

经济类专业
研究生教材

高级宏观经济学 动态分析基础

Methods of Dynamic Analysis
in Advanced Macroeconomics

◇ 崔殿超 编著



中国财政经济出版社



F015/88

2008

经济类专业
研究生教材

高级宏观经济学 动态分析基础

Methods of Dynamic Analysis
in Advanced Macroeconomics

◇ 崔殿超 编著



中国财政经济出版社

图书在版编目 (CIP) 数据

高级宏观经济学动态分析基础/崔殿超编著. —北京: 中国财政经济出版社,
2008.5

经济类专业研究生教材

ISBN 978 - 7 - 5095 - 0621 - 9

I. 高… II. 崔… III. 宏观经济学 - 动态分析 (经济学) - 研究生 - 教材 IV. F015

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (2008) 第 051515 号

中国财政经济出版社出版

URL: <http://www.cfeph.cn>

E-mail: cfeph@cfeph.cn

(版权所有 翻印必究)

社址: 北京市海淀区阜成路甲 28 号 邮政编码: 100036

发行处电话: 88190406 财经书店电话: 64033436

北京财经印刷厂印刷 各地新华书店经销

787 × 960 毫米 16 开 22.75 印张 380 000 字

2008 年 7 月第 1 版 2008 年 7 月北京第 1 次印刷

印数: 1—3 000 定价: 45.00 元

ISBN 978 - 7 - 5095 - 0621 - 9/F·0507

(图书出现印装问题, 本社负责调换)



前言

众所周知,进入现代经济学殿堂遇到的第一道门槛就是数学,不掌握数学知识,只能学到经济学最初级的层次,连基本的数理模型结构都不了解。这样就多少有一种被排除在经济学最高层次之外的感觉,心头始终被经济学的深奥和神秘所笼罩。

本书正是为解决这个问题而作。本书的定位是为本科生、硕士生、博士生以及经济学家学习高级宏观经济学提供动态分析方面的数学知识。与本科层次的宏观经济学(可视为初级的!)相比,高级宏观经济学有两个突出的特点:一是高级宏观经济学有完整的数理结构,它建立在较高深和专业的数学基础上;二是高级宏观经济学反映了宏观经济理论的最新发展阶段(囊括了内生增长理论、新古典宏观经济学、新凯恩斯主义),后者因其普遍强调最优化的微观行为基础而强化了前述的第一个特点。因此,高级宏观经济学数理色彩非常浓厚。

最初是想把高级宏观经济学所用的全部数学汇总在一起出一本书,侧重点在一个“全”字,书名为《高级宏观经济学数学基础》,其内容涉及数学的十一门课:微积分、线性代数、测度论、概率论(含初等与高等)、随机过程、时间序列分析、复变函数与积分变换、微分方程(组)、差分方程(组)、最优控制论(含变分法、极大值原理、动态规划)、最优估计与预测理论(含卡尔曼滤波)。写作完成后发现书稿太厚,于是,将其一分为二,第一本名为《高级经济学数学基础》,由黑龙江大学出版社出版。第二本就是本书《高级宏观经济学动态分析基础》。

高级宏观经济学主要使用动态分析理论。动态分析理论包括两部分内容,其一是动态系统理论,其二是动态最优化理论。

动态系统理论包括微分方程、微分方程组、差分方程、差分方程组,它们是用来描述连续的和离散的动态系统及其变化的。此外,还有这些理论的扩



展。如第一章微分方程介绍了对数线性化与非线性微分方程的线性化；第二章线性微分方程组对鞍点均衡及动态稳定性、非线性微分方程组的相位图分析和线性化作了介绍；第三章差分方程引入了流行的滞后算子解法、随机线性差分方程、线性条件期望差分方程。

动态最优化理论包括变分法、最优控制论、动态规划、线性二次型问题、最优估计理论、随机线性二次型问题。最优状态估计理论包括线性最小方差估计、投影理论、在变量自身的滞后值上的投影、卡尔曼 (Kalman) 滤波与卡尔曼预测、含确定性控制的卡尔曼滤波和卡尔曼预测、稳态卡尔曼滤波和卡尔曼预测等内容。第七章的动态规划理论引入了布朗运动、伊藤积分、伊藤随机微分方程、伊藤引理等随机分析的内容，这是为了求解连续系统的随机动态规划。

本书是在我近几年来为研究生授课的讲义基础上增补修改而成的。作为一本教材，本书在内容选择、结构安排、繁简程度、重点等方面都考虑了学习高级宏观经济学需要和读者对象。高级宏观经济学使用的数学非常广泛，学生们只学完数学专业本科内容都难以满足这样高的知识要求，而经济学各专业的硕士研究生、博士研究生又大多来自非数学专业，两者反差巨大。本书的任务就是要消除课程要求与读者对象之间的反差，可谓任务艰巨，为此，作者在写作本书时突出了如下几个特色：

第一，内容全面。内容全是原书确立的特色，现在原书截成两本，作为其中的一本，本书虽不能提供高级宏观经济学所用的全部数学知识，但是，在本书所确定的范围——动态分析方面，本书的内容是全面的。

第二，相关知识交代的清楚。本书的一个原则是，凡是新出现的概念都做一个交代。如果某个概念需要的基础知识过多，也讲清楚该概念是否可以忽略。如果突然冒出像“线性状态调节器”这样的概念，又不给予任何解释，实在让学生摸不着头脑。这样的概念并不深奥，但没有解释就是一个困扰。

第三，讲解透彻。高级宏观经济学及其经济数学在模型推演中忽略的细节甚多，以至于这些教材比专业的数学教材还难读，由此产生的问题是学生学习时对某些推导步骤可能出现理解上的偏差。本书在可能产生理解困难和容易产生误解的问题上都进行了清楚的讲解，因此，本书是一本适合于自学的研究生教材。讲解透彻的目的也是借应用的机会多向学生传授一些数学基础知识，以弥补经济学专业的研究生掌握的数学知识实在太少的缺憾。所以，在本书中加入了很多细节性的推导。



第四，本书对随机模型所用的数学给予了特别的关注。近年来，高级宏观经济学中的随机模型越来越多，本书（包括附录）提供了这些随机模型所用的动态分析方面的数学知识，包括随机差分方程、线性期望差分方程、随机微分方程、最优估计、卡尔曼滤波和卡尔曼预测、随机动态规划、随机线性状态调节器、数学期望及性质、条件期望及性质等等。在这方面唯一的遗憾是用测度论表达的概率论没有包括进来，但是这在被截成的另一本书《高级经济学数学基础》中可以找到。

第五，本书增加了大量的附录。这些附录里的知识都是推导中使用的，它们的完整表述在《高级经济学数学基础》中。有了这些附录，本书在一定程度上形成了一个相对完整的体系。

本书的内容主要来自书后所列的参考文献，本书只是将其中对高级宏观经济学有用的知识重新组织编排并表述出来，以供学生学习之用。书中很多地方对引用的具体文献都作了明确的记载，如果还有疏漏之处，敬请相关作者谅解。书中还有作者自己对问题和知识的理解，如有不当之处，敬请读者批评指正。

崔殿超

2008年3月24日

目 录

第一篇 动态系统理论

第一章 微分方程	(3)
第一节 一阶线性微分方程及其解法	(3)
一、关于微分方程的一些基本知识	(3)
二、一阶线性微分方程	(5)
三、求解非齐次微分方程特解的一般方法	(10)
四、微分方程的几种解法	(11)
五、一阶微分方程的相位图及动态稳定性	(14)
第二节 二阶线性微分方程	(16)
一、高阶线性微分方程求解的理论基础	(16)
二、二阶非齐次线性微分方程的形式及特殊积分	(18)
三、二阶非齐次线性微分方程的余函数	(19)
四、二阶非齐次线性微分方程的通解	(21)
五、动态稳定性分析	(22)
六、具有可变项的二阶线性微分方程	(24)
第三节 微分方程的简化处理	(26)
一、二阶微分方程化为一阶微分方程组	(26)
二、非线性微分方程的线性近似	(27)
三、对数线性化 (对数线性近似)	(27)
附录: 将余函数的指数形式转化为三角函数形式	(30)
第二章 微分方程组	(33)



第一节 一阶线性微分方程组	(33)
一、线性微分方程组求解的基础理论	(33)
二、一阶线性微分方程组	(35)
三、一般一阶线性微分方程组	(45)
第二节 线性微分方程组的动态稳定性	(48)
一、动态稳定性分析的一些基本概念	(48)
二、均衡的分类	(50)
三、均衡动态稳定性的条件	(53)
四、鞍点均衡及其动态稳定性	(55)
五、一般线性微分方程组的动态稳定性	(58)
第三节 一阶非线性微分方程组	(59)
一、非线性微分方程组的相位图分析	(59)
二、非线性微分方程组线性化及局部稳定性	(61)
 第三章 差分方程	 (65)
第一节 一阶线性差分方程	(65)
一、差分方程及相关概念	(65)
二、一阶常系数常数项线性差分方程	(66)
三、一阶常系数可变项线性差分方程	(69)
四、一阶线性差分方程的前向解、后向解	(70)
五、一阶线性差分方程的动态稳定性	(72)
六、一阶非线性差分方程	(75)
第二节 二阶线性差分方程	(76)
一、高阶线性差分方程求解的理论基础	(76)
二、二阶线性差分方程及其特殊积分	(78)
三、二阶线性差分方程的余函数与通解	(79)
四、二阶线性差分方程的动态稳定性	(80)
五、具有可变项的二阶线性差分方程	(81)
第三节 线性差分方程与滞后算子	(82)
一、时间序列算子与滞后算子	(82)
二、一阶线性差分方程的滞后算子解法	(84)
三、二阶线性差分方程的滞后算子解法	(86)



四、 n 阶线性差分方程的滞后算子解法	(90)
第四节 线性随机差分方程	(92)
一、线性随机差分方程	(93)
二、协方差生成函数与谱密度函数的计算公式	(95)
三、一阶线性随机差分方程	(98)
四、二阶线性随机差分方程	(100)
第五节 线性条件期望差分方程	(102)
一、线性条件期望差分方程概述	(102)
二、一阶线性条件期望差分方程	(103)
三、二阶线性条件期望差分方程	(105)
附录一：随机过程简介	(108)
一、随机过程	(108)
二、随机过程的数字特征	(110)
三、马尔可夫链与马尔可夫过程	(112)
附录二：鞅理论	(113)
一、鞅的含义	(113)
二、鞅差序列	(115)
附录三：时间序列分析与白噪声过程	(116)
一、时间序列分析	(116)
二、白噪声过程	(116)
三、平稳时间序列的线性模型	(117)
四、单位根过程与随机游走过程	(119)
附录四：协方差生成函数和谱密度函数	(120)
一、平稳随机过程的自协方差生成函数	(120)
二、平稳随机过程的谱密度函数	(122)
三、互协方差生成函数和互谱密度函数	(125)
附录五：傅立叶变换	(128)
一、序列傅立叶变换	(129)
二、 Z 变换	(130)
第四章 差分方程组	(132)
第一节 一阶线性差分方程组	(132)



一、一阶线性差分方程组	(133)
二、一般一阶线性差分方程组	(138)
第二节 差分方程组的动态稳定性	(140)
一、线性差分方程组的动态稳定性	(140)
二、非线性差分方程组	(143)

第二篇 动态最优化理论

第五章 变分法	(149)
第一节 动态最优化与变分法	(149)
一、动态最优化与泛函	(149)
二、泛函的变分	(152)
三、泛函的极值与变分法	(153)
四、欧拉方程：泛函极值的必要条件	(154)
五、泛函极值的充分条件	(157)
第二节 不同情形下的泛函极值	(158)
一、欧拉方程的不同形式	(158)
二、多变量下的欧拉方程	(159)
三、可变端点下的泛函极值	(160)
四、泛函极值的角点问题	(163)
五、无限期界的泛函极值	(164)
六、有约束的泛函极值	(166)
附录一：用求导方法推导欧拉方程	(167)
附录二：矩阵的主子式与顺序主子式	(168)
附录三：海赛矩阵与海赛行列式	(170)

第六章 最优控制论	(172)
第一节 最优控制问题及其解法	(172)
一、最优控制问题：变分法与极大值原理	(172)
二、经济学中的最优控制论	(177)
三、最优控制论必要条件的推导	(181)



四、变分法与最优控制论最优性条件的等价性·····	(183)
第二节 最优控制论的扩展·····	(184)
一、不同边界条件的最优控制问题·····	(185)
二、目标泛函含终值项的最优控制问题·····	(189)
第三节 最优控制问题的经济学情形·····	(190)
一、含贴现的最优控制问题·····	(190)
二、无限期界的最优控制问题·····	(192)
第四节 有约束的最优控制问题·····	(195)
一、最优控制问题中约束条件的类型·····	(195)
二、一般泛函的不等式约束·····	(196)
三、积分泛函的等式约束·····	(197)
第五节 离散时间的最优控制问题·····	(199)
一、离散时间的最优控制问题·····	(199)
二、含贴现的离散时间最优控制问题·····	(202)
附录：含参变量积分及其求导·····	(204)
 第七章 动态规划·····	(207)
第一节 确定性下的动态规划·····	(207)
一、动态规划原理与贝尔曼方程·····	(207)
二、离散系统有限期界的动态规划·····	(210)
三、离散系统动态规划的经济学情形·····	(214)
四、连续系统有限期界的动态规划·····	(217)
五、连续系统动态规划的经济学情形·····	(219)
第二节 随机动态规划·····	(221)
一、离散系统随机动态规划的经济学情形·····	(221)
二、布朗运动·····	(225)
三、随机积分·····	(228)
四、伊藤积分·····	(231)
五、伊藤随机微分方程与伊藤引理·····	(232)
六、连续系统有限期界的随机动态规划·····	(236)
七、连续系统随机动态规划的经济学情形·····	(239)
附录一：斯蒂尔切斯积分简介·····	(242)



附录二: 随机变量的数学期望及性质	(242)
附录三: 随机变量的条件期望及其性质	(244)
附录四: 随机变量函数的期望和条件期望	(245)
第八章 线性二次型动态最优化	(247)
第一节 线性二次型问题	(247)
一、线性二次型问题及其优势	(248)
二、线性二次型问题的三种情形	(251)
三、经济学对线性二次型问题的应用	(252)
第二节 线性二次型动态最优化	(254)
一、连续定常系统的线性状态调节器问题	(254)
二、离散定常系统的线性状态调节器问题	(261)
三、离散系统贴现的线性状态调节器问题	(264)
四、闭环系统的稳定性	(267)
第三节 黎卡提方程的部分解法	(269)
一、迭代法: 逆向迭代	(269)
二、迭代法: 正向迭代	(270)
三、用拉格朗日函数求解矩阵 P	(271)
附录一: 分块矩阵的逆矩阵	(277)
附录二: 矩阵和向量的求导	(278)
附录三: 矩阵的迹函数求导	(280)
第九章 卡尔曼滤波与随机线性二次型问题	(282)
第一节 状态信息完全的随机线性状态调节器	(283)
一、随机线性状态调节器的极大化问题	(283)
二、用动态规划解随机线性状态调节器	(284)
三、确定性等价原理	(286)
第二节 线性最小方差估计与投影理论	(287)
一、随机向量的正交、不相关和相互独立	(287)
二、最优估计与最小方差估计	(290)
三、线性最小方差估计	(291)
四、线性最小方差估计的性质	(294)



五、线性最小方差估计的经济学应用·····	(295)
六、投影理论·····	(298)
七、在变量自身的滞后值上的正交投影·····	(304)
第三节 卡尔曼滤波与卡尔曼预测·····	(306)
一、卡尔曼滤波的基本方程·····	(306)
二、卡尔曼滤波基本方程的推导·····	(308)
三、卡尔曼预测：最优估计的经济学应用·····	(313)
第四节 含确定性控制的卡尔曼估计·····	(316)
一、含确定性控制的卡尔曼滤波·····	(316)
二、含确定性控制的卡尔曼预测·····	(321)
三、含确定性控制噪声无关的卡尔曼估计·····	(321)
四、稳态卡尔曼估计·····	(324)
第五节 状态信息不完全的随机线性状态调节器·····	(326)
一、随机线性状态调节器模型的基本假定·····	(326)
二、用动态规划解随机线性状态调节器·····	(329)
三、随机线性状态调节器的分离定理·····	(333)
四、线性状态调节器的经济学应用：线性二次逼近·····	(334)
附录：正态分布的随机向量（多元正态分布）·····	(338)
参考文献·····	(344)

第一篇 动态系统理论



第一章

微分方程

对于连续时间系统一般都使用微分方程来描述，因此，微分方程在动态分析中有很重要的地位。本章主要介绍经济学常用的线性微分方程，一般情况下，这是可以得到解析解的。第一节是一阶线性微分方程，包括一些特殊一阶线性微分方程的解法、非齐次线性微分方程常用的尝试法或待定系数法。第二节是二阶线性微分方程，根据特征根的不同情况区分几种不同的解的形式。第三节是非线性方程的线性化和降阶处理，同时介绍了高级宏观经济学使用的对数线性化方法。

第一节

一阶线性微分方程及其解法

一、关于微分方程的一些基本知识

(一) 微分方程及相关概念

微分方程：如果一个方程含有未知函数的导数或微分，则该方程称为微分方程。它用来表示未知函数与它的一阶或高阶导数之间明确或隐含的关系。解微分方程就是求未知函数。在经济学中，未知函数大多是某一变量关于时间 t



的函数，它是用来表示该变量随时间 t 的动态变化。如， $\dot{y} = 8y - 2y^2$ ($\dot{y}$ 表示 y 对时间 t 的导数，它是 $\frac{dy}{dt}$ 的简写)、 $\frac{dy}{dt} + vy = u$ 。由于 y 是时间 t 的函数，所以， $\frac{dy}{dt} + vy = u$ 也可以表示为 $\frac{dy(t)}{dt} + vy(t) = u$ 。

理解经济学中的微分方程要注意两点：第一，时间是连续变化的，变量也随时间连续变化，以此表示的模型被称为连续时间模型；第二，它是用来进行动态分析的，其动态性表现为变量随时间（连续）变化。

常微分方程：未知函数为一元函数的微分方程称为常微分方程。

偏微分方程：未知函数为多元函数从而含有偏导数的微分方程称为偏微分方程。

微分方程的阶：微分方程中出现的各阶导数的最高阶数，称为微分方程的阶。

线性微分方程：未知函数包括它的各阶导数都是一次的微分方程称为线性微分方程，否则是非线性的。

自控（或自治）微分方程：微分方程中不显含时间 t ，就是自控微分方程，也叫自治微分方程，如， $\dot{x} = f(x)$ ，而 $\dot{x} = f(t, x)$ 不是自控微分方程。自控微分方程表示的系统称为自控系统。经济学涉及的基本上都是自控系统。

至于齐次方程与非齐次方程的含义与一般方程相同。

（二）微分方程的解

微分方程的解或积分：根据微分方程得到的不再含有导数和微分的表示未知函数的方程，称为微分方程的解。它被定义在一定的区间内，当自变量取这个区间内的任意值，它均满足微分方程。由于微分方程的求解与一定的积分运算有关，所以，微分方程的解也叫微分方程的积分。

初值条件：指微分方程的解中自变量 t 取某一确定的值而得到的因变量及因变量导数的值。如 $x(t_0) = x_0$ ， $dx(t_0)/dt$ 。微分方程的解表示的是一个变量的（整个）变化过程，所以，必须给定起点的值，才能得到这个变化过程。

经济学使用的微分方程解的一般结构：一般而言，经济学使用的微分方程的解可以分为两部分，如果用 $y(t)$ 表示微分方程的解，则 $y(t) = y_p + y_c$ ，其中 y_p 被称为特殊积分，为 $y(t)$ 的均衡水平，它是微分方程的一个特解， y_c 被称为余函数，表示对均衡的偏离。

从数学的角度看，一阶和高阶线性微分方程（包括常系数、常数项和变系数、可变量项的）的解都具有 $y(t) = y_p + y_c$ 结构，即使是变系数、不含未知函