现代数学基础丛书 122

巴拿赫空间引论

（第二版）

定光桂 著

科学出版社
www.sciencep.com

现代数学基础丛书 122

巴拿赫空间引论

(第二版)

定光桂 著

科学出版社
北京

内 容 简 介

本书共九章，叙述泛函分析的最基本的内容．第一、二章是全书的基础，讨论赋范线性空间和线性算子的基本概念；第三、四、五章是本书的核心部分，着重讨论有界线性泛函的存在定理、共鸣定理、开映像定理与闭图像定理及其应用；第六章简要介绍抽象函数．第七、八章介绍了巴拿赫空间的结构和几何理论(如巴拿赫空间的基、James 扭曲定理、最小内同构、Mazur-Ulam 定理以及光滑与一致光滑空间等)；第九章简要介绍 Banach 代数．本书内容丰富，有较多的例、反例及注，每章末还附有习题．

本书可作为泛函分析的入门教材，也可供高等院校有关专业的教师、学生及研究生钻研巴拿赫空间基本理论时参考．

图书在版编目（CIP）数据

巴拿赫空间引论 / 定光桂著．—2 版．—北京：科学出版社 2008
(现代数学基础丛书；122)
ISBN 978-7-03-020053-2

Ⅰ. 巴…　Ⅱ. 定…　Ⅲ. 巴拿赫空间　Ⅳ. 0177.2

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 027245 号

责任编辑：刘嘉善　张　扬　卜　新 / 责任校对：刘亚琦
责任印制：赵德静 / 封面设计：中飞时代

科学出版社出版
北京东黄城根北街 16 号
邮政编码：100717
http://www.sciencep.com
新蕾印刷厂印刷
科学出版社发行　各地新华书店经销
*
1984 年 8 月第 一 版　开本：B5(720×1000)
2008 年 4 月第 二 版　印张：39 3/4
2008 年 4 月第一次印刷　字数：762 000
印数：1—3 000

定价：88.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈长虹〉）

《现代数学基础丛书》序

对于数学研究与培养青年数学人才而言，书籍与期刊起着特殊重要的作用．许多成就卓越的数学家在青年时代都曾钻研或参考过一些优秀书籍，从中汲取营养，获得教益．

20 世纪 70 年代后期，我国的数学研究与数学书刊的出版由于文化大革命的浩劫已经破坏与中断了十余年，而在这期间国际上数学研究却在迅猛地发展着．1978 年以后，我国青年学子重新获得了学习、钻研与深造的机会．当时他们的参考书籍大多还是 50 年代甚至更早期的著述．据此，科学出版社陆续推出了多套数学丛书，其中《纯粹数学与应用数学专著》丛书与《现代数学基础丛书》更为突出，前者出版约 40 卷，后者则逾 80 卷．它们质量甚高，影响颇大，对我国数学研究、交流与人才培养发挥了显著效用．

《现代数学基础丛书》的宗旨是面向大学数学专业的高年级学生、研究生以及青年学者，针对一些重要的数学领域与研究方向，作较系统的介绍．既注意该领域的基础知识，又反映其新发展，力求深入浅出，简明扼要，注重创新．

近年来，数学在各门科学、高新技术、经济、管理等方面取得了更加广泛与深入的应用，还形成了一些交叉学科．我们希望这套丛书的内容由基础数学拓展到应用数学、计算数学以及数学交叉学科的各个领域．

这套丛书得到了许多数学家长期的大力支持，编辑人员也为其付出了艰辛的劳动．它获得了广大读者的喜爱．我们诚挚地希望大家更加关心与支持它的发展，使它越办越好，为我国数学研究与教育水平的进一步提高作出贡献．

杨　乐

2003 年 8 月

第二版前言

斗转星移，作者的《巴拿赫空间引论》一书写作已经 30 年，正式出版至今也 23 年了，时间过得真快！

回想起写书的 1977 年，正如本书第一版前言所说，在诸多前辈的教导、关怀、支持和帮助下，才使得我得以乘着当时刚刚转变好的学术之风，仗着年富力强，用一年左右时间完成了近 45 万字的专著. 在泛函界领袖人物关肇直先生和田方增先生的大力举荐下，本书顺利列选“现代数学基础丛书”，并于 1984 年由科学出版社出版. 让人伤感万分的是，在这次写此序言时，在本书前言中所提到的前辈中，对我学术和人生道路给予转折性帮助的恩师——原中国科学院数学研究所副所长关肇直先生和原南开大学副校长吴大任先生先后离开了我们. 这里，我必须再次表达我深深的崇敬、感恩和思念.

1994 年夏，我从美国讲学访问三年返回南开大学，我高兴地收到台湾九章数学基金会的一封信，得知《巴拿赫空间引论》一书已被首批列选为其《让数学名著永恒》项目(并且在此项目封页有本书的照片). 随后，本书于 1997 年和 1999 年两次重印. 令人欣慰的是，虽然本书讲的是抽象基础数学内容，但两次重印本很快就销售一空. 由此可见，如今重视知识之风已大大盛于过去，也表明了广大读者对本书的肯定.

但是，本书毕竟是 30 年前写的. 从社会和科学发展的观点来看，本书少了一些当今所需要的基础内容. 因此，即使作为一本“引论”的书，也得“与时俱进”，而现在的第二版正弥补了上面提到的不足. 在第二版中，我们在保留原书基本知识(当然，也逐页修改了印刷或书写的错误)的基础上，增加了当今巴拿赫空间理论中的一些活跃专题的内容，特别是关于基的理论和巴拿赫空间的结构理论(几何理论)中一些专题的最新内容(即第二版中的第七、八章).

第二版仍与原书保持一致的是：其一，凡是我们选择了的内容，我们一定要用自己的体会把它讲得清楚、明了；对于某些重要但讲清楚必须用大量篇幅的内容，我们则仅放于“注”中予以介绍，有兴趣的读者可以从我们介绍的文献中去深入学习和钻研(说到底，本书毕竟是一本“引论”). 其二，当我们讲述一个结论时，我们会在其后尽量举出一些正例、反例，给出某些注记，从而使读者加深对原结论的理解(正如过去 20 几年许多读者对我所讲的体会一样，他们均认为好好看看本书的“注”，一定会受益匪浅. 因此，我们提醒读者一定不要忽略，因为一些正、反例和注记正是我们多年来学习的体会). 其三，在可能的情况下，我们一定用图

来注释，帮助抽象思维的具体化，一改常见的泛函分析书籍没有图的抽象面貌. 其四，在每节后面均配有习题，书后附习题提示，既有利于读者加深对内容的深入理解，也有利于读者自学.

本书是一本适合泛函分析初学者和相应研究生的参考书. 对于初学者，仅取本书的第一到第五章的内容即可(例如，可以去掉§3.2、§3.4、§3.6 和§4.2、§4.4、§4.6、§5.4、§5.5). 对于研究生，则可在以上内容的基础上按需要或多或少地增加其他内容. 另外，值得一提的是：如果不学第六章，直接学习第七、八章，基本上是可以的.

最后，我要特别提到的是我的博士研究生李磊，为了本书的修改，2006 年他感冒未好就从山东老家赶回学校，用了几乎全部暑假时间以及随后一学期的许多课余时间，为第二版在查阅资料、定稿等方面做了大量工作，并且独立完成了本书增加部分的全部打印工作. 此外，我的博士生王瑞东、谭冬妮、胡锐、高金梅等同学为本书的校对做了许多工作. 为此，我对他们表示衷心的感谢！我也必须要感谢本书的责任编辑张扬等同志，他们的认真尽责地工作的确是十分可贵的!

定光桂

完搞 2007 年 1 月

定搞 2008 年 3 月于南开大学

第一版前言

泛函分析是在 20 世纪 30 年代才初步形成的一个数学分支. 它是应用广泛、生气勃勃的新兴学科. 目前, 在近代数学的许多分支以及物理、化学的某些分支的研究中, 它已成为重要的工具. 泛函分析不仅吸取了古典数学分析的许多重要方法, 而且综合了几何和代数的观点和方法. 在此基础上, 提炼出了许多新的分析方法.

Banach 空间论乃是泛函分析最基础、最重要的组成部分. 从 20 世纪 30 年代起, 它就以对一些问题的巧妙处理而吸引着许多学者. 用这个理论的奠基人、杰出的波兰数学家 S. Banach 的话来说, 在此理论中, 我们看到古典数学的方法统一成为近代的方法, 而这种统一的方式是十分谐调而且非常有效的(见著者 1932 年书中的序言). 目前, 就 Banach 空间理论而言, 也已经派生出不少新方向, 内容十分丰富. 因此, 本书只能对它的一些最基本的内容作简单介绍.

本书是作者在南开大学数学系 1963 年泛函分析专门化课程讲义的基础上改写而成的.其中, 包含了我自己在学习中的一些体会. 在写作时, 我努力使本书能通俗易懂; 在取材时, 尽量使一般具有大学数学系基础知识的读者能够阅读. 对论述到的命题, 都尽量仔细地予以证明.

本书以几个重要定理(包括保控线性延拓定理、共鸣定理、开映像定理、闭图像定理等)贯穿一些有趣的课题, 论述Banach空间的一些基本的概念及其算子理论, 对于抽象函数、Banach 代数理论也做了初步介绍. 各节均有习题, 最后一部分是关于拓扑线性空间的几点基本性质的附录、以及全书的习题提示和参考文献.

在本书即将出版的时候, 我特别要感谢前辈吴大任教授、胡国定教授和故去的杨宗磐先生, 感谢他们多年来对我的关怀、帮助和教导. 我还要感谢关肇直先生和田方增先生, 他们对我撰写本书给予了很大的支持和鼓励, 特别是田先生十分仔细地审阅了书稿并提出了许多具体而又十分宝贵的意见. 此外, 我也要感谢为本书稿的抄写、校对等做了许多工作的王战胜、施美芳、彭德茂等同志.

由于我自己学识浅薄, 因此, 本书难免有许多缺点和错误. 我诚恳地期望读者能够提出宝贵的批评意见.

定光桂

初稿 1978 年 6 月于南开大学

复稿 1980 年 11 月于瑞典皇家科学院 Mittag-Leffler 研究所

目　录

第一章　赋范线性空间的基本概念

§1.1　赋范线性空间的基本特性

在线性代数和微分方程的学习中, 我们熟知, 如果把线性齐次代数方程组的解、线性齐次微分方程的解等视为一个元素的话, 那么它们的集合和欧氏空间中的某些集合 (如较直观的二维或三维矢量所成的集合) 具有某种共同的性质. 而当不考虑这些具体问题本身的特点时, 我们便得出了抽象的线性空间的概念.

然而, 要对分析数学中的线性问题做深入的探讨, 仅线性空间的概念还显得不够. 例如, 为了扩大收敛性的概念, 在理论上和方法上进一步研究线性问题, 都得对线性空间的元素按一定规则赋予相应的数值. 如对每一个三维向量赋予一个数值, 即向量的长度; 对每一个 Lebesgue 可积函数赋予一个数值, 即此函数的积分等. 这样便导出了抽象赋范线性空间的概念.

(一)

为了叙述完备起见, 我们先复习一下代数学中关于线性空间的概念.

定义 1. 设 E 是某些元素的集合, $\boldsymbol{K}$是复数域$\boldsymbol{C}$或实数域$\boldsymbol{R}$, 我们称 E 为一复的或实的线性空间, 是指它满足 ①:

(i) E 构成一个"加法群", 即在 E 内定义了一种运算"+" (称"加法"), 其使得对于任意的 $x,y,z\in E$, 必有

(1) $x+y\in E$(封闭性);

(2) $x+y=y+x$(交换性);

(3) $x+(y+z)=(x+y)+z$(结合性);

(4) 存在 $\theta\in E$, 使得对任意的 $x\in E$, 总有 $x+\theta=x$(θ 称为"零元");

(5) 对任意的 $x\in E$, 存在 $-x\in E$, 使得 $x+(-x)=\theta$($-x$ 称为 x 的"逆元").

(ii) (复或实) 数域 $\boldsymbol{K}$ 与集 E 之间定义了一种运算"·" (有时此符号可略), 称为"数乘", 其使得对任意的 $x\in E,\alpha,\beta\in\boldsymbol{K}$, 必有

(1) $\alpha\cdot x\in E$(封闭性);

(2) $\alpha\cdot(\beta\cdot x)=(\alpha\beta)\cdot x$(结合性);

---

①为简便起见, 在本书中, 按国际通例, 我们常用符号 $\forall$ 表示"对任意的", $\exists$ 表示"存在".

(3) $1 \cdot x = x$.

(iii) 上面加法与数乘运算之间具有以下关系, 对任意的 $x, y \in E, \alpha, \beta \in \boldsymbol{K}$ 均有

(1) $(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$;

(2) $\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$(两种分配律).

定义 2. 我们称 E 为复的或实的赋范线性空间, 是指 E 是一复的或实的线性空间, 并且, 对 E 中每一元 x 按一定法则使其与一非负实数 "$\|x\|$" 相对应, 此对应关系满足

(i) $\|x\| \geqslant 0$, 且有 $\|x\|=0 \underset{(\text{等价})}{\Longleftrightarrow} x = \theta$;

(ii) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$(三角不等式);

(iii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \cdot \|x\|$(绝对齐性), $\forall x, y \in E, \alpha \in \boldsymbol{K}$.

这时, 我们称 $\|x\|$ 为元 x 的范数.

由上面定义, 我们还可以得到下面另外两个 "减弱" 后的定义. 当上述对应的 $\|x\|$ 满足条件 (i),(ii) 及条件

(iii′) $\|-x\| = \|x\|$, 和 $\lim\limits_{\alpha_n \to 0} \|\alpha_n x\| = 0$, $\lim\limits_{\|x_n\| \to 0} \|\alpha x_n\| = 0$

时, $\|x\|$ 将称为元 x 的准范数, 相应的空间称为赋准范线性空间. 而当上述 $\|x\|$ 满足条件 (ii),(iii) 及条件

(i′) $\|x\| \geqslant 0$ 和 $x = \theta \Rightarrow \|x\|=0$

时, $\|x\|$ 将称为元 x 的拟范数, 相应空间称为赋拟范线性空间.

下面, 用附注来介绍赋范线性空间的一些基本性质.

注 1. 对于赋范 (准范) 线性空间 E 中的任意两个元 x, y, 当定义数 $d(x,y)=\|x-y\|$ 时, 容易验证其满足下面关于"距离"定义的三条公理: (i°) $d(x,y) \geqslant 0$, $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x = y$; (ii°) $d(x,y)=d(y,x)$; (iii°) $d(x,y) \leqslant d(x,z)+d(z,y)$. 从而 E 构成一个 (一般拓扑学意义下的)距离空间. 特别地, 由以上可知, 赋范线性空间是一种特殊的距离空间, 它还具有以下两个特性: (iv°) $d(x+z, y+z)=d(x,y)$(对 "平移" 不变); (v°) $d(\alpha x, \theta)=|\alpha| d(x,\theta)$(绝对齐性), 这是一般具有距离的线性空间所没有的性质.

在一般涉及"线性拓扑空间"的内容中, 有所谓"线性距离空间"的概念 [Taylor, 1958], 即此距离 d 还满足上面性质 (iv°) 以及当记 $|x| = d(x,\theta)$ 时, $|\alpha x|$ 为 (α,x) 的二元连续函数. 于是, 可知, 赋范线性空间一定可以构成线性距离空间; 但必须注意的是, 反之则未必成立, 也就是的确存在着不可定义范数 (亦称 "不可赋范") 的线性距离空间 (即不能使其距离关系用某一范数引出来). 例如, 所有实数数列所成的空间, 在其上我们可以定义距离 (亦称 "可距离化") 使其成为距离空间, 但却是不可赋范的 (然而, 它是可赋 "准范" 的). 这些结果由于涉及线性拓扑空间的知识, 所以这里不详细论述, 对此感兴趣的读者可以参阅本书后面的附录或其他有关线性拓扑空间的专著.

为了说明赋范线性空间的另一基本特性, 我们先给出下面关于抽象空间中“线段”和“凸集”的定义:

定义 3. 设 E 为线性空间, x,y 为 E 中任意两个元, 那么, 集$\{\lambda x+(1-\lambda)y|0\leqslant \lambda \leqslant 1\}$就称为由 x, y 所组成的线段, 记为 $[x, y]$. 类似地, 当以上线段中不含 x 元或不含 y 元, 或同时不含 x, y 元时, 则分别称为半开半闭线段或开线段; 记为 $(x, y]$,$[x, y)$ 和 (x, y).

定义 4. 线性空间 E 中的集 V 称为凸集, 是指: 对任意的 $x,y \in V$, 均有 $[x,y]\subset V$.

注 2. 赋范线性空间里的“球”都是凸集.

为了简单起见, 我们只讨论赋范线性空间 E 内的单位球

$$B_1 = B\ (\theta,1)=\{x|\|x\| \leqslant 1,\ x\in E\}$$

的情况. 对于任意的 $x,y\in B_1$, 由于 $\|x\|\leqslant 1$, $\|y\|\leqslant 1$, 故根据范数的性质立即推得, 对任意 $\lambda\in \boldsymbol{R}$, 当 $0\leqslant \lambda \leqslant 1$ 时则有

$$\|\lambda x+(1-\lambda)y\| \leqslant \|\lambda x\|+\|(1-\lambda)y\| = \lambda\|x\|+(1-\lambda)\|y\| \leqslant \lambda+(1-\lambda)=1,$$

即 $\lambda x+(1-\lambda)y\in B_1$. 验毕.

注意: 为规范化, 书中所有“闭球”(按国际通用符号) 以“B”代表. “开球”以“O”代表. “球面”以“S”代表. “单位算子”以“I”代表. E 到 E^{**} 的“典则映像”以“J”代表.

在注 1 中我们已知赋范空间是距离空间, 有了距离, 我们就可以引入“收敛”的概念.

定义 5. 设 E 为赋范线性空间, $\{x_n\}\subset E$, $x_0\in E$, 我们称元列$\{x_n\}$收敛于x_0, 是指 $\lim\limits_{n\to\infty}\|x_n-x_0\|=0$. 这种收敛, 有时亦称为按范数收敛.

注 3. 在赋范线性空间中, 下面的映像是连续的: (i) $(x, y)\overset{\varphi_1}{\mapsto} x+y$(即 $x+y$ 是二元连续函数, 也即 $x\to x_0, y\to y_0 \Rightarrow x+y\to x_0+y_0$); (ii) $x\overset{\varphi_2}{\mapsto}\|x\|$; (iii) $(\alpha, x)\overset{\varphi_3}{\mapsto}\alpha x$(即 αx 是 α, x 的二元连续函数).

注 4. 范数一定也是准范数、拟范数, 反之未必. 下面两个反例可以说明这一点.

反例 1. 设线性空间 E 中已定义了两种范数 $\|\cdot\|_1$,$\|\cdot\|_2$, 我们令

$$\|x\|^* = \frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_1}{1+\|x\|_1}\right)+\frac{1}{2^2}\left(\frac{\|x\|_2}{1+\|x\|_2}\right),\quad \forall x\in E.$$

那么, 我们容易验证:“$\|\cdot\|^*$”满足前面关于范数定义中的性质 (i), (ii) 但不满足性质 (iii), 从而知它不是“范数”; 然而它却满足性质 (iii$'$), 因而知它是一个“准范数”.

反例 2. 设 E 为 $[0, 1]$ 上 L- 可积函数的全体, 我们令

$$\|x\| = \int_0^1 |x(\xi)|\mathrm{d}\xi,\quad \forall x(\xi)\in E.$$

容易验证:"$\|\cdot\|$" 满足关于范数定义中的性质 (ii), (iii). 但是当我们把 E 中的 "零元" 视为在 [0, 1] 中 "恒取零值" 的函数时, $\|\cdot\|$ 就不满足范数的性质 (i), 但却是满足性质 (i′) 的, 因而知它是一个 "拟范数" [不过, 我们也要注意, 只要在 E 中事先约定 [0, 1] 上 "几乎处处相等" 的函数为 "同一个" 元, 则上面的 "拟范数" 就变为 "范数" 了. 这种化 "拟范" 为 "范" 的方法, 即利用代数中将同余的 "剩余类" 视为同一元的方法, 也就是 "商空间" 的方法 (见 §1.4) 是后面经常要用到的].

注 5. 在注 4 的反例 1 中, 我们曾假设一个线性空间定义了两种范数. 这里, 说明这种假设的合理性, 也即在同一个线性空间中, 范数是可以有许多种方式来定义的. 事实上, 我们仅用下面例子就可以说明.

例 1. 在二维欧氏空间$\boldsymbol{R}_2$ 中, 我们可以引入下列范数:

$$\|x\|_1 = |\xi_1| + |\xi_2|, \quad \|x\|_2 = \sqrt{\xi_1^2 + \xi_2^2},$$

$$\|x\|_\infty = \max(|\xi_1|, |\xi_2|); \quad \forall x = (\xi_1, \xi_2) \in \boldsymbol{R}_2.$$

在 §1.2, 我们还可以验明: 更一般地令

$$\|x\|_p = (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p} \quad (p \geqslant 1), \tag{1}$$

它就构成范数 (显然, 当 p=1,2 时, 即上式引入的范数 $\|x\|_1$,$\|x\|_2$. 而再由极限论的知识, 我们知道:

$$\lim_{p\to\infty} (|\xi_1|^p + |\xi_2|^p)^{1/p} = \max(|\xi_1|, |\xi_2|),$$

这就是我们上面引入的范数 $\|x\|_\infty$).

下面, 来看看对于每一个范数, "单位球" 到底是什么, 并且顺便可以知道, 当 $p < 1$ 时, 上面的式 (1) 便不再成为范数了.

显然, 对于 $\|x\|_\infty$ 的情形, $\|x\|_\infty \leqslant 1$ 乃是以 $(\pm 1, \pm 1)$ 为顶点的正方形, 对于 $\|x\|_2$ 的情形, 它是半径为 1 的圆, 而在 $\|x\|_1$ 的情形乃是以 (0, 1), (1, 0), (−1, 0), (0, −1) 为顶点的正方形 (可以验明, 范数 $\|x\|_p$ 对应的单位球, 当 p 从 ∞ 减小到 1 时, "球" 将从与 $\|x\|_\infty$ 对应的正方形连续地变形到与 $\|x\|_1$ 对应的正方形).

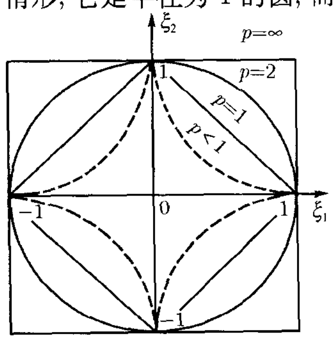

图 1.1

此外, 由图 1.1, 我们也可以看出, 当 $p < 1$ 时, 如果又设 $\|x\|_p^* = |\xi_1|^p + |\xi_2|^p$, 则 "单位球" $\|x\|_p^* \leqslant 1$(它们仍经过 ξ_1, ξ_2 轴上的 ± 1 四个点) 就不再是凸的了 (例如, 当 $p = \dfrac{2}{3}$ 时, 就是数学分析中熟知的 "星形线"). 从而由注 3 可知它已不可能是范数了 (但却是个准范数).

(二)

下面, 我们给出赋范线性空间是有穷维的特征. 为此, 我们先给出在代数学中见过的两个定义:

定义 6. 设 E 是一线性空间, 集 $M \subset E$. 如果 M 满足条件: 对任意的 $x, y \in M, \alpha, \beta \in \boldsymbol{K} \Rightarrow \alpha x + \beta y \in M$, 则 M 称为 E 的一个线性子空间(线性集), 当 $M \neq E$ 时称为 E 的真子空间; 如果 E 还是距离空间, 上面 M 在 E 中是闭集, 那么 M 称为 E 的闭线性子空间.

注 6. 关于“开集”“闭集”以及与此有关的一些定义本来是拓扑学的一般概念, 但为了适应于我们目前所介绍的知识, 这里及以后我们均只讲距离空间, 也即满足上面注 1 中所讲述的定义, 满足 (i°)—(iii°) 距离三公理的空间.

定义 7. 设 E 是一线性空间, 称 E 中的元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$线性相关, 是指存在不全为零的数 $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$, 使得有 $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$; 否则称其为线性无关. 如果 E 中有某 n 个元 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 线性无关, 而 E 中其他的元均可由它们线性表出, 则称 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 为 E 的基底, E 称为有限维的, 并称 n 为 E 的维数.

注 7. 容易验证, 上面关于维数的定义是确定的. 也即, 基底的元虽然可以变, 但其个数则是确定的.

为了得到有限维赋范线性空间的特征, 我们先给出两个引理:

引理 1(Riesz 引理). 设 E 为一赋范线性空间, E_0 为其内一闭线性真子空间, 那么: 对任意数 $\varepsilon_0 (0 < \varepsilon_0 < 1)$, 存在元 $x_0 \in E \backslash E_0$, 使得

$$\|x_0\| = 1 \quad \text{及}\ \|x_0 - y\| \geqslant \varepsilon_0, \quad \forall y \in E_0.$$

证. 由于 E_0 是 E 的真子集, 故知应有一元 $x_1 \in E \backslash E_0$, 并由 E_0 是闭集, 故知 x_1 与 E_0 的距离是大于零的 (图 1.2), 即有

$$d = \inf_{y \in E_0} \|x_1 - y\| > 0.$$

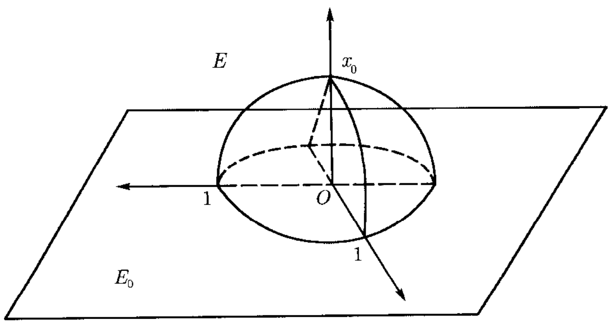

图 1.2

于是, 由下确界的定义可知, 存在 $y_1 \in E_0$, 使得 $d \leqslant \|x_1 - y_1\| < \dfrac{d}{\varepsilon_0}\left(注意\dfrac{d}{\varepsilon_0} > d\right)$. 这样如果取 $x_0 = \dfrac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|}$, 则显然由 $\|x_0\| = 1$ 以及

$$\begin{aligned}\|x_0 - y\| &= \left\|\frac{x_1 - y_1}{\|x_1 - y_1\|} - y\right\| \\ &= \frac{1}{\|x_1 - y_1\|}\|x_1 - (y_1 + \|x_1 - y_1\|y)\| \\ &\geqslant d \Big/ \frac{d}{\varepsilon_0} = \varepsilon_0, \quad \forall y \in E_0\end{aligned}$$

可以看出 x_0 即命题所求之元. 证毕.

注 8. 引理 1 对于具有 "β(级) 绝对齐性" $(0 < \beta < 1)$ 之 "准范数" 的赋准范空间亦是成立的. 事实上, 由于该准范数还满足条件

$$\|\lambda x\|^* = |\lambda|^\beta \|x\|^*, \quad \forall x \in E,\ \lambda \in \boldsymbol{K},$$

因此, 在引理 1 的证明中当将元 x_0 改为 $(x_1 - y_1)/\|x_1 - y_1\|^{1/\beta}$ 时, 便同样可以导出该引理的结论.

注 9. 引理 1 的几何意义: 如果 E_0 是 E 中的一闭线性真子空间, 那么, 在空间 E 的单位球面上必定存在着与 E_0 的距离 "无限接近" 于 1 的元. 值得注意的是, 虽然当 E 是有限维空间时, 这个与 E_0 距离是 1 的元是肯定存在的 (本节习题 5), 但是, 对于 E 是无穷维空间的情况, 与 E_0 距离为 1 的元在单位球面上却可以不存在 (参看 §1.2 习题 15).

引理 2. 设 E_n 为一个 n 维赋范线性空间, $\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ 是 E_n 中的一组基底, 对于任意的 $x \in E_n, x^0 \in E_n$. 设 $x = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k e_k, x^0 = \sum\limits_{k=1}^n \xi_k^0 e_k$, 那么, 为了按范数有 $x \to x^0$, 必须且只须其相应的各坐标均有 $\xi_k \to \xi_k^0 (k = 1, 2, \cdots, n)$. (这里, 我们将证明留给读者. 在证明时, 仅需注意不等式

$$\|x\| \leqslant \left(\max_{1 \leqslant k \leqslant n} \|e_k\|\right) \sum_{k=1}^n |\xi_k|$$

和存在一正数 m, 使得

$$m \sum_{k=1}^n |\xi_k| \leqslant \|x\|, \quad \forall x = \sum_{k=1}^n \xi_k e_k \in E_n.$$

注 10. 引理 2 对于具有 "β(级) 绝对齐性" $(0 < \beta < 1)$ 之 "准范数" 的 n 维线性空间亦是正确的. 并且, 对于一个有限维的线性空间而言, 无论在其上定义什么样的范数 [或具有 "β 级绝对齐性" 的 "准范数"], 该空间中元素的收敛性质是不变的.

注 11. 在赋范 [或具有"β(级) 绝对齐性" $(0<\beta<1)$ 的赋准范] 线性空间 E 内, 任意一个有限维的线性子空间一定是闭的.

下面, 为了引出定理 1, 我们先给出一个定义:

定义 8. 距离空间 E 中的集 F 称为紧的, 是指对于 F 的任意无穷个开复盖中必定存在有限个开复盖仍然将 F 盖住; F 称为列紧的, 是指 F 中任意无穷集中必有一收敛子列. 如果 F 中所有收敛序列的极限仍属于 F, 则 F 称为自列紧的.

注 12. 上面定义的"紧集"显然就是数学分析中"有限复盖定理"(Heine-Borel 定理) 在抽象距离空间中仍保持的集; 而定义的"列紧集"是数学分析中"聚点原理"(Bolzano-Weierstrass 定理) 在抽象距离空间中仍保持的集. 我们不难证明: 对于一个距离空间而言, 其"紧"与"自列紧"的概念是等价的. 此外, 紧集一定是有界闭集 (在 A_1 的拓扑空间中, "紧"比"自列紧"要求的条件要强).

有了上面定义, 我们可以给出赋范线性空间是有限维的特征性命题如下:

定理 1. 设 E 为一赋范线性空间. 那么, 为了使 E 是有限维的, 必须且只须 E 中的单位球面 $S_1=\{x|\ \|x\|=1, x\in E\}$ 是自列紧集.

证. (1) "$\Rightarrow$": 我们可以假设 E 是有限维的, 因而从上面引理 2 的证明, 并利用对于复 (实) 数而言有界闭集是自列紧集的性质, 不难推得: S_1 中的任一元列必存在着 (极限仍在 S_1 上的) 收敛子列, 此即 S_1 是自列紧集.

(2) "$\Leftarrow$": 反之, 如果 S_1 是 (自) 列紧集, 但 E 不是有限维的. 那么, 任意取一非零元 $x_1\in S_1$, 利用数乘将 x_1 张成一维子空间 E_1, 并由注 11 以及 E 不是有限维的假设, 可知 E_1 必为 E 的一个闭的线性真子空间. 于是, 我们利用上面的引理 1, 对某一固定正数 $\varepsilon_0(<1)$, 必定存在元 $x_2\in E\backslash E_1, x_2\in S_1$, 使得 $\|x_2-x_1\|\geqslant\varepsilon_0>0$. 然后, 利用加法和数乘又将元 x_1,x_2 张成二维子空间 E_2(这里 x_1,x_2 无关显然可以从引理 1 结论中看出). 类似地, 由引理 1, 必可找出元 x_3, 使得 $x_3\in E\backslash E_2, x_3\in S_1$, 且有 $\|x_3-y\|\geqslant\varepsilon_0, \forall y\in E_2$. 特别地, 有 $\|x_3-x_1\|\geqslant\varepsilon_0$, $\|x_3-x_2\|\geqslant\varepsilon_0$. 这样, 我们用归纳法就可得到 S_1 上的元列 $\{x_n\}$. 其满足 $\|x_n-x_m\|\geqslant\varepsilon_0, \forall n,m, n\neq m$, 于是 S_1 中的无穷集 $\{x_n\}$ 就没有收敛子列存在, 此显然与 S_1 的列紧性假设矛盾. 证毕.

同样地, 由上面两个引理我们还不难得到下面的推理 1:

推理 1. 设 E 为一赋范线性空间. 那么, 若 E 是有限维的, 则 E 的任意有界 (闭) 集均是列紧 (自列紧) 集; 反之, 只要 E 内的某一"球面" $S_1(x_0,\rho_0)=\{x|\ \|x-x_0\|=\rho_0, x\in E\}(\rho_0\neq 0)$ 是自列紧集, 则 E 是有限维的.

(三)

最后, 我们给出一个赋范线性空间能成为"内积空间"的充要条件. 为此我们先来回忆一下"内积"的定义.

定义 9. 设 E 为一复 (实) 线性空间. 如果对于 E 中任意两个元素 x,y(有先