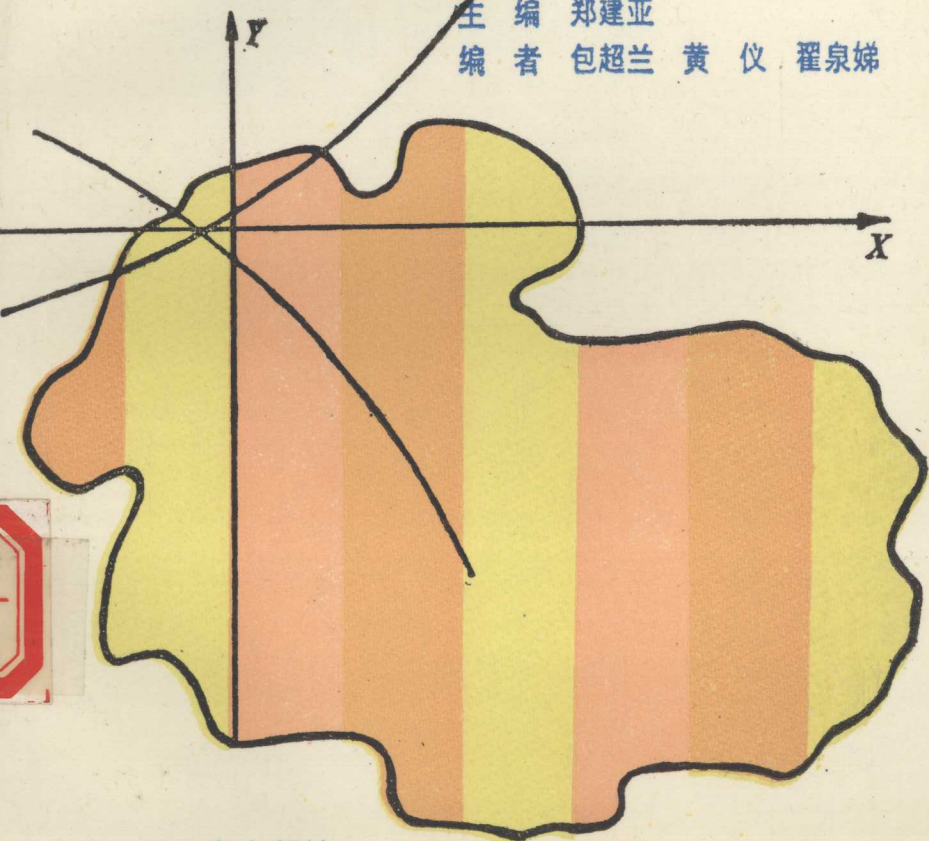


应用数学

(微积分与线性代数初步)

主 编 郑建亚

编 者 包超兰 黄 仪 翟泉娣



上海交通大学出版社

要 容 内

上海市成人高等学校教材

应用数学

(微积分与线性代数初步)

主 编 郑建亚

编 者 包超兰 黄 仪 翟泉娣

000085

文 学 类

13.30.51

内 容 提 要

本书是由上海市职工高校高等数学协作组组织,在《应用数学(一)》(上海职大编辑部1987年3月发行)的基础上重新编写的,仍以上海市高等教育局、上海市教育局1987年9月审订的《应用数学(一)——高等数学教学大纲》为依据(见《职大教育》1987年第3期),可作为成人高校经济类、管理类以及文科各专业的教材或教学参考书,也可作经济管理人员的自学用书。

应 用 数 学 ——微积分与线性代数初步

出版:上海交通大学出版社

(上海市番禺路877号 邮政编码:200030)

印刷:上海求雨印刷厂

开本:787×1092(毫米) 1/32

印张:12.75 字数:282000

版次:1992年12月 第1版

印次:1997年4月 第3次

印数:11001—17080

ISBN 7-313-01140-7/0·29

定价:12.90元

序

本书的作者与我相熟,嘱我写点什么。我想,微积分的教材种类颇多,各有其特色。拿起本书,我以为它的特点是:在经济领域中的应用。

学数学的目的是为了应用,这本来是一种常识。可是,多少年来,却常常被忽视。总觉得学数学是为了提高素质,积累学历,加强修养。至于是否用得上,那是学生毕业后自己的事了。这种“素质”观,脱离了社会和生产实际,于现代化建设无益。数学课程也因而变得枯燥乏味,尚虚空谈,成为学过就忘的“应试把戏”。

这本微积分教材,讲了仓库存储,边际函数,利润计算等实用课题。虽不能说让学员学了以后立即就能用上,但总教给学员一些用数学的立场、观点和方法处理经济问题的范例。而这种数学观,也许正是“素质”教育中最核心的一部分吧!

常常看到一些学过微积分的人,除了学会求一些函数的导数和积分,能够应付几个考题之外,在数学应用和数学修养上并无长进。实际的微积分问题已碰到鼻子尖上了,还觉察不到它的存在。

我衷心希望使用本教材的志士仁人,能够改变这种情况。通过大家的努力,使得微积分教学真正能为我国的经济发展,现代化建设作出更多的应有的贡献。我个人有志于此久矣,愿以此为序,并共勉之。

张奠宙

1992年5月

于华东师大

前 言

本书是由上海市职工高校高等数学协作组组织,在《应用数学(一)》教材(上海职大编辑部 1987 年 3 月发行)的基础上重新编写的。本书仍以上海市高等教育局、上海市教育局 1987 年 9 月审订的《应用数学(一)——高等数学教学大纲》为依据(见职大教育 1987 年第三期),可作为成人高校经济类、管理类以及文科各专业的教材或教学参考书,也可作经济管理人员的自学用书。

本书一方面保持了《应用数学(一)》教材的优点和特点,另一方面,根据几年来的教学实践,在认真听取了使用该教材的部分教师对现行大纲和教材的意见的基础上,我们在结构上作了较大的调整,对内容作了补充和完善,使其进一步体现成人教学和经济类专业的特点,并特别注意数学思想和方法的阐述;强调经济上的应用以及和中学数学基础的衔接,力求教材质量有进一步的提高。

本书由上海市供销职工大学郑建亚、上海纺织工业职工大学包超兰、上海市第二轻工业局职工大学黄仪、上海市青年管理干部学院翟泉娣编写,由郑建亚任主编。上海市供销职工大学李树冬参加了部分校对等工作。

华东师范大学张奠宙教授为本书写了序。上海市第二轻工业局职工大学石斯理副教授审阅了全稿,并提出了许多宝贵意见。上海市职工高校高等数学协作组负责人林上珍副教授、张顺生副教授也给予了具体的指导。对此,我们表示衷心

的感谢。

书中加“*”号的内容,可根据教学的需要和学时安排略去不讲。各章习题均分为(A)、(B)两类,(A)类为计算、证明、应用等传统题型;(B)类为填充题和选择题,选择题每题各有4个备选答案,其中至少有一个是正确的,请读者将正确答案前的字母都填在括号内,凡多填或漏填的均算答案错误。

由于编者水平有限,书中难免有不妥之处,欢迎读者批评指正。

编者

1992. 5

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1.1 函数的概念	(1)
§ 1.2 函数的表示法	(6)
§ 1.3 经济管理中的常用函数	(8)
§ 1.4 建立函数关系式举例	(9)
§ 1.5 函数的基本性质	(11)
§ 1.6 反函数 复合函数	(14)
§ 1.7 初等函数	(17)
* § 1.8 函数图形的简单组合与变换	(18)
习题一 (A)	(26)
(B)	(30)
第二章 极限与连续	(32)
§ 2.1 函数的极限	(32)
§ 2.2 极限的四则运算	(38)
§ 2.3 无穷小量与无穷大量	(41)
§ 2.4 两个重要极限	(46)
§ 2.5 函数的连续性	(49)
习题二 (A)	(56)
(B)	(61)

第三章 导数与微分	(63)
§ 3.1 导数的概念	(63)
§ 3.2 初等函数的导数	(73)
§ 3.3 由参数方程所确定的函数的导数、高阶导数	(85)
§ 3.4 微分	(89)
习题三 (A)	(94)
(B)	(99)
第四章 中值定理及导数应用	(101)
§ 4.1 中值定理	(101)
§ 4.2 罗必达法则	(104)
§ 4.3 函数单调性的判定法	(109)
§ 4.4 函数的极值	(112)
§ 4.5 函数图形的描绘	(115)
§ 4.6 导数在经济中的应用	(122)
习题四 (A)	(131)
(B)	(135)
第五章 不定积分	(137)
§ 5.1 不定积分的概念	(137)
§ 5.2 不定积分的性质	(141)
§ 5.3 基本积分公式	(143)
§ 5.4 换元积分法	(148)
§ 5.5 分部积分法及杂例	(161)
§ 5.6 积分表的使用	(174)
习题五 (A)	(179)

(682)	(B)	(186)
(106)	3.82
第六章	定积分	(189)
§ 6.1	定积分的概念	(189)
§ 6.2	定积分的性质	(196)
§ 6.3	定积分与不定积分的关系	(201)
§ 6.4	定积分的换元积分法	(209)
§ 6.5	定积分的分部积分法	(216)
§ 6.6	无穷区间上的广义积分	(218)
§ 6.7	定积分的应用	(222)
习题六	(A)	(236)
	(B)	(244)
第七章	多元函数微积分	(247)
§ 7.1	空间解析几何简介	(247)
§ 7.2	多元函数	(251)
§ 7.3	偏导数	(255)
§ 7.4	全微分	(258)
§ 7.5	复合函数的求导法则	(260)
§ 7.6	隐函数的求导公式	(264)
§ 7.7	多元函数的极值	(267)
§ 7.8	二重积分	(272)
习题七	(A)	(278)
	(B)	(282)
第八章	线性代数初步	(285)
§ 8.1	行列式	(285)

§ 8.2	矩阵的概念	(298)
§ 8.3	矩阵的运算	(301)
§ 8.4	矩阵的初等变换	(309)
§ 8.5	逆阵	(311)
§ 8.6	线性方程组	(316)
习题八 (A)		(328)
附录 I	积分表	(336)
附录 II	综合练习	(350)
习题答案		(361)
综合练习答案		(392)

第一章 函 数

数学是研究现实世界的数量关系和空间形式的一门科学。初等数学主要研究不变的量和固定的图形，而高等数学主要研究变化的量和图形的变化。变量之间的依赖关系就是函数关系。函数是高等数学的一个重要的基本概念，是微积分研究的对象。

本章将在中学数学关于函数知识的基础上，进一步讨论函数的概念及其性质，并介绍分段函数、复合函数、初等函数及经济管理中常用的函数。

§ 1.1 函数的概念

一切客观事物都是互相联系、互相制约的，现实世界中的各种规律，反映在数学中就是变量之间的依赖关系——即函数关系。

一、常量和变量

当我们观察各种自然现象、社会经济现象时，经常遇到各种各样的量。例如，在讨论物体运动时，需要考虑运动的速度、时间、距离；在分析市场情况时，需要考虑商品的数量、价格、成本以及利润等等。其中一些量在某一过程中始终保持一定的数值，我们称它为常量；另外一些量在某一过程中可以取不同的数值，我们称它为变量。例如，甲乙两地之间的距离；在一定时期中，某一商品的单价都是常量；而物体运动的

时间、商品的销售量就是变量。

应该注意：一个量是常量还是变量，并不是绝对的。同一个量在某种条件下可能是常量，在另一种条件下就可能是变量。例如在某一时期，一种商品的单价是常量，但是在不同的时期，这种商品的单价要随着成本的变化而变化。所以，如果研究一种商品在历年中的单价，它就是变量。由此可见，一个量是常量还是变量，要根据具体情况进行具体分析。

通常，我们用字母 a, b, c, \dots 等表示常量，而用字母 x, y, z, \dots 等表示变量。

变量在变化时，它的取值范围叫做变域。例如由上海到北京的铁路全线长度是 1462 公里，火车由上海开往北京的过程中，路程 S 的取值范围就是从 0 到 1462 间的一切实数，即 S 的变域是 $0 \leq s \leq 1462$ 。变域除了用不等式表示外，亦可用集合或区间表示。即 S 的变域也可用集合 $S = \{S | 0 \leq S \leq 1462\}$ ，或区间 $[0, 1462]$ 表示。

二、函数的概念

在同一个问题中，往往同时有几个变量共同变化着，而且这几个变量并不是孤立地在变化，而是相互有联系地、遵循一定的规律在变化。下面我们先看两个变量的简单情形。（多于两个变量的情形将在第七章再讨论。）

例 1 自由落体运动的规律是

$$S = \frac{1}{2}gt^2$$

其中重力加速度 g 是常量， t, S 分别表示物体从静止开始运动时所经过的时间和下降的距离。

如果 T_0 表示物体落到地面时所需时间，那末对于 $T = [0, T_0]$ 中任意一个 t 值，由上式 $S = \frac{1}{2}gt^2$ 必有唯一确定的 S

值和它相对应。

例2 已知某商品的单价是3元，该商品的销售量是 x 件，则销售总收入

$$y = 3x$$

对于给定的销售量 $x(x > 0$ 的整数)，由此式可求出唯一确定的总收入 y 和它相对应。

在上面的两个例子中，每个问题都涉及两个变量，它们是互相联系的，当其中一个变量在某个范围内取定了某个确定的值时，另一个变量按照一定的规律总有确定的值和它相对应，两个变量之间的这种对应关系就是函数概念。

定义 设 x 与 y 是两个变量，如果变量 x 在它的变域内任意取定一个数值时，按照一定的法则 f ，变量 y 总有唯一确定的数值和它相对应，则变量 y 叫做变量 x 的函数，记作

$$y = f(x)$$

其中 x 叫做自变量， y 叫做因变量，对应法则 f 叫做函数关系。自变量 x 的变域叫做函数的定义域，记作 X 。对应的因变量 y 的变域叫做函数的值域，记作 Y 。

函数 $y = f(x)$ 在有定义的点 x_0 处的函数值记为 $f(x_0)$ 或 $y|_{x=x_0}$ 。

根据定义，例1中的距离 S 是时间 t 的函数。例2中的总收入 y 是销售量 x 的函数。

从函数的定义来看，有两个问题要特别注意：

(1) 对应法则 f

记号 $y = f(x)$ 中的字母“ f ”表示自变量 x 和因变量 y 之间的对应法则，不能看作 f 乘 x 。除了字母 f 外，还可用其它字母如 F, g, φ 等表示对应法则。如果在同一个问题中要同时讨论几个不同的函数，为了避免发生混淆，应该用不同的字母

表示不同的对应法则。

例 3 已知函数 $f(x) = x^2 + 5x - 6$ ，试求 $f(0)$ ， $f(1)$ ， $f(x+2)$ ， $f(-x)$ 。

解 $f(0) = 0^2 + 5 \times 0 - 6 = -6$;

$f(1) = 1^2 + 5 \times 1 - 6 = 0$;

$f(x+2) = (x+2)^2 + 5(x+2) - 6$;

$f(-x) = (-x)^2 + 5(-x) - 6 = x^2 - 5x - 6$ 。

(2) 定义域 X

函数定义域 X 是表示自变量 x 的变域，即自变量 x 可能取的实数值的全体。在实际问题中函数的定义域是根据所考察问题的实际意义确定的。如例 1 中的 $S = \frac{1}{2}gt^2$ ，它的定义

域 $T = [0, T_0]$ ，例 2 中 $y = 3x$ 的定义域是 $x > 0$ 的整数。如果我们讨论的函数只是由某一个解析式子所给定的，那指的是不考虑函数的实际意义，这时我们约定：函数的定义域就是使解析式子有意义的自变量 x 的取值范围。例如：

分式中的分母的值不能为零；

开偶次方时，被开方的式子不能取负值；

含有对数的式子其真数必须是正数；

正切、余切符号下的式子分别不能等于 $k\pi + \frac{\pi}{2}$ 与 $k\pi$ ($k =$

$0, \pm 1, \pm 2, \dots$)；

反正弦、反余弦符号下的式子的绝对值必须小于等于 1，……等。

在解析式子里，如果同时出现上述诸种情况的某几种，则定义域是它们的公共部分。

下面举例说明如何确定函数的定义域。

例 4 确定下列函数的定义域

(1) $y = x^2$

解 因为 $y = x^2$ 中的 x 可取一切实数, 所以函数的定义域是 R (实数集), 或表示为 $(-\infty, +\infty)$ 。

(2) $y = \frac{5}{x-4}$

解 因为分式的分母不能为零, 所以函数的定义域是 $x \neq 4$ 的所有实数, 或表示为 $(-\infty, 4) \cup (4, +\infty)$ 。

(3) $y = \sqrt{1-x^2}$

解 因为负数不能开平方, 所以 $1-x^2 \geq 0$, 得 $x^2 \leq 1$, 即 $|x| \leq 1$, 所以函数的定义域为 $[-1, 1]$ 。

(4) $y = \arccos 2x$

解 因为反余弦 $\arccos x$ 的定义域 $|x| \leq 1$, 所以该函数有 $|2x| \leq 1$, 即 $|x| \leq \frac{1}{2}$ 。所以函数的定义域是 $\left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ 。

(5) $y = \lg(x-1) + \sqrt{x^2-2x-3}$

解 因为对数的真数必须是正数, 因此 $x-1 > 0$; 又负数不能开平方, 因此 $x^2-2x-3 \geq 0$, 要使这个函数有意义, 必须这两个条件都满足, 所以只需解不等式组

$$\begin{cases} x-1 > 0 \\ x^2-2x-3 \geq 0 \end{cases}$$

得解 $x \geq 3$ 。

所以函数的定义域为 $[3, +\infty)$ 。

函数的对应法则和定义域是决定函数的两个要素。如果两个函数的两个要素都相同, 则这两个函数是相同的。例如 $y = \sqrt{x^2}$ 与 $y = |x|$ 是同一个函数。

如果两个函数的两个要素中只要有一个不相同, 则就不

是相同的函数。例如 $y = x + 1$ 与 $y = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$ 是不同的函数，因为前者的定义域是实数全体，后者的定义域是 $x \neq 1$ 的实数全体。

§ 1.2 函数的表示法

一、函数的三种表示法

表达函数的方法，通常有以下三种：

1. 解析法(公式法)

用数学式子表示函数的方法叫做解析法。这种表示法简明，便于理论分析和计算。是微积分中最常用的函数表示法。

2. 列表法(表格法)

将一系列自变量值与对应的函数值列成表格，如平方表、对数表、三角函数表等，这种表示函数的方法叫做列表法，这种表示法用起来简单明了，所以它在经济领域中用途广泛，但是不便于进行理论分析。

3. 图象法(图示法)

用平面直角坐标系中的曲线表示函数的方法，叫做图象法。这种表示法直观，几何性态十分明显，是研究函数有力的辅助工具。

在讨论函数时，常将三种方法结合使用。

二、分段函数

有些函数对于其定义域内自变量 x 不同的值，不能用一个统一的式子表示，而必须用两个或两个以上的式子表示，这类函数叫做分段函数。

例 1 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$

是定义在 $(-\infty, +\infty)$ 上的分段函数。它分成两段,分段点是 $x=0$,当 $x \geq 0$ 时,对应的函数值由 $y=x$ 来确定;当 $x < 0$ 时,对应的函数值由 $y=-x$ 来确定。它的图形如图 1-1 所示。

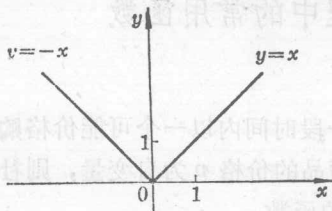


图 1-1

注意,分段函数是用几个式子合起来表示一个函数,而不是表示几个函数。这

几个式子都有各自的、互不重叠的自变量的适用的范围。我们可以根据自变量落在哪个范围,求出相应的函数值。

例 2 设函数

$$y = \begin{cases} x+1 & -2 < x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ x^2 - 1 & 0 < x \leq \frac{3}{2} \end{cases}$$

试求它的定义域,画出它的图形,并求 $f(-1)$, $f(0)$, $f(\frac{1}{2})$, $f(3)$ 。

解 函数的定义域是 $(-2, \frac{3}{2}]$,图形如图 1-2 所示。

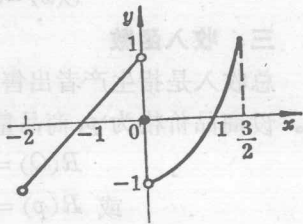


图 1-2

$$f(-1) = (x+1)|_{x=-1} = -1+1=0$$

$$f(0) = 0$$