha}_1$，分别为特征值 $0,-1,1$ 对应的特征向量，于是

$$A[\eta_1,\eta_2,\eta_3]=[0\eta_1,(-1)\eta_2,\eta_3]=[\eta_1,\eta_2,\eta_3]\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

即 $AP=P\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$，故 $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&-1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$.

十、【证】 设 $k_1\boldsymbol{\beta}_1+k_2\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\beta}_s=0$，即

$k_1\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{A}\boldsymbol{\alpha}_s=0$,

即

$$\boldsymbol{A}(k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots+k_s\boldsymbol{\alpha}_s)=0.$$

由于 $\boldsymbol{A}$ 是列满秩，故齐次方程组 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}=0$ 仅有零解.因此

$$k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+\cdots k_s\boldsymbol{\alpha}_s=0.$$