

隧道力学

——涌水力学——

【日】樗木 武著

侯敬英 译

江国正 校

刘克强

武钢矿山研究所情报室

一九八二年

~~26/26.3~~

U45/7.3

目 录

第四篇	湧水力学	2
第十二章	隧道湧水	2
第一节	序 言	2
第二节	湧水特性	3
第三节	地下水流连续方程及运动方程	5
第四节	平面稳定湧水的有限单元法	
	解析理论	11
第五节	湧出点推断法	21
第六节	平面稳定湧水池还原有限单元法	
	解析理论	26
第七节	隧道湧水的平面正常解析	33
第八节	平面稳定湧水的解析	35
第九节	三维稳定湧水的解析	42
	参考文献	49

第四篇 湧水力学

第十二章 隧道湧水

第一节 序 言

在隧道施工过程中或完工后引起大小不同的湧水。从内容上来看这个湧水可分为地下滞水层湧水和地表水渗透湧水。

地下水的储集是由未固结的堆积层或破碎带中的水被不透水性或难透水的土层阻断时，而在节理或裂隙特别发育多裂隙的岩体中产生的。此时，如果隔水层仅存在于水滞层的底部，该滞水具有自由水面而成为非承压地下水。隔水层若存在于滞水的顶部，便成为压力水，而把它称为承压地下水。

在上部岩土层较浅的浅层隧道中，由於地表湖泊河流及海深等的水渗透到隧道位置，有的就向外涌出。特别是在隧道和地表水底面之间，有同透水性高的未固结堆积层或岩体裂隙、破碎带等联连时，它们就构成裂隙，引起大量湧水。

隧道湧水造成施工上及将来水的利用上各种不利影响，其主要内容如下：

- 1) 由於大量湧水引起工作面设备的淹没，或造成作业危险，而在等待湧水易下降，趨於稳定这一段时间里只好中断施工。
- 2) 在排水设备应付不了湧水量的情况下，造成坑内浸水，作业环境恶化，作业效率降低。
- 3) 由於湧水会引起工作面的围岩流失冒落或产生松弛。
- 4) 由於湧水而促使破碎带或裂隙剥落，从而引起冒顶或侧壁崩塌。
- 5) 由於岩体松弛，随着湿润而带来粘土的膨胀，使作用於支护上的地压增大。

6) 没有凝聚力的围岩, 由于透水而造成流动, 最后造成围岩不稳固。

7) 由于滴水降低支护基础地基的支承能力或引起下沉, 增加支护冒落的危险性。

8) 由于不断滴水而降低地下水面, 因之造成水流枯竭, 给工农业用水或生活用水等造成取水困难。此外, 在海岸附近随着地下水面降低, 引起海水渗透到陆地的深处造成多方面的危害。

第二节 滴水特性

地下水涌出的基本形式为初期滴水→衰减滴水→稳定滴水。随着开挖面扩大, 滴水断面的扩大, 与此同时, 也形成滴水量的增大。最后把滴水路径中的障碍物完全冲击透达到滴水量的最大值。把此间的滴水叫作初始滴水, 而把这个最大流量叫作初始最大滴水量。当已达到初始最大滴水量之后, 滴水量就逐渐下降, 这一期间的滴水称为衰减滴水。而终于减小到稳定的滴水量成为稳定滴水平衡状态, 而把它叫作稳定滴水, 其流量则称之为稳定滴水量。图 12.1 是把如上内容的滴水量 Q 取为纵轴, 时间 t 取为横轴, 表示出的模型。滴水曲线的形状及稳定滴水量的大小是因补给水的有无及其量而异。

只在一定时期有供给能力的一部分补给水流的滴水, 其滴水曲线如图 12.2 所示。即从一时补给水流的滴水, 在枯竭前后滴水曲线的变化情况, 而且瞬时间补给水不枯竭, 存在着适当的过渡状态。补给水的流量在十分近似初始最大滴水量的情况下, 当达到初始最大滴水量之后, 滴水曲线变成水平, 而保持补给平衡状态。

以上是对隧道轴向方向处于停止掘进状态来探讨的滴水特性。然而, 实际上工作面是随着掘进的发展而推进的, 由于流

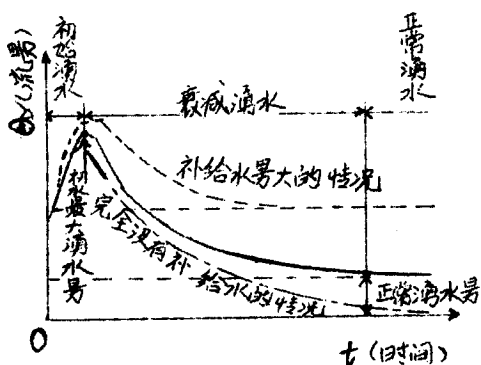


图12.1 涌水曲线的基本形式

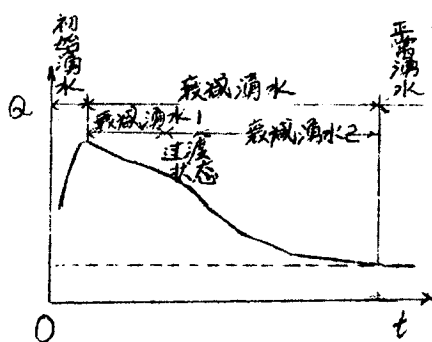


图12.2 具有一时补给水流情况的涌水曲线

击断面的增大而发生新的涌水，因此，涌水曲线变为图12.3所示。即所有断面涌水量都相等而且可用图12.1的基本形式表示。

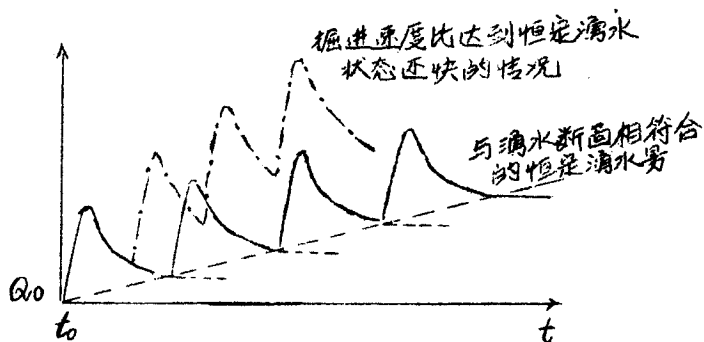


图12.3 隧道掘进过程中的涌水曲线

同时，掘进是以一定的速度分阶段进行的，这时，如果在各个掘进阶段上，若以十分稳定的速度向前掘进时，其涌水曲线则如图中实线所示。此外，在达到稳定涌水之前即掘进下一阶段时，涌水量经常大于稳定涌水量，形成如图中点划线所示的特性

况。

从实际隧道施工中得到的滴水曲线看，其滴水曲线基本形式，即使在同一条隧道中也未必都是一样的，由于在各掘进阶段赋水层、水压、渗透系数不一致，掘进速度也因地质条件或滴水状况不同等原因，而特别复杂。

第三节 地下水流连续方程及运动方程

A 连续方程

在三维非压缩粘性流体中有一微小立方体 $\delta x \delta y \delta z$ ，取其中心在 x, y, z 方向速度分量为 u, v, w ，密度为 ρ （图 12.4）。此时根据下式计算出流入、流出该微小六面体中的质量差。

$$\begin{aligned} & \rho u \delta y \delta z - \left\{ \rho u + \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) \delta x \right\} \delta y \delta z + \rho v \delta z \delta x \\ & - \left\{ \rho v + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) \delta y \right\} \delta z \delta x + \rho w \delta x \delta y - \left\{ \rho w + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \delta z \right\} \delta x \delta y \\ & = - \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho w) \right\} \delta x \delta y \delta z \quad (a) \end{aligned}$$

另一方面，随着质量 ρ 的变化，如取透水层的空隙率为 γ ，则由下式可以给出单位时间内的增加比率：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\rho \gamma \delta x \delta y \delta z) &= \left\{ \gamma \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \frac{\partial \gamma}{\partial t} + \frac{\partial \gamma}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} (\delta x) + \frac{\partial \gamma}{\partial y} \frac{\partial}{\partial t} (\delta y) \right. \\ & \left. + \frac{\partial \gamma}{\partial z} \frac{\partial}{\partial t} (\delta z) \right\} \delta x \delta y \delta z \quad (b) \end{aligned}$$

这里如把透水层的压缩率取为 α_m ，根据定义

$$\alpha_m = \frac{1}{\gamma} \cdot \frac{d(\gamma)}{d\rho} = \frac{1}{d\rho} \left(\frac{d(\delta x)}{\delta x} + \frac{d(\delta y)}{\delta y} + \frac{d(\delta z)}{\delta z} \right)$$

$$\therefore \frac{1}{\delta x} \frac{\partial}{\partial t}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{\partial}{\partial t}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{\partial}{\partial t}(\delta z)$$

$$= d m \rho g \frac{\partial h}{\partial t}$$

(c)

式中:

g 为重力加速度, $p = \rho g h$ (h : 为水头)

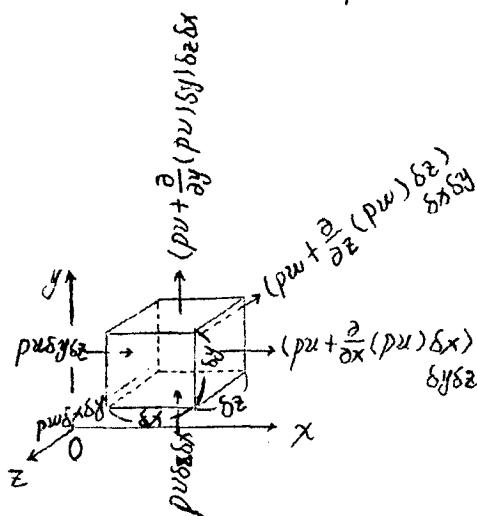


图 12.4

且取渗透水的压缩率为 α_w , 则 $\alpha_w = (dp/dp)/\rho$, 从而可得如下有关 $\partial p/\partial t$ 的关系式:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \alpha_w \rho \cdot \frac{\partial p}{\partial t} - \alpha_w \rho^2 g \cdot \frac{\partial h}{\partial t} \quad (d)$$

构成透水层的材料为泥粒及岩石等, 其压缩性与透水性或透水层相比可忽略不计。此时, $(1-r)$

$\delta x \delta y \delta z = \text{常数}$, 由此则:

$$d\{(1-r)\delta x \delta y \delta z\} = [(1-r)\left\{\frac{d(\delta x)}{\delta x} + \frac{d(\delta y)}{\delta y} + \frac{d(\delta z)}{\delta z}\right\} - dr]$$

$$\delta x \delta y \delta z = 0$$

$$\therefore \frac{\partial r}{\partial t} = (1-r) \left\{ \frac{1}{\delta x} \frac{\partial}{\partial t}(\delta x) + \frac{1}{\delta y} \frac{\partial}{\partial t}(\delta y) + \frac{1}{\delta z} \frac{\partial}{\partial t}(\delta z) \right\}$$

将式 (c) 代入上式则:

$$\frac{\partial r}{\partial t} = (1-r) \rho g d m \frac{\partial h}{\partial t} \quad (e)$$

把式 (c) ~ (e) 代入式 (b) 中则得:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho r \delta x \delta y \delta z) = \rho^2 g (\alpha_w r + d m) \frac{\partial h}{\partial t} \delta x \delta y \delta z \quad (f)$$

据质量守恒定律，便可说明由于式 (a) 的微小立方体中单位时间内的质量及在立方体中涌出的质量 $\rho g \delta x \delta y \delta z$ (g 为单位时间内单位体积的发生流量)，和式 (f) 单位时间内的质量增长是相等的。由此可得出下式：

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho w) - \rho g = -\rho^2 g(dw + dm) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (12.1)$$

此式即地下水流的连续方程。

当 ρ 不因场而变时，则：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - g = -\rho g(dw + dm) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (12.1')$$

对 $dw = dm = 0$ 的非压缩情况则为：

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} - g = 0 \quad (12.1'')$$

B 运动方程

取流体粒子在 x, y, z 方向速度分量为 u', v', w' 则由下式给出粘性流体运动方程²⁾：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u'}{\partial t} + u' \frac{\partial u'}{\partial x} + v' \frac{\partial u'}{\partial y} + w' \frac{\partial u'}{\partial z} &= X - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \nabla^2 u' + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial e'}{\partial x} \\ \frac{\partial v'}{\partial t} + u' \frac{\partial v'}{\partial x} + v' \frac{\partial v'}{\partial y} + w' \frac{\partial v'}{\partial z} &= Y - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \nabla^2 v' + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial e'}{\partial y} \\ \frac{\partial w'}{\partial t} + u' \frac{\partial w'}{\partial x} + v' \frac{\partial w'}{\partial y} + w' \frac{\partial w'}{\partial z} &= Z - \frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + \nu \nabla^2 w' + \frac{\gamma}{3} \frac{\partial e'}{\partial z} \end{aligned} \right\} (12.2)$$

式中， ν 为运动粘性系数， X, Y, Z 为 x, y, z 方向的质量力。

$$e' = \frac{\partial u'}{\partial x} + \frac{\partial v'}{\partial y} + \frac{\partial w'}{\partial z}$$

然而，式(12.2)各式右边的第3、4项为粘性摩擦力的项，这些都由实验决定；把它单位质量的粘性摩擦力用 F_x 、 F_y 、 F_z 符号表示。此外，对于力的势能 Ω ，其体积力 $\mathbf{X}$ 得用下式加以定义；

$$\mathbf{X} = [x \ y \ z]^T = -\text{grad } \Omega$$

因此，用下式定义势能

$$H = \frac{\Omega}{g} + \frac{p}{\rho g} \quad (12.3)$$

$$\text{则} \quad \begin{Bmatrix} X \\ Y \\ Z \end{Bmatrix} = - \begin{Bmatrix} g \frac{\partial H}{\partial x} - (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial x} \\ g \frac{\partial H}{\partial y} - (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial y} \\ g \frac{\partial H}{\partial z} - (1/\rho) \frac{\partial p}{\partial z} \end{Bmatrix} \quad (9)$$

进而把地下水流的表现流速改为 u ， v ， w ，它和流体粒子的速度之间，成立如下关系：

$$u = \gamma u', \quad v = \gamma v', \quad w = \gamma w' \quad (12.4)$$

将如上分析代入式(12.2)便可得如下式，

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{\gamma} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{\gamma^2} (u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z}) + g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{\rho} F_x &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{\gamma^2} (u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z}) + g \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{\rho} F_y &= 0 \\ \frac{1}{\gamma} \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{\gamma^2} (u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z}) + g \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{1}{\rho} F_z &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.5)$$

此即地下水流运动方程的一般式。

如把地下水流看成是非回转运动，旋度为零，而成立

$$\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial z} = 0. \quad \text{此时存在速度势能 } \phi,$$

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad w = -\frac{\partial \phi}{\partial z}$$

故對於式(12.5)左边第2项的()中可进行如下计算(此处的 U_n 为流线方向的速度分量)。

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} (U_n^2),$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial y} (U_n^2),$$

$$u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial z} (U_n^2) \quad (h)$$

其次，来分析粘性摩擦力项的问题。對於流速不大的地下水流，如认为粘性摩擦力和流速成比例，便可假定(达西原理)为：

$$F = \begin{Bmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{Bmatrix} = \rho g \begin{bmatrix} 1/K_{11} & 1/K_{12} & 1/K_{13} \\ 1/K_{21} & 1/K_{22} & 1/K_{23} \\ 1/K_{31} & 1/K_{32} & 1/K_{33} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u \\ v \\ w \end{Bmatrix} \quad (12.6)$$

式中， K_{ij} 为常数，可由实验确定，但都不是独立的。也就是说，把绝热体系中貯存於单位时间单位体积内的摩擦能量取为 F ：

$$\text{则 } dF = \left(\frac{\partial F}{\partial u} \right) du + \left(\frac{\partial F}{\partial v} \right) dv + \left(\frac{\partial F}{\partial w} \right) dw$$

这样就可以定义为 $F_x = \partial F / \partial u$, $F_y = \partial F / \partial v$, $F_z = \partial F / \partial w$
按此定义和式(12.6)则：

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \rho g \left(\frac{u}{K_{11}} + \frac{v}{K_{12}} + \frac{w}{K_{13}} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \rho g \left(\frac{u}{K_{21}} + \frac{v}{K_{22}} + \frac{w}{K_{23}} \right),$$

$$\frac{\partial F}{\partial w} = \rho g \left(\frac{u}{K_{31}} + \frac{v}{K_{32}} + \frac{w}{K_{33}} \right)$$

但由於 $\partial^2 F / (\partial u \partial v) = \partial^2 F / (\partial v \partial u)$, $\partial^2 F / (\partial v \partial w) = \partial^2 F / (\partial w \partial v)$, $\partial^2 F / (\partial w \partial u) = \partial^2 F / (\partial u \partial w)$ ，因此， K_{ij}

则成立如下关系式，

$$k_{ji} = k_{ij} \quad (i \neq j) \quad (12.7)$$

由此，式(12.6)的常数矩阵便完全对称，这时

$$F = \frac{1}{2} \rho g \left\{ \frac{u^2}{k_{11}} + \frac{v^2}{k_{22}} + \frac{w^2}{k_{33}} + 2 \left(\frac{uv}{k_{12}} + \frac{vw}{k_{23}} + \frac{wu}{k_{13}} \right) \right\} \quad (i)$$

把式(h), (i)代入式(12.5)则为：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial x} (v_n^2) + \gamma g \frac{\partial H}{\partial x} + \gamma g \left(\frac{u}{k_{11}} + \frac{v}{k_{12}} + \frac{w}{k_{13}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial y} (v_n^2) + \gamma g \frac{\partial H}{\partial y} + \gamma g \left(\frac{u}{k_{12}} + \frac{v}{k_{22}} + \frac{w}{k_{23}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial}{\partial z} (v_n^2) + \gamma g \frac{\partial H}{\partial z} + \gamma g \left(\frac{u}{k_{13}} + \frac{v}{k_{23}} + \frac{w}{k_{33}} \right) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.8)$$

透水层为正交各向异性，各向异性的主轴与x、y、z轴一致时，即使u、v、w中任何一个符号改变而摩擦能量F则始终不变。对此如利用式(i)则必为 $1/k_{12} = 1/k_{13} = 1/k_{23} = 0$ ，此时式(12.8)则为，

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_n^2}{\partial x} + \gamma g \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\gamma g}{k_x} u &= 0 \\ \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_n^2}{\partial y} + \gamma g \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{\gamma g}{k_y} v &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{1}{2r} \frac{\partial v_n^2}{\partial z} + \gamma g \frac{\partial H}{\partial z} + \frac{\gamma g}{k_z} w &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.8')$$

式中， $k_x = k_{11}$ ， $k_y = k_{22}$ ， $k_z = k_{33}$

由于流速小， v_n^2 项忽略不计，则：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\gamma g \partial H}{\partial x} + \frac{\gamma g u}{k_x} &= 0, & \frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\gamma g \partial H}{\partial y} + \frac{\gamma g v}{k_y} &= 0 \\ \frac{\partial w}{\partial t} + \frac{\gamma g \partial H}{\partial z} + \frac{\gamma g w}{k_z} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (12.8'')$$

对稳流由於 $\partial u / \partial t = \partial v / \partial t = \partial w / \partial t = 0$ ，故由上式可得；

$$u = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v = -k_y \frac{\partial H}{\partial y}, \quad w = -k_z \frac{\partial H}{\partial z} \quad (12.8)''$$

此外，根据式 $(12.8)''$ 的形式，显然 k_x, k_y, k_z 为各个轴向方向的透水系数。

C. 边界条件

湧水问题的边界条件有如下两种。

1) 固定条件：水头在边界上为已知的：

$$H = H_0 \quad (12.9)$$

2) 自由条件：流出量和流入量在边界上为已知的。也就是把 q_0 取为相当於单位时间单位面积的已知流出量和流入量，则由边界面上水的收支关系可得出如下条件式。

$$\mu^T \mu - q_0 = 0 \quad (12.10)$$

式中， $\mu^T = [\mu_x \quad \mu_y \quad \mu_z]$ (边界面外法线方向余弦)。

在式 (12.10) 中特别是当 $q_0 = 0$ 时，便没有由边界面流出流入的水，这说明是不透水边界。

對於有自由水面的地下水流就必须考虑到是否处于自由水面外法线方向有无水的流出流入、或雨水渗透等已知流入流出量等状态。因此，在自由水面上成立式 (12.10) 。另一方面由於自由水面等於大气压，因此，它的水头就等於位置的势能，从而式 (12.9) 成立。结果，自由水面是屬於用式 (12.9) (12.10) 两个条件式共同确定的一种特殊边界。

第四节 二维稳定湧水的有限单元法解析理论

A. 透水性方程及透水性矩阵

假定透水性为正交各向异性，且对流速的二次项忽略不计。这时则按前结果，求出二维稳定地下水流的基本方程；

连续方程:
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} - q = 0 \quad (12.11)$$

运动方程:
$$u = -k_x \frac{\partial H}{\partial x}, \quad v = -k_y \frac{\partial H}{\partial y} \quad (12.12)$$

边界条件式:
$$H = H_0 \text{ 或 } M_x u + M_y v - q_0 = 0 \quad (12.13)$$

把式 (12.12) 代入式 (12.11) 中则:

$$\frac{\partial}{\partial x} (k_x \frac{\partial H}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y} (k_y \frac{\partial H}{\partial y}) + q = 0 \quad (12.14)$$

这样就归结为从边界条件 (12.13) 来求解本式的问题了。然而, 直接解此微分方程是有困难的, 需要采用双重残差法或变分法等间接解析方法。这里使用变分法。也就是如把式 (12.14) 解释为尤拉方程, 则此问题成为由下式确定的泛函 π 的极值问题。

$$\pi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} - qH \right] dx dy \quad (12.15)$$

这样, 把二维地下水流体的解析区域和固体力学问题一样而分割成三角单元, 其中一个单元 ij 长如图 12.15 所示。图中的座标轴 x 、 y 和透水性的主轴一致, 且透水系数 k_x 、 k_y 在单元内部至少要取为定值。单元内的水头 H 系为 x 、 y 的函数, 根据其自由度可假定成

$$H = L_S a \quad (a)$$

式中, $L_S = [1 \quad x \quad y]$, $a^T = [a_1 \quad a_2 \quad a_3]$

如取各节点的水头为 H_i 、 H_j 、 H_k , 这样就可把待定系数 a 用这些节点水头表示, 再将其结果代入式 (a) 中便可得出:

$$H = F_S^e H^e \quad (12.16)$$

式中, $2\Delta F_s^e = [N_i \ N_j \ N_k]$, $H^e = [H_i \ H_j \ H_k]^T$

有关 Δ , N_m , a_m , b_m , c_m : 见式 (5.1) 的注解。如把单元 i 点对泛函 π 所起的作用取为 π^e , 则单元 i 点对于 π 泛函条件中的 $\partial\pi/\partial H_m$ ($m=i, j, k$) 所起的作用可按下式求得:

$$\frac{\partial\pi^e}{\partial H_m} = \iint \left\{ k_x \frac{\partial H}{\partial x} \frac{\partial}{\partial H_m} \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right) + k_y \frac{\partial H}{\partial y} \frac{\partial}{\partial H_m} \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right) - \beta \frac{\partial H}{\partial H_m} \right\} dx dy$$

将式 (12.16) 代入上式, 加以边积整理, $m=i, j, k$ 三式用矩阵形式表示如下:

$$\left\{ \partial\pi^e / \partial H_m \right\} = K^e H^e + Q^e \quad (12.17)$$

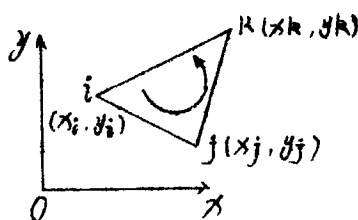


图 12.5

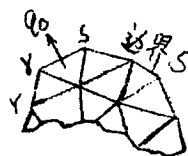
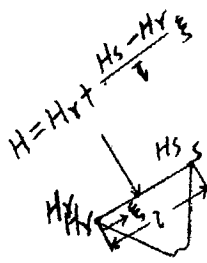


图 12.6

式中:

$$K^e = \frac{k_x}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_i^2 & \text{SYM} \\ b_i b_j & b_j^2 \\ b_i b_k & b_j b_k & b_k^2 \end{bmatrix} + \frac{k_y}{4\Delta} \begin{bmatrix} c_i^2 & \text{SYM} \\ c_i c_j & c_j^2 \\ c_i c_k & c_j c_k & c_k^2 \end{bmatrix}$$

而且, 右边的第 2 项 Q^e 为:

$$Q^e = \left\{ -\iint \beta \frac{\partial H}{\partial H_m} dx dy \right\} = [Q_i \ Q_j \ Q_k]^T$$

为计求出上式的具体表达式, 以单元图心作原点, 把座标 x, y 平行移动。此时, $\iint dx dy = \Delta$, $\iint x dx dy = x_G \Delta$, $\iint y dx dy = y_G \Delta$. (x_G, y_G 为图心座标值,) 从而, 例如 Q_i

便可得出下式：

$$Q_i = -q \iint \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) dx dy = \frac{-q(a_i + b_i x_G + c_i y_G)}{2}$$

这里，因 $a_i + b_i x_G + c_i y_G = 2\Delta/3$ ，故 $Q_i = -q\Delta/3$ 对于 Q_j ， Q_k 也可以采用同样的方法，结果等于 Q_i ，由此得：

$$Q^e = -\frac{q\Delta}{3} [1 \ 1 \ 1]^T \quad (12.18)$$

对各单元求出式 (12.17)，把它们加以累积便得式 (12.15) 的如下通函值，这就是本题中的基本联立方程，称之为无透水性方程：

$$\left\{ \frac{\partial \pi}{\partial H} \right\} = KH + Q = 0 \quad (12.19)$$

式中， H ， Q 是在解析区域中包括全节点的水头 H_m 及发生流量 Q_m 而构成的列矩阵。这里的 K 是由 K^e 累积起来的，称为无透水性矩阵。此外，由 K^e 建立 K 的程序是和构造解析中由单元刚度矩阵建立无刚度矩阵一样的第二章第三节。

K^e 虽然使坐标轴 x 、 y 与单元各向异性轴一致就可以求解出来，但这个主轴和整个系统的标准坐标轴并非都能一致。此时，把标准坐标系的单元各节点坐标值转换成与各向异性主轴一致的局部坐标节点坐标值，然后，把它代入到由式 (12.17) 定义的 K^e 中去，并加以累积而求 K 值，将其直接应用在解析上就可以了。这个问题说明水头、流量并非必须进行坐标变换的物理量。

B 边界条件的处理

边界条件为固定条件时，可以和构造解析中引进已知节点位移的情况进行完全同样的处理，其详细内容已在第三章第三四两节中叙述。

對於自由条件的情况，虽然可以利用边界条件式直接进行约束而得到解决，但这时问题的处理就变得复杂了。因此，这里则是把它作为自由条件的泛函，对式(12.15)进行如下修正，采用使其归为泛函值问题的方法。

$$\pi = \iint \left[\frac{1}{2} \left\{ k_x \left(\frac{\partial H}{\partial x} \right)^2 + k_y \left(\frac{\partial H}{\partial y} \right)^2 \right\} - \beta_H \right] dx dy + \int_S \beta_0 H d\xi \quad (12.20)$$

由於上式又附加入右边的第二项，因此和式(12.15)是不同的，致慮边界因素时就需加入这一项。

在靠近边界的一个三角形单元中，取边界上的一边为YS (图12.6)把YS上单位长度的已知流击、流入量 β_0 取为定值，并且H在节点水头 H_r, H_s 之间沿着YS按直线变化，则，

$$H = H_r + (H_s - H_r) \frac{\xi}{l}$$

此时，式(12.20)的 β_0 项可以进行如下计算：

$$\frac{\partial}{\partial H_r} \int_S \beta_0 H d\xi = \frac{1}{2} \beta_0 l, \quad \frac{\partial}{\partial H_s} \int_S \beta_0 H d\xi = \frac{1}{2} \beta_0 l \quad (12.21)$$

因此，如把透水性方程代替式(12.19)，而取为；

$$KH + Q + Q_0 = 0 \quad (12.22)$$

则 Q_0 就是边界上自由条件项。把不在边界上的节点取为零，靠近边界上取为 $\beta_0 \neq 0$ 时，把 $\beta_0 l / 2$ 插入进去并加以累积便可以求出 Q_0 值。

C 流速

按边界条件求解式(12.19)或式(12.22)，可求出每个节点的水头H。这个水头和流速有如下关系。也就是求出图12.5中单元i节点的式(12.12)，用矩阵表示则；

$$u^e = \begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = - \begin{bmatrix} k_x & 0 \\ 0 & k_y \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \partial H / \partial x \\ \partial H / \partial y \end{Bmatrix} \quad (12.23)$$

把式 (12.16) 代入上式便得:

$$u^e = -K_0 V^e H^e \quad (12.24)$$

式中,

$$V^e = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix}, \quad K_0 = \begin{bmatrix} K_x & 0 \\ 0 & K_y \end{bmatrix}$$

對於标准坐标系 $(\bar{x}, \bar{y})$ 的流速可用下式计称。

$$\bar{u}^e = -(T^e)^T K_0 V^e H^e \quad (12.25)$$

式中,

$$T^e = \begin{bmatrix} \cos \theta_{x\bar{x}} & \sin \theta_{x\bar{x}} \\ -\sin \theta_{x\bar{x}} & \cos \theta_{x\bar{x}} \end{bmatrix}, \quad \theta_{x\bar{x}} \text{ 为 } x, \bar{x} \text{ 两轴间的}$$

夹角。

D 流舅

a. 断面法

计称流舅的方法有断面法和分块法。所谓断面法如图 12.7 所示, 就是假定在解析区域两端处於自由水面或不透水层上有一个断面 AA' , 计称出通过此断面的流舅。如图所示, 取出断面 AA' 中长为 l 的一个单元边长 i , 可以求出通过这个 i 的流舅 Q_i 。

$Q_i = l [\cos \theta \quad \sin \theta] u^e$ 式中, θ_i 为 i 的法向 n 和各向异性主轴 x 的夹角。把式 (12.24) 代入上式则:

$$Q_i = -l t^T K_0 V^e H^e \quad \text{式中: } t^T = [\cos \theta \quad \sin \theta] \quad (12.26)$$

因而, 對於各单元边长进行如式 (12.26) 的计称, 由其总和就可以求得通过断面 AA' 的总流舅。

边 i 是断面 AA' 的上, 下流两侧单元的共同边。因而, 对式 (12.26) 的计称时, 可以采用上流一侧单元的水头, 透水系数, 形状尺寸等数据, 而且, 也可以采用下流一侧的这些数据。至於采用上下流两侧那一单元则无特殊判别依据。一般由于用上流一侧单元和用下流一侧单元, 两种情况可得出不同的流舅, 因此要采用两者的平均值作为计称流舅。