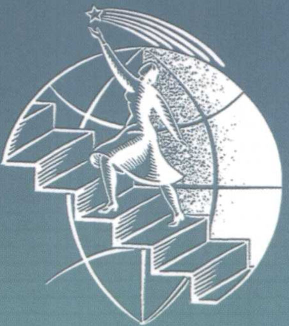
高职高专公共课教材

GAODENG SHUXUE

高等数学

（下册）

合肥工业大学数学教研室　编



合肥工业大学出版社

高职高专公共课教材

高 等 数 学

下 册

合肥工业大学数学教研室 编

合肥工业大学出版社

内 容 提 要

本书根据教育部颁发的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》，并结合《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》有关高等数学课程的内容要求编写而成. 全书分上、下两册，共计十章. 上册五章为：函数与极限，导数与微分，微分学应用，不定积分，定积分及其应用；下册五章为：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，无穷级数，微分方程. 本书在每一节后面都配有习题，各章末尾还另给出若干复习题，供学生学完该章后复习和小结时进行自我检测.

本书既是高等专科学校、高等职业技术学院、成人高等教育学院等院校理工科各专业的教材或参考书，也可供经管类专业使用.

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/数学教研室编. —合肥：合肥工业大学出版社，2003.5

ISBN7-81093-000-1

Ⅰ.高… Ⅱ.数… Ⅲ.高等数学—高等学校：技术学校—教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2003)第 032874 号

高等数学(下册)

合肥工业大学数学教研室 编

出 版	合肥工业大学出版社
地 址	合肥市屯溪路 193 号
电 话	总编室：0551-2903038　　发行部：0551-2903198
版 次	2003 年 5 月第 1 版　2003 年 5 月第 1 次印刷
开 本	850×1168　1/32　**印张**　6.75　**字数**　170 千字
发 行	全国新华书店
印 刷	合肥远东印务有限责任公司
邮 编	230009
网 址	www.hfut.edu.cn　**e-mail**　press@hfut.edu.cn

ISBN 7-81093-000-1/O·6　　定价：22.00 元(全二册)

前 言

随着21世纪我国对各类人才需求的不断增加，我国各个层次的高等教育，尤其是高等专科及职业技术教育这一层次必将得到长足的发展. 面临这种新情况，校内外从事高等专科教育和高等职业技术教育的老师和接受此种教育的学生都非常渴望有一套合适的高等数学教材. 为此，从2000年开始我们便筹划编写这套教材，经反复修改，现已出版，但愿它能在一定程度上满足广大教师和学生教与学的需要.

考虑到高等专科教育和职业技术教育主要是培养和造就一大批应用型的人才，而且其中有相当一部分学生今后还需要继续不断地深造，结合高等数学课程本身的特点，本书的内容基本上是按照教育部颁发的高等工程专科学校《高等数学课程教学基本要求》，并结合《全国各类成人高等学校招生复习考试大纲——专科起点升本科》有关高等数学课程的内容来进行编写的.

本书在编写过程中，力求做到：突出重点、深入浅出、删繁就简、注重应用. 对重要概念如函数的极限、连续、微分、积分等尽可能从具体问题引入，抽象成一般概念后，再将其应用到实际问题中去. 在强调基本理论的系统性、完整性、统一性的同时，对许多定理的证明和推导，除非是特别重要的、必不可少的，一般不过分追求严密性，而改用直观的方法来解释其含义. 为了便于自学，书中例题的配置尽量做到由浅入深、循序渐进.

全书共计十章，分为上、下两册. 上册五章包括：函数与极限，导数与微分，微分学应用，不定积分，定积分及其应用；下册五章包括：向量代数与空间解析几何，多元函数微分学，重积分，无穷级数，微分方程. 本书在每一节后面都配有习题，各章末尾还另外给

出若干复习题，供学生学完该章后复习和小结时进行自我检测.

本书在编写过程中自始至终得到合肥工业大学数学系的领导和很多老师的大力支持和帮助，其中苏化明教授、朱士信教授曾多次过问此事并参与提纲的讨论，在此表示感谢. 本书由以下同志具体执笔：邬弘毅教授、潘杰副教授、唐烁副教授、孙胜先副教授. 全书的统稿工作由潘杰副教授负责.

书中如有不妥之处，请读者批评指正.

编　者

2003 年 5 月

目　录

第六章　向量代数与空间解析几何

本章是为下一章多元函数微积分服务的. 我们首先引进空间直角坐标系，介绍向量代数的基本知识，再通过向量代数来研究空间直线、平面及常用的空间曲线与曲面.

第一节　空间直角坐标系与向量的概念

一、空间直角坐标系

我们知道，用代数的方法来处理平面几何问题的桥梁是平面直角坐标系. 因为通过它，可以把平面上的点和有序数组联系起来. 现在，要用代数方法来处理空间几何图形，完全可以借助于类似的思想，通过建立空间直角坐标系，来实现空间中的点和有序数组之间的一一对应关系.

在空间任取一点 O，过点 O 作三条相互垂直的数轴（通常具有相同的长度单位），其中 O 点为三个数轴的原点，这样就建立了一个空间直角坐标系. 这三个数轴分别称为 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）、z 轴（竖轴），统称为坐标轴. O 点称为坐标原点. 坐标轴的正向规定如下：当右手的大拇指、食指与中指两两垂直时，如果大拇指指向 x 轴的正向，食指指向 y 轴的正向，则中指的方向为 z 轴的正向，这样的坐标为右手系（图 6－1）.

任意两条坐标轴所确定的平面称为坐标面. 例如，x 轴与 y 轴确定一个坐标面，这个坐标面称为 xOy 坐标面. 类似地有 yOz、zOx 坐标面. 三个坐标面把空间分为八个部分，每一部分称为一个

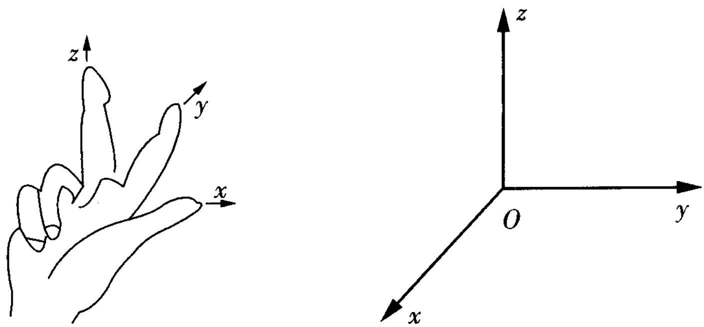


图 6－1

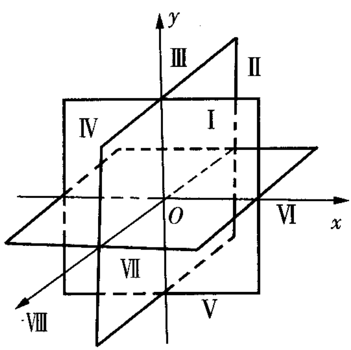


图 6－2

卦限(图 6－2). xOy 面上的四个部分,含有 x 轴正向、y 轴正向和 z 轴正向的那个卦限称为第一卦限,其他三个部分,从上向下看按逆时针方向,依次称为第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限;xOy 面下方且在第Ⅰ卦限下方的那个卦限称为第Ⅴ卦限,在第Ⅱ、第Ⅲ、第Ⅳ卦限下方的那些卦限分别称为第Ⅵ、第Ⅶ、第Ⅷ卦限.

有了空间直角坐标系后,我们可以把空间中的点代数化,即引进点的坐标.

设 M 为空间中的任意一点,过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴,交点依次为 P、Q、R,这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标分别为 x、y、z,于是空间一点 M 就惟一地确定了一个有序数组 (x,y,z);反之,当给定一个有序数组 (x,y,z),在 x 轴、y 轴、z 轴上依次能确定三点 P、Q、R,过三点分别作与 x 轴、y 轴、z 轴垂直的平面,这三个平面的交点 M 便是有序数组 (x,y,z) 确定的点. 由此可见,建立了空间直角坐标系以后,空间中的点与有序数组 (x,y,z) 之间就建立了一一对应的关系. 我们称有序数组 (x,y,z) 为点 M

的直角坐标，记作 $M(x,y,z)$. x、y、z 分别称为点 M 的横坐标、纵坐标、竖坐标(图 6－3).

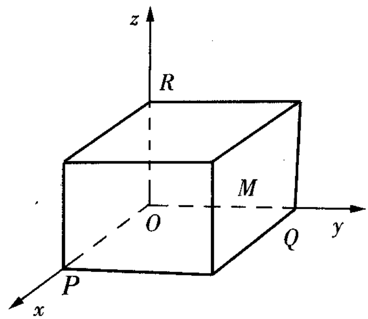


图 6－3

位于三坐标轴及三坐标面上的点的坐标具有如下特征：

x 轴、y 轴、z 轴上点的坐标分别为 $(x,0,0)$、$(0,y,0)$、$(0,0,y)$；

xOy、yOz、zOx 上的点的坐标分别是 $(x,y,0)$、$(0,y,z)$、$(x,0,z)$，原点坐标为 $(0,0,0)$.

空间每个卦限内，点的坐标 (x,y,z) 的符号如下：

Ⅰ、(＋，＋，＋)，Ⅱ、(－，＋，＋)，Ⅲ、(－，－，＋)，Ⅳ、(＋，－，＋)，Ⅴ、(＋，＋，－)，Ⅵ、(－，＋，－)，Ⅶ、(－，－，－)，Ⅷ(＋，－，－).

二、两点间的距离公式

已知空间两点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 和 $M_2(x_2,y_2,z_2)$，过 M_1、M_2 各作三个分别垂直于三条坐标轴的平面，这六个平面围成一个以 M_1M_2 为对角线的长方体(图 6－4).

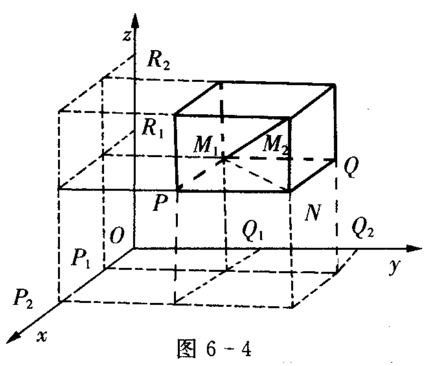


图 6－4

两点 M_1、M_2 的距离为

$$
\begin{aligned}
d &= |M_1M_2| = \sqrt{|M_1N|^2 + |NM_2|^2} \\
&= \sqrt{|M_1P|^2 + |PN|^2 + |NM_2|^2} \\
&= \sqrt{|P_1P_2|^2 + |Q_1Q_2|^2 + |R_1R_1|^2} \\
&= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.
\end{aligned}
$$

三、向量的概念

1. 向量的基本概念

我们知道，有许多物理量，例如物体运动的速度、加速度，物体所受的力等，它们既有大小又有方向，这样的量称为向量.

向量常用一个有向线段来表示. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向. 以 A 为起点，B 为终点的有向线段所表示的向量通常记作$\overrightarrow{AB}$. 有时用一个在上面加箭头的字母或者用一个粗体字母来表示向量，如 $\vec{a}$、$\vec{b}$、$\vec{F}$ 或 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{F}$ 等等.

向量的大小称为向量的模（或称为向量的长度），向量$\overrightarrow{AB}$、$\boldsymbol{a}$ 的模依次记作 $|\overrightarrow{AB}|$、$|\boldsymbol{a}|$. 模为 1 的向量称为单位向量，模为 0 的向量称为零向量，记为 $\vec{0}$ 或 $\boldsymbol{0}$，零向量的方向是任意的.

在许多实际问题中，向量与起点无关，这种向量称为自由向量. 本书只讨论自由向量（简称向量）.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的模相等且方向相同，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$.

设 $\boldsymbol{a}$ 为非零向量，与 $\boldsymbol{a}$ 的模相等且方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{a}$.

2. 向量的线性运算

（1）向量的加法

① 平行四边形法则：根据力的平行四边形法则，我们定义向量的加法如下：

设向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 不平行，任取一点 O，作向量 $\overrightarrow{OA}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{OB}=\boldsymbol{b}$. 以 OA，OB 为边作一个平行四边形 $OACB$，对角线向量 $\boldsymbol{C}=\overrightarrow{OC}$ 称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 6－5）. 这种求和的方法称为平行四边形法则.

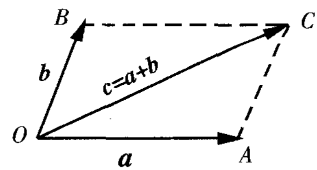


图 6－5

② 三角形法则：由于向量可以平行移动，所以，如果把 $\boldsymbol{b}$ 平行移动使其起点与 $\boldsymbol{a}$ 的终点重合，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量就是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和. 这种求和的方法称为三角形法则（图 6－6）.

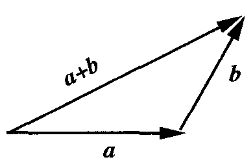


图 6－6

对于两个平行向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，向量加法的平行四边形法则、三角形法则同样适用，不过这时的 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 与 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 在同一条直线上.

容易证明，向量的加法满足下列运算规律：

① $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{0}=\boldsymbol{a}$；

② $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{a})=\boldsymbol{0}$；

③ 交换律：$\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

④ 结合律：$(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

设 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 为两向量，$-\boldsymbol{b}$ 是 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，则规定向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

向量的减法也可按三角形法则进行，只要把 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点放在一起，$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 即是以 $\boldsymbol{b}$ 的终点为起点，以 $\boldsymbol{a}$ 的终点为终点的向量（图 6－7）.

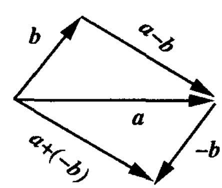


图 6－7

（2）向量与数的乘积

设 λ 是一实数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积是一个向量，记为 $\lambda\boldsymbol{a}$，称为向量与数的乘积. 规定如下：

当 $\lambda > 0$ 时，向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda \boldsymbol{a}| = \lambda |\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda = 0$ 时，向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 是零向量；

当 $\lambda < 0$ 时，向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，向量 $\lambda \boldsymbol{a}$ 的模 $|\lambda \boldsymbol{a}| = |\lambda||\boldsymbol{a}|$.

由向量与数的乘积的定义可得两个重要的结论：

① 两个非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件是 $\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{b} (\lambda \neq 0)$.

② 设 $\boldsymbol{a}$ 是非零向量，$\boldsymbol{a}^0$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 方向相同的单位向量，则 $\boldsymbol{a}^0 = \dfrac{1}{|\boldsymbol{a}|}\boldsymbol{a}$.

容易证明，向量与数的乘法满足如下规律：

① 结合律：$\lambda(\mu \boldsymbol{a}) = (\lambda\mu)\boldsymbol{a} = \mu(\lambda \boldsymbol{a})$；

② 分配律：$(\lambda + \mu)\boldsymbol{a} = \lambda \boldsymbol{a} + \mu \boldsymbol{a}$；

$$\lambda(\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) = \lambda \boldsymbol{a} + \lambda \boldsymbol{b}.$$

四、向量的坐标

1. 基本单位向量

在空间给定一个直角坐标系 $O-xyz$，以 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 分别表示沿 x 轴、y 轴及 z 轴正方向的单位向量（如图 6-8）. 则称 $\boldsymbol{i}$、$\boldsymbol{j}$、$\boldsymbol{k}$ 为基本单位向量.

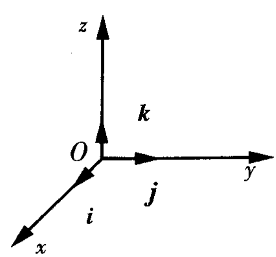


图 6-8

2. 向量的坐标

设在空间直角坐标系中，点 A、B 的坐标分别为 (x_1, y_1, z_1)、(x_2, y_2, z_2)（如图 6-9），则由向量的加法及数与向量的乘法知：

$$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AF}$$

$$= \overrightarrow{P_1P_2} + \overrightarrow{Q_1Q_2} + \overrightarrow{R_1R_2}$$

$$= (x_2 - x_1)\boldsymbol{i} + (y_2 - y_1)\boldsymbol{j} + (z_2 - z_1)\boldsymbol{k}. \qquad (1)$$

称(1)式为向量$\overrightarrow{AB}$的坐标表示式,并称$x_2 - x_1$、$y_2 - y_1$、$z_2 - z_1$为向量$\overrightarrow{AB}$的坐标,也称它为向量$\overrightarrow{AB}$在x轴、y轴、z轴上的投影,记$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\}$,即向量$\overrightarrow{AB}$的坐标为终点的坐标减去起点的坐标.

特别地,如果向量$\overrightarrow{AB}$的起点A位于坐标原点,则向量的坐标与终点B的坐标相同.

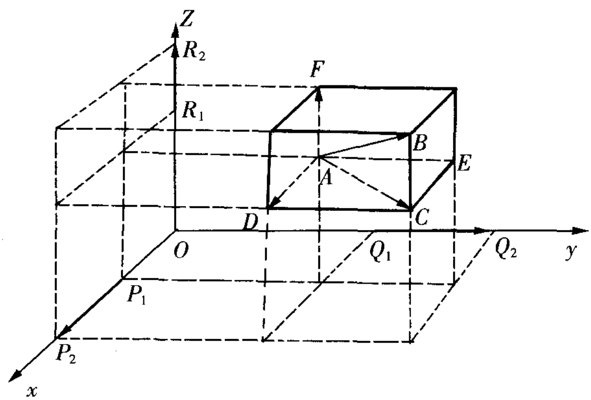


图 6 - 9

3. 方向角与方向余弦

为了表示向量的方向,我们把向量$\overrightarrow{AB}$与三条坐标轴正向的夹角称为向量的方向角,分别记为α,β,γ. 规定$0 \leqslant \alpha,\beta,\gamma \leqslant \pi$,并称$\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma$为向量$\overrightarrow{AB}$的方向余弦.

由图 6 - 9 可知,得

$$\cos\alpha = \frac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{x_2 - x_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \qquad (2)$$

$$\cos\beta = \frac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{y_2 - y_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}; \qquad (3)$$

$$\cos\gamma = \frac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{AB}|}$$

$$= \frac{z_2 - z_1}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}}. \qquad (4)$$

由(2),(3),(4),我们有:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \qquad (5)$$

例 1 已知 $A(1,0,-1)$、$B(-1,-1,-2)$,试求:

(1) 向量$\overrightarrow{AB}$ 的坐标;

(2)A、B 两点间的距离;

(3) $\overrightarrow{AB}$ 的方向余弦;

(4) 与$\overrightarrow{AB}$ 方向相同的单位向量.

解 (1) $\overrightarrow{AB} = (-1-1)\boldsymbol{i} + (-1-0)\boldsymbol{j} + (-2-(-1))\boldsymbol{k}$

$= -2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}$;

(2) $d = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(-2)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$;

(3) $\cos\alpha = \dfrac{x_2 - x_1}{|\overrightarrow{AB}|} = -\dfrac{2}{\sqrt{6}}, \cos\beta = \dfrac{y_2 - y_1}{|\overrightarrow{AB}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$,

$\cos\gamma = \dfrac{z_2 - z_1}{|\overrightarrow{AB}|} = -\dfrac{1}{\sqrt{6}}$;

(4) $\overrightarrow{AB}^0 = \dfrac{1}{|\overrightarrow{AB}|}\overrightarrow{AB} = \dfrac{1}{\sqrt{6}}(-2\boldsymbol{i} - \boldsymbol{j} - \boldsymbol{k})$.