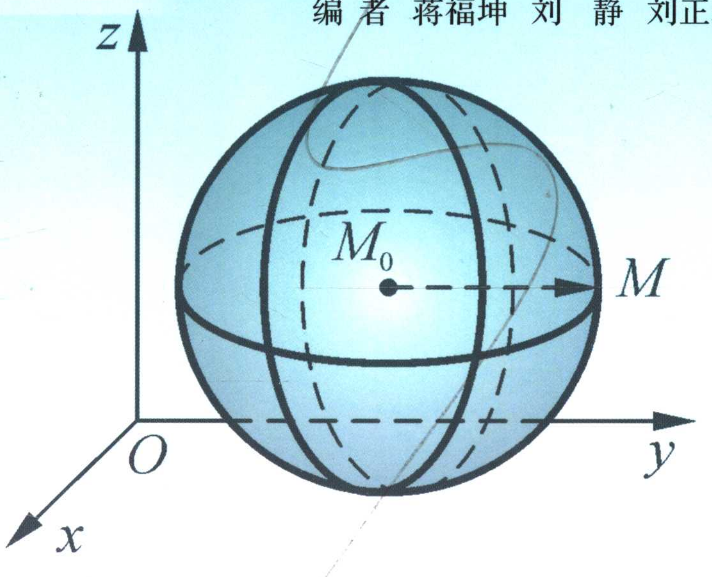
高等院校经济管理类教材

微积分

CAICUIUS

主编 柴惠文
编者 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春

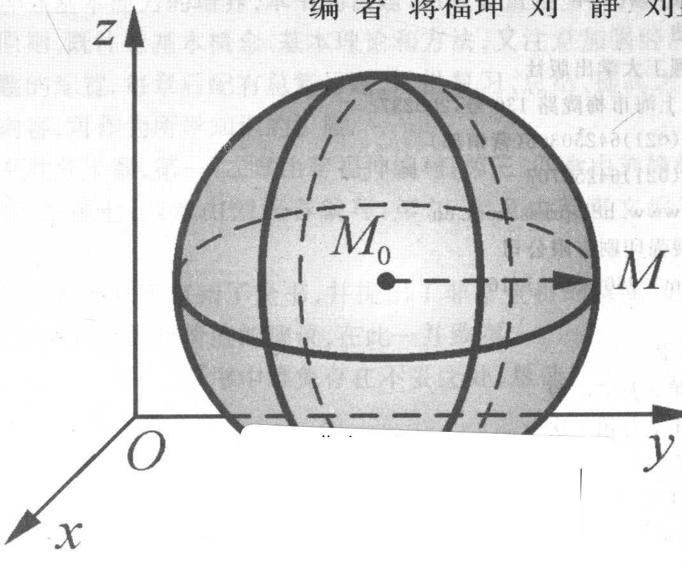


華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等院校经济管

微积分
CAICUIUS

主编 柴惠文
编者 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春



華東理工大學出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/柴惠文主编.—上海:华东理工大学出版社,2008.3
(高等院校经济管理类教材)
ISBN 978-7-5628-2246-2

Ⅰ.微…　Ⅱ.柴…　Ⅲ.微积分—高等学校—教材　Ⅳ.O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 000731 号

高等院校经济管理类教材

微积分

主　　编 / 柴惠文
编　　者 / 蒋福坤　刘　静　刘正春　杨晓春

…………………………………………………………………

责任编辑 / 陈新征
责任校对 / 张　波　李　晔
封面设计 / 王晓迪
出版发行 / 华东理工大学出版社
　　地　址:上海市梅陇路 130 号,200237
　　电　话:(021)64250306(营销部)
　　传　真:(021)64252707
　　网　址:www.hdlgpress.com.cn
印　　刷 / 上海展强印刷有限公司
开　　本 / 787 mm×960 mm　1/16
印　　张 / 27
字　　数 / 542 千字
版　　次 / 2008 年 3 月第 1 版
印　　次 / 2008 年 3 月第 1 次
印　　数 / 1—6050 册
书　　号 / ISBN 978-7-5628-2246-2/O·191
定　　价 / 41.00 元

前言

本书是参照教育部制订的高等数学课程教学基本要求，依据经济、管理类各专业对高等数学课程的教学要求而编写的. 在编写的过程中，按照循序渐进、深入浅出的原则，突出微积分的基本思想和基本方法，强化基本方法的训练. 据此，我们对教材的体系结构进行了必要的调整，对基本概念的叙述，力求从身边的实际问题出发，自然地引入；适当淡化运算上的一些技巧要求，适当降低了一元函数的极限理论的要求，从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明. 在教材的编写理念上，在不失科学性的前提下不过分强调某些严密论证及研究过程，而是突出数学思想的介绍，突出数学方法训练及应用，让学生更多地体会微积分的思想方法，增强他们的应用意识和应用能力. 让学生通过对本书的学习，能较好地了解各部分内容的内在联系与区别，在总体上较好地把握微积分的思想和方法.

为加强基本能力的培养，本书的例题、习题设置较多，习题按节配置，遵照循序渐进的原则，既注意基本概念、基本理论和方法，又注意加强经济学和其它方面应用性习题的配置. 每章后配有总复习题，以供复习、总结、提高之用. 文中“*”部分为选学内容，可作为所学知识的扩展.

本书共分十章，第一、二章由蒋福坤编写；第三、四章由刘静编写；第五、六章由杨晓春编写；第七、八章由刘正春编写；第九、十章由柴惠文编写，全书由柴惠文统稿.

严从荃教授认真审阅了全书，并提出了非常宝贵的意见. 在本书的编写过程中，得到许多同行的有价值的建议，在此一并致谢.

由于编者水平有限，书中难免存在不妥之处，恳请广大读者批评指正，以便本书在教学中不断完善.

编　者

2007 年 10 月

目 录

第1章 函数

第2章 极限与连续

第3章 导数与微分

第 4 章　中值定理及导数应用

第 5 章　不定积分

第 8 章　二重积分

第 9 章　无穷级数

第 10 章　常微分方程和差分方程

第1章
函　数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象，它是微积分学研究的基本对象.在中学时我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解，在本章中，我们将进一步阐明函数的一般定义，介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念，这些都是学习这门课程的基础.

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.例如某校一年级的全体学生构成一集合，某个书柜的全部藏书构成一个集合，全体实数构成一个集合等.

一般地，我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做**集合**.把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的**元素**.

习惯上，用大写拉丁字母 A, B, C, X, Y, …表示集合，用小写拉丁字母 a, b, c, x, y, …表示集合的元素.对于给定的集合来说，它的元素是确定的.如果 a 是集合 A 中的元素，则用 $a \in A$ 来表示；如果 a 不是集合 A 中的元素，则用 $a \notin A$ 来表示.

含有有限个元素的集合称为**有限集**；含有无限多个元素的集合称为**无限集**；不含任何元素的集合称为**空集**，记为 $\varnothing$.

表示集合的方法主要有两种，一种是列举法，就是把集合的所有元素一一列举出来，写在花括号内.例如，方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解构成的集合可表示为 $A = \{-2, 2\}$.另一种方法是描述法，就是指出集合的元素所具有的性质.一般地，将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有某种性质}\}$$

例如,方程 $x^2-4=0$ 的解集也可以表示为 $A=\{x \mid x^2-4=0\}$.

元素为数的集合称为数集,通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集,$\mathbf{Z}$ 表示整数集,$\mathbf{Q}$ 表示有理数集,$\mathbf{R}$ 表示实数集. 有时我们在表示数集的字母右上角添"+"、"-"等上标,来表示该数集的几个特定子集. 以实数为例,$\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集;$\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数集,其它数集的情况类似,不再赘述.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

若集合 A 与 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,就称 A 与 B 相等,记作 $A=B$.

1.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设有集合 A 与 B,它们的并集记作 $A \cup B$, 定义为

$$A \cup B=\{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合 A 与 B 的交集记作 $A \cap B$, 定义为

$$A \cap B=\{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合 A 与 B 的差集记作 $A \backslash B$,定义为

$$A \backslash B=\{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

有时,我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**,并用 $\boldsymbol{I}$ 表示,把差集 $I \backslash A$ 特别称为 A 的**余集**或**补集**,记作 A^c. 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A=\{x \mid |x|<1\}$ 的余集为 $A^c=\{x \mid x \leqslant -1 \text{ 或 } x \geqslant 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A \cup B=B \cup A,\ A \cap B=B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C=A \cup(B \cup C)$

$(A \cap B) \cap C=A \cap(B \cap C)$

分配律 $A \cap(B \cup C)=(A \cap B) \cup(A \cap C)$

$A \cup(B \cap C)=(A \cup B) \cap(A \cup C)$

对偶律 $(A \cup B)^c=A^c \cap B^c,\ (A \cap B)^c=A^c \cup B^c$

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿(Descartes)乘积**,设 A, B 是任意的两个集合,则 A 与 B 的直积,记作 $A \times B$,定义为如下的由有序对 (a, b) 组成的集合:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

例如，$\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$，即为 xOy 平面上全体点的集合，$\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

1.1.3 区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

设 a 和 b 都是实数，且 $a < b$，数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**，记作 (a, b)，即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点，数集

$$\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

称为**闭区间**，记作 $[a, b]$，即

$$[a, b] = \{x \mid a \leqslant x \leqslant b\}$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点，类似地有

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leqslant b\},\ [a, b) = \{x \mid a \leqslant x < b\},$$

$(a, b]$，$[a, b)$ 都称为**半开区间.**

以上这些区间都称为**有限区间**，$b-a$ 的值称为这些区间的长度，从数轴上看，这些有限区间是长度为有限值的线段. 闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上表示方法分别如图 1-1(a)，(b)所示. 此外还有无限区间，引进记号 $+\infty$（读作正无穷大）及 $-\infty$（读作负无穷大），则可用类似的记号表示无限区间，例如

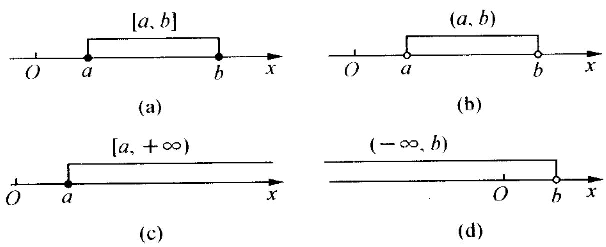


图 1-1

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geqslant a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1 - 1(c),(d)所示.

实数集 $\{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 称为**点 a 的 δ 邻域**,记为 $U(a, \delta)$,点 a 叫做邻域的中心,δ 叫做邻域的半径,它在数轴上表示以 a 为中心,长度为 2δ 的对称开区间,如图 1 - 2 所示.

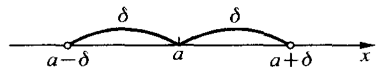


图 1 - 2

实数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域,记作 $\mathring{U}(a, \delta)$. 为了方便,有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域,开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

习题 1.1

1. 如果 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 下列各种写法,哪些是对的? 哪些是不对的?

$1 \in A$;　$0 \notin B$;　$\{1\} \in A$;　$1 \subset A$;　$\{1\} \subset A$;　$0 \subset A$;

$\{0\} \subset A$;　$\{0\} \subset B$;　$A = B$;　$A \supset B$;　$\varnothing \subset A$;　$A \subset A$.

2. 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, 求:

(1) $A \cup B$　　(2) $A \cap B$

(3) $A \cup B \cup C$　　(4) $A \cap B \cap C$

(5) $A \backslash B$

3. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1) $|x| \leqslant 3$　　(2) $|x-2| \leqslant 1$

(3) $|x-a| < \varepsilon$(a 为常数,$\varepsilon > 0$)　　(4) $|x| \geqslant 5$

(5) $|x+1| > 2$

4. 用区间表示下列点集,并在数轴上表示出来:

(1) $A = \{x \mid |x+2| < 2\}$　　(2) $B = \{x \mid 1 < |x-2| < 3\}$

1.2　函数

1.2.1　函数的概念

函数是变量之间满足一定条件的一种对应关系. 在中学数学中也学习过函数,

现在我们把函数的概念叙述如下：

定义 1　设有两个变量 x 与 y，D 为一个非空实数集.如果存在一个确定的法则(或称对应法则)f,使得对于每一个 $x\in D$,都有唯一的一个实数 y 与之对应,则称这个对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**一元函数**,简称**函数**,记为 $y=f(x)$，D 称为$f(x)$的**定义域**.函数$f(x)$的定义域 D 通常记为 $D(f)$.

对于 $x_0\in D(f)$，由法则 f 所对应的实数值 y 称为$f(x)$在点 x_0 处的函数值，通常记为 $f(x_0)$,有时也记为 $y\big|_{x=x_0}$，此时我们也称函数$f(x)$在点 x_0 处有定义.全体函数值组成的集合称为函数$f(x)$的**值域**,通常记为 $R(f)$,即

$$R(f)=\{y\mid y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

从函数的定义来看,当定义域与对应法则确定后,函数就完全确定了.可见定义域与对应法则是确定函数的两个要素,因此,对于函数$f(x)$，$g(x)$,如果它们有相同的定义域和对应法则,它们就是同一个函数.

表示函数的主要方法有三种:表格法、图形法、解析法(公式法),这在中学数学中大家已经熟悉,其中,用图形法表示函数是基于函数图形的概念,即坐标平面上的点集

$$\{(x,\ y)\mid y=f(x),\ x\in D(f)\}$$

称为函数 $y=f(x)$，$x\in D(f)$ 的图形,如图 1-3 所示.

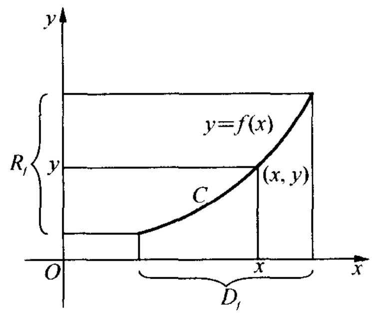


图 1-3

对于由解析式表示的函数,其定义域是指使得函数表达式有意义的自变量取值的全体,这种定义域也称为函数的**自然定义域**.

例 1　求函数 $y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解　当 $3x-2>0$ 且 $3x-2\neq 1$ 时,即 $x>\dfrac{2}{3}$ 且 $x\neq 1$ 时,函数$\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$才有意义,因此,$y=\dfrac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D(f)=\left(\frac{2}{3},\ 1\right)\cup(1,\ +\infty)$$

例 2　求函数 $y=\arcsin\dfrac{x-1}{5}+\dfrac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解　当 $\left|\dfrac{x-1}{5}\right|\leqslant 1$ 且 $x^2<25$ 时,即 $-4\leqslant x\leqslant 6$ 且 $-5<x<5$ 时,函数

$\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 才有意义，因此函数 $y=\arcsin\frac{x-1}{5}+\frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为

$$D(f)=[-4,\ 5)$$

在用解析法表示函数时，有一种特别的情形，即有的函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示，这种函数被称为**分段函数**.

例如，函数

$$y=|x|=\begin{cases}x, & x\geqslant 0\\ -x, & x<0\end{cases}$$

是定义域为 $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $R(f)=[0,\ +\infty)$ 的一个函数，它的图形如图 1－4 所示，当自变量 x 取 $(-\infty,\ 0)$ 内的数值时，函数值由 $y=-x$ 确定，而当自变量 x 取 $[0,\ +\infty)$ 内的数值时，函数值由 $y=x$ 确定. 所以是一个分段函数.

例如，函数

$$y=\operatorname{sgn}x=\begin{cases}1, & x>0\\ 0, & x=0\\ -1, & x<0\end{cases}$$

也是分段函数，它的定义域为 $D(f)=(-\infty,\ +\infty)$，值域为 $R(f)=\{-1,\ 0,\ 1\}$，图形如图 1－5 所示. 此函数称为符号函数.

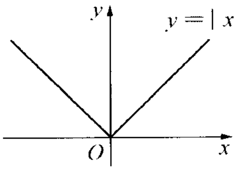


图 1－4

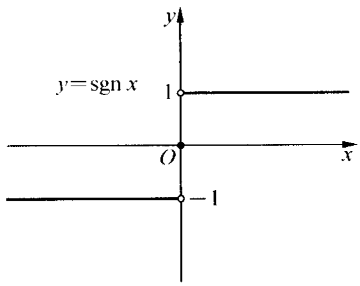


图 1－5

1.2.2　反函数

定义 2　设函数 $y=f(x)$ 的定义域是 $D(f)$，值域是 $R(f)$，如果对每一个 $y\in R(f)$，都有唯一确定的 $x\in D(f)$ 与之对应且满足 $y=f(x)$，则 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数，记此函数为

$$x = f^{-1}(y),\ y \in R(f)$$

并称其为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**.

显见 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数,且 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x = f^{-1}(y)$ 中,y 是自变量,x 是因变量,但是习惯上,常用 x 作为自变量,y 作为因变量.因此,$y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 常记为

$$y = f^{-1}(x),\ x \in R(f)$$

在平面直角坐标系 xOy 中,函数 $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称,如图 1-6 所示.

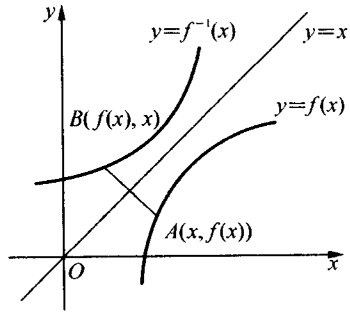


图 1-6

什么样的函数才有反函数呢?由定义可知,函数 $y = f(x)$ 具有反函数的充要条件是对应法则 f 使得定义域中的点与值域中的点是一个对一个的(简称一一对应).因为单调函数具有这种性质,所以单调函数必有反函数.

对于单调函数,求其反函数的步骤是先从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$,然后将 x 与 y 互换,便得到反函数 $y = f^{-1}(x)$.

习题 1.2

1. 下列各题中,函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同?为什么?

(1) $f(x) = \ln x^2,\ g(x) = 2\ln x$

(2) $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1},\ g(x) = x-1$

(3) $f(x) = x,\ g(x) = \sin(\arcsin x)$

(4) $f(x) = x,\ g(x) = e^{\ln x}$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x-2} + \dfrac{1}{x-3} + \ln(5-x)$ (2) $y = \dfrac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$

(3) $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin(\ln\sqrt{1-x})$ (4) $y = \arcsin\dfrac{1}{x}$

(5) $y = \sqrt{\lg\dfrac{5x-x^2}{4}}$ (6) $y = 1 - e^{1-x^2}$