

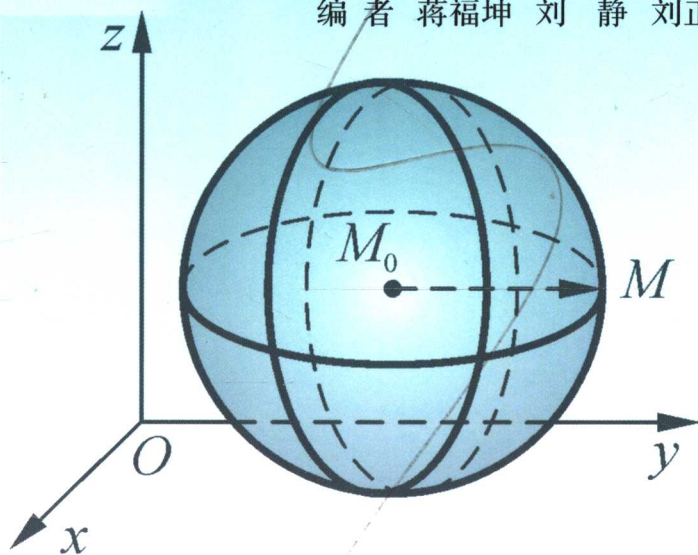
高等院校经济管理类教材

微积分

CAICUIUS

主 编 柴惠文

编 者 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

高等院校经济

0172/231

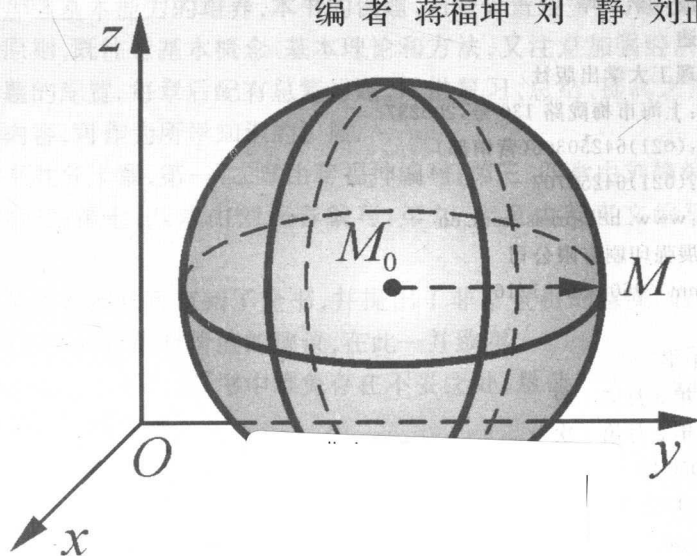
2008

微积分

CAICUIUS

主 编 柴惠文

编 者 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春



华东理工大学出版社
EAST CHINA UNIVERSITY OF SCIENCE AND TECHNOLOGY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

微积分/柴惠文主编. —上海:华东理工大学出版社,2008.3
(高等院校经济管理类教材)

ISBN 978-7-5628-2246-2

I. 微… II. 柴… III. 微积分—高等学校—教材 IV. O172

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 000731 号

高等院校经济管理类教材

微积分

主 编 / 柴惠文

编 者 / 蒋福坤 刘 静 刘正春 杨晓春

.....

责任编辑 / 陈新征

责任校对 / 张 波 李 晔

封面设计 / 王晓迪

出版发行 / 华东理工大学出版社

地 址:上海市梅陇路 130 号,200237

电 话:(021)64250306(营销部)

传 真:(021)64252707

网 址:www.hdlgpress.com.cn

印 刷 / 上海展强印刷有限公司

开 本 / 787 mm×960 mm 1/16

印 张 / 27

字 数 / 542 千字

版 次 / 2008 年 3 月第 1 版

印 次 / 2008 年 3 月第 1 次

印 数 / 1—6050 册

书 号 / ISBN 978-7-5628-2246-2/O·191

定 价 / 41.00 元

(本书如有印装质量问题,请到出版社营销部调换。)

前言

本书是参照教育部制订的高等数学课程教学基本要求,依据经济、管理类各专业对高等数学课程的教学要求而编写的.在编写的过程中,按照循序渐进、深入浅出的原则,突出微积分的基本思想和基本方法,强化基本方法的训练.据此,我们对教材的体系结构进行了必要的调整,对基本概念的描述,力求从身边的实际问题出发,自然地引入;适当淡化运算上的一些技巧要求,适当降低了一元函数的极限理论的要求,从简处理了一些公式的推导和一些定理的证明.在教材的编写理念上,在不失科学性的前提下不过分强调某些严密论证及研究过程,而是突出数学思想的介绍,突出数学方法训练及应用,让学生更多地体会微积分的思想方法,增强他们的应用意识和应用能力.让学生通过对本书的学习,能较好地了解各部分内容的内在联系与区别,在总体上较好地把握微积分的思想和方法.

为加强基本能力的培养,本书的例题、习题设置较多,习题按节配置,遵照循序渐进的原则,既注意基本概念、基本理论和方法,又注意加强经济学和其它方面应用性习题的配置.每章后配有总复习题,以供复习、总结、提高之用.文中“*”部分为选学内容,可作为所学知识的扩展.

本书共分十章,第一、二章由蒋福坤编写;第三、四章由刘静编写;第五、六章由杨晓春编写;第七、八章由刘正春编写;第九、十章由柴惠文编写,全书由柴惠文统稿.

严从荃教授认真审阅了全书,并提出了非常宝贵的意见.在本书的编写过程中,得到许多同行的有价值的建议,在此一并致谢.

由于编者水平有限,书中难免存在不妥之处,恳请广大读者批评指正,以便本书在教学中不断完善.

编 者

2007 年 10 月

目 录

第1章 函数

1.1 集合	1
1.1.1 集合的概念	1
1.1.2 集合的运算	2
1.1.3 区间和邻域	3
习题 1.1	4
1.2 函数	4
1.2.1 函数的概念	4
1.2.2 反函数	6
习题 1.2	7
1.3 函数的基本性质	8
1.3.1 函数的奇偶性	8
1.3.2 函数的周期性	9
1.3.3 函数的单调性	9
1.3.4 函数的有界性	10
习题 1.3	10
1.4 初等函数	11
1.4.1 基本初等函数	11
1.4.2 复合函数	15
1.4.3 初等函数	16
习题 1.4	17
1.5 经济学中的常用函数	17
1.5.1 需求函数	17
1.5.2 供给函数	18
1.5.3 均衡价格	19
1.5.4 成本函数	19

1.5.5 收益函数	20
1.5.6 利润函数	21
1.5.7 库存函数	22
习题 1.5	22
总习题一	23

第2章 极限与连续

2.1 数列的极限	25
2.1.1 数列的概念与性质	25
2.1.2 数列的极限	26
2.1.3 数列极限的性质	28
习题 2.1	29
2.2 函数的极限	30
2.2.1 函数极限的定义	30
2.2.2 函数极限的性质	35
习题 2.2	35
2.3 无穷小与无穷大	36
2.3.1 无穷小	36
2.3.2 无穷大	38
习题 2.3	39
2.4 极限的运算法则	40
2.4.1 极限的四则运算法则	40
2.4.2 复合函数的极限运算法则	43
习题 2.4	44

2.5 极限存在准则 两个重要	
极限	44
2.5.1 夹逼准则	44
2.5.2 重要极限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	
.....	45
2.5.3 单调有界准则	48
2.5.4 重要极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$	
= e	48
2.5.5 连续复利	51
习题 2.5	52
2.6 无穷小的比较	52
习题 2.6	54
2.7 函数的连续性	55
2.7.1 函数的连续性	55
2.7.2 函数的间断点	57
2.7.3 连续函数的运算与初等	
函数的连续性	59
习题 2.7	62
2.8 闭区间上连续函数的性质	
.....	63
2.8.1 最大值和最小值定理	
与有界性	63
2.8.2 介值定理与零点定理	
.....	64
习题 2.8	65
总习题二	66

第3章 导数与微分

3.1.4 函数可导性与连续性	
的关系	76
习题 3.1	78
3.2 函数的求导法则与求导公式	
.....	79
3.2.1 函数的和、差、积、商	
的求导法则	79
3.2.2 反函数的求导法则	82
3.2.3 复合函数的求导法则	
.....	83
3.2.4 基本求导法则与导数	
公式	86
习题 3.2	89
3.3 高阶导数	90
3.3.1 高阶导数的定义	91
3.3.2 常用初等函数的 n 阶导数	
公式	92
3.3.3 求函数高阶导数举例	
.....	94
习题 3.3	95
3.4 隐函数及由参数方程所确定	
的函数的导数	96
3.4.1 隐函数的导数	96
3.4.2 由参数方程所确定的	
函数的导数	98
习题 3.4	100
3.5 函数的微分	101
3.5.1 微分的概念	101
3.5.2 函数可微的充要条件	
.....	102
3.5.3 常用的结论	103
3.5.4 微分的几何意义	103
3.5.5 基本初等函数的微分公式	
与微分的运算法则	104

3.5.6 微分在近似计算中的 应用	106	4.4 导数的应用(1)	146
习题 3.5	107	4.4.1 函数的单调性	146
3.6 边际与弹性	109	4.4.2 函数的极值及其求法	149
3.6.1 边际概念	109	4.4.3 最大值与最小值问题	152
3.6.2 经济学中常见的边际 函数	110	4.4.4 经济应用问题举例 ..	155
3.6.3 弹性概念	113	习题 4.4	157
3.6.4 经济学中常见的弹性 函数	116	4.5 导数的应用(2)	158
习题 3.6	120	4.5.1 曲线的凹凸性与拐点	158
总习题三	121	4.5.2 曲线的渐近线	162
		4.5.3 函数图形的描绘	163
		习题 4.5	165
		总习题四	166
第 4 章 中值定理及导数应用			
4.1 中值定理	124		
4.1.1 罗尔(Rolle)定理	124		
4.1.2 拉格朗日(Lagrange) 中值定理	127		
4.1.3 柯西(Cauchy)中值定理	128		
4.1.4 中值定理应用举例 ..	130		
习题 4.1	131		
4.2 洛必达法则	132		
4.2.1 基本类型的未定式的 极限	133		
4.2.2 其它类型的未定式的 极限	136		
习题 4.2	138		
4.3 泰勒公式	139		
4.3.1 泰勒(Taylor)中值定理	139		
4.3.2 几个初等函数的麦克 劳林公式	142		
习题 4.3	145		
		第 5 章 不定积分	
		5.1 不定积分的概念和性质 ..	169
		5.1.1 原函数与不定积分的 概念	169
		5.1.2 不定积分的几何意义	171
		5.1.3 基本积分表	171
		5.1.4 不定积分的性质	173
		习题 5.1	175
		5.2 换元积分法	175
		5.2.1 第一换元积分法(凑微 分法)	175
		5.2.2 第二换元积分法	180
		习题 5.2	184
		5.3 分部积分法	185
		习题 5.3	188
		5.4 有理函数的不定积分	189
		5.4.1 有理函数与有理函数的	

不定积分	189
5.4.2 可化为有理函数的不定积分	193
习题 5.4	194
总习题五	195

6.6.2 平面图形的面积	227
6.6.3 立体的体积	229
6.6.4 简单的经济问题	232
习题 6.6	233
总习题六	234

第 6 章 定积分

6.1 定积分的概念	198
6.1.1 定积分概念产生的背景	198
6.1.2 定积分的定义	200
6.1.3 定积分的几何意义	202
习题 6.1	203
6.2 定积分的性质	203
习题 6.2	206
6.3 微积分基本公式	207
6.3.1 积分上限的函数及其导数	207
6.3.2 微积分基本公式	209
习题 6.3	211
6.4 定积分的计算	212
6.4.1 定积分的换元积分法	212
6.4.2 定积分的分部积分法	216
习题 6.4	218
6.5 广义积分与 Γ 函数	219
6.5.1 无穷限的广义积分	219
6.5.2 无界函数的广义积分	221
6.5.3 Γ 函数	223
习题 6.5	224
6.6 定积分的应用	225
6.6.1 定积分的元素法	225

第 7 章 多元函数微分学

7.1 向量代数与空间解析几何简介	238
7.1.1 空间直角坐标系	238
7.1.2 空间两点间的距离	239
7.1.3 向量代数简介	240
7.1.4 空间曲面及其方程	242
习题 7.1	246
7.2 多元函数的基本概念	246
7.2.1 平面点集	246
7.2.2 多元函数	248
7.2.3 二元函数的极限与连续	249
习题 7.2	251
7.3 偏导数	252
7.3.1 偏导数的定义	252
7.3.2 偏导数的几何意义及函数连续性与可偏导性的关系	253
7.3.3 高阶偏导数	255
7.3.4 偏导数在经济分析中的应用	255
习题 7.3	258
7.4 全微分	258
7.4.1 全微分的定义	258
7.4.2 函数可微分的条件	259
7.4.3 微分在近似计算中的应用	262

习题 7.4	262
7.5 复合函数与隐函数微分法	263
7.5.1 复合函数的微分法	263
7.5.2 隐函数的微分法	266
习题 7.5	268
7.6 多元函数的极值问题	269
7.6.1 多元函数极值	269
7.6.2 条件极值与拉格朗日乘数法	273
习题 7.6	276
总习题七	277

第 8 章 二重积分

8.1 二重积分的概念与性质	280
8.1.1 二重积分的概念	280
8.1.2 二重积分的性质	282
习题 8.1	284
8.2 二重积分的计算	284
8.2.1 在直角坐标系下计算二重积分	285
8.2.2 在极坐标系下计算二重积分	291
8.2.3 广义二重积分	294
习题 8.2	296
总习题八	297

第 9 章 无穷级数

9.1 常数项级数的概念和性质	300
9.1.1 常数项级数的概念	301
9.1.2 级数的基本性质	304
习题 9.1	308

9.2 正项级数的审敛法	309
习题 9.2	317
9.3 交错级数及其审敛法	318
9.3.1 交错级数的收敛性	318
9.3.2 任意项级数的绝对收敛与条件收敛	320
习题 9.3	321
9.4 幂级数	322
9.4.1 函数项级数的一般概念	322
9.4.2 幂级数及其收敛性	323
9.4.3 幂级数的运算性质	328
习题 9.4	330
9.5 函数展开成幂级数	331
9.5.1 泰勒(Taylor)级数	331
9.5.2 函数展开成幂级数的方法	334
习题 9.5	341
9.6 函数的幂级数展开式的应用	342
9.6.1 函数值的近似计算	342
9.6.2 欧拉公式	345
习题 9.6	346
总习题九	346

第 10 章 常微分方程和差分方程

10.1 微分方程的基本概念	350
10.1.1 微分方程的概念	351
10.1.2 微分方程的阶	351
10.1.3 微分方程的解	351
10.1.4 微分方程的通解、特解	351
10.1.5 微分方程的通解与特解的关系	352

习题 10.1	353	10.5.1 二阶常系数齐次线性 微分方程及其解法 ...	374
10.2 一阶微分方程	354	10.5.2 二阶常系数非齐次线 性微分方程及其解法	378
10.2.1 可分离变量的微分方程	354	习题 10.5	385
10.2.2 齐次方程	356	10.6 差分方程	386
10.2.3 一阶线性微分方程	359	10.6.1 差分的概念及性质	386
10.2.4* 贝努利方程	361	10.6.2 差分方程的基本概念	389
10.2.5 一阶微分方程在经济上 的应用实例	362	10.6.3 线性差分方程解的基本 定理	390
习题 10.2	365	10.6.4 一阶常系数线性差分 方程的解法	391
10.3 可降阶的二阶微分方程	366	10.6.5 差分方程在经济学中 的应用	397
10.3.1 $y'' = f(x)$ 型的微分 方程	366	习题 10.6	399
10.3.2 $y'' = f(x, y')$ 型的 微分方程	367	总习题十	400
10.3.3 $y'' = f(y, y')$ 型的 微分方程	368		
习题 10.3	370		
10.4 二阶线性微分方程解的结构	370		
习题 10.4	373		
10.5 二阶常系数线性微分方程	374		

附录 习题参考答案与提示 403

参考文献 420

第1章

函 数

函数是对现实世界中各种变量之间的相互依存关系的一种抽象,它是微积分学研究的基本对象.在中学时我们对函数的概念和性质已经有了初步的了解,在本章中,我们将进一步阐明函数的一般定义,介绍函数的简单性态以及反函数、复合函数、基本初等函数和初等函数等概念,这些都是学习这门课程的基础.

1.1 集合

1.1.1 集合的概念

集合是数学中的一个基本概念.例如某校一年级的全体学生构成一集合,某个书柜的全部藏书构成一个集合,全体实数构成一个集合等.

一般地,我们把具有某种特定性质的对象组成的总体叫做**集合**.把组成某一集合的各个对象叫做这个集合的**元素**.

习惯上,用大写拉丁字母 $A, B, C, X, Y, \dots$ 表示集合,用小写拉丁字母 $a, b, c, x, y, \dots$ 表示集合的元素.对于给定的集合来说,它的元素是确定的.如果 a 是集合 A 中的元素,则用 $a \in A$ 来表示;如果 a 不是集合 A 中的元素,则用 $a \notin A$ 来表示.

含有有限个元素的集合称为**有限集**;含有无限多个元素的集合称为**无限集**;不含任何元素的集合称为**空集**,记为 $\emptyset$.

表示集合的方法主要有两种,一种是列举法,就是把集合的所有元素一一列举出来,写在花括号内.例如,方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解构成的集合可表示为 $A = \{-2, 2\}$.另一种方法是描述法,就是指出集合的元素所具有的性质.一般地,将具有某种性质的对象 x 所构成的集合表示为

$$A = \{x \mid x \text{ 具有某种性质}\}$$

例如,方程 $x^2 - 4 = 0$ 的解集也可以表示为 $A = \{x \mid x^2 - 4 = 0\}$.

元素为数的集合称为数集,通常用 $\mathbf{N}$ 表示自然数集, $\mathbf{Z}$ 表示整数集, $\mathbf{Q}$ 表示有理数集, $\mathbf{R}$ 表示实数集. 有时我们在表示数集的字母右上角添“+”、“-”等上标,来表示该数集的几个特定子集. 以实数为例, $\mathbf{R}^+$ 表示全体正实数集; $\mathbf{R}^-$ 表示全体负实数集,其它数集的情况类似,不再赘述.

若集合 A 的元素都是集合 B 的元素,则称 A 是 B 的**子集**,或者称 A 包含于 B 或 B 包含 A ,记作 $A \subset B$ 或 $B \supset A$.

若集合 A 与 B 互为子集,即 $A \subset B$ 且 $B \subset A$,就称 A 与 B 相等,记作 $A = B$.

1.1.2 集合的运算

集合有三种基本运算,即并、交、差.

设有集合 A 与 B ,它们的并集记作 $A \cup B$,定义为

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B\}$$

集合 A 与 B 的交集记作 $A \cap B$,定义为

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B\}$$

集合 A 与 B 的差集记作 $A \setminus B$,定义为

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ 但 } x \notin B\}$$

有时,我们把研究某一问题时所考虑的对象的全体称为**全集**,并用 I 表示,把差集 $I \setminus A$ 特别称为 A 的**余集或补集**,记作 A^c . 例如在实数集 $\mathbf{R}$ 中,集合 $A = \{x \mid |x| < 1\}$ 的余集为 $A^c = \{x \mid x \leq -1 \text{ 或 } x \geq 1\}$.

集合的并、交、余运算满足如下运算律:

交换律 $A \cup B = B \cup A, A \cap B = B \cap A$

结合律 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$$

分配律 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

对偶律 $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c, (A \cap B)^c = A^c \cup B^c$

以上这些运算律都容易根据集合相等的定义验证.

在两个集合之间还可以定义**直积**或**笛卡儿 (Descartes) 乘积**,设 A, B 是任意的两个集合,则 A 与 B 的直积,记作 $A \times B$,定义为如下的由有序对 (a, b) 组成的集合:

$$A \times B = \{(a, b) \mid a \in A, b \in B\}$$

例如, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} = \{(x, y) \mid x \in \mathbf{R}, y \in \mathbf{R}\}$, 即为 xOy 平面上全体点的集合, $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ 常记作 $\mathbf{R}^2$.

1.1.3 区间和邻域

区间和邻域是常用的一类实数集.

设 a 和 b 都是实数, 且 $a < b$, 数集

$$\{x \mid a < x < b\}$$

称为**开区间**, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点, 数集

$$\{x \mid a \leq x \leq b\}$$

称为**闭区间**, 记作 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x \mid a \leq x \leq b\}$$

a 和 b 称为闭区间 $[a, b]$ 的端点, 类似地有

$$(a, b] = \{x \mid a < x \leq b\}, [a, b) = \{x \mid a \leq x < b\},$$

$(a, b]$, $[a, b)$ 都称为**半开区间**.

以上这些区间都称为**有限区间**, $b-a$ 的值称为这些区间的长度, 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限值的线段. 闭区间 $[a, b]$ 和开区间 (a, b) 在数轴上表示方法分别如图 1-1(a), (b) 所示. 此外还有无限区间, 引进记号 $+\infty$ (读作正无穷大) 及 $-\infty$ (读作负无穷大), 则可用类似的记号表示无限区间, 例如

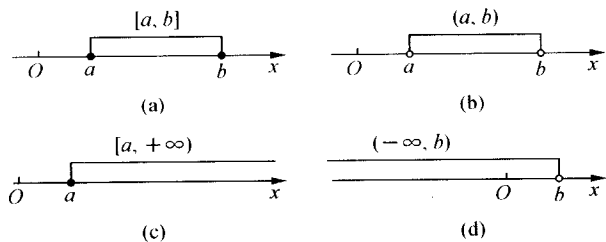


图 1-1

$$[a, +\infty) = \{x \mid x \geq a\}$$

$$(-\infty, b) = \{x \mid x < b\}$$

这两个无限区间在数轴上的表示如图 1-1(c), (d) 所示.

实数集 $\{x \mid |x-a| < \delta, \delta > 0\}$ 称为点 a 的 δ 邻域, 记为 $U(a, \delta)$, 点 a 叫做邻域的中心, δ 叫做邻域的半径, 它在数轴上表示以 a 为中心, 长度为 2δ 的对称开区间, 如图 1-2 所示.

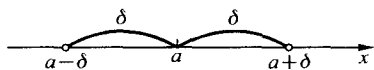


图 1-2

实数集 $\{x \mid 0 < |x-a| < \delta\}$ 称为点 a 的去心 δ 邻域, 记作 $\overset{\circ}{U}(a, \delta)$. 为了方便, 有时把开区间 $(a-\delta, a)$ 称为点 a 的左 δ 邻域, 开区间 $(a, a+\delta)$ 称为点 a 的右 δ 邻域.

习题 1.1

- 如果 $A = \{0, 1, 2\}$, $B = \{1, 2\}$, 下列各种写法, 哪些是对的? 哪些是不对的?
 $1 \in A$; $0 \notin B$; $\{1\} \in A$; $1 \subset A$; $\{1\} \subset A$; $0 \subset A$;
 $\{0\} \subset A$; $\{0\} \subset B$; $A = B$; $A \supset B$; $\emptyset \subset A$; $A \subset A$.
- 设 $A = \{1, 2, 3\}$, $B = \{1, 3, 5\}$, $C = \{2, 4, 6\}$, 求:
 (1) $A \cup B$ (2) $A \cap B$
 (3) $A \cup B \cup C$ (4) $A \cap B \cap C$
 (5) $A \setminus B$
- 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:
 (1) $|x| \leq 3$ (2) $|x-2| \leq 1$
 (3) $|x-a| < \epsilon$ (a 为常数, $\epsilon > 0$) (4) $|x| \geq 5$
 (5) $|x+1| > 2$
- 用区间表示下列点集, 并在数轴上表示出来:
 (1) $A = \{x \mid |x+2| < 2\}$ (2) $B = \{x \mid 1 < |x-2| < 3\}$

1.2 函数

1.2.1 函数的概念

函数是变量之间满足一定条件的一种对应关系. 在中学数学中也学习过函数,

现在我们把函数的概念叙述如下:

定义 1 设有两个变量 x 与 y , D 为一个非空实数集. 如果存在一个确定的法则(或称对应法则) f , 使得对于每一个 $x \in D$, 都有唯一的一个实数 y 与之对应, 则称这个对应法则 f 为定义在实数集 D 上的一个**一元函数**, 简称**函数**, 记为 $y = f(x)$, D 称为 $f(x)$ 的**定义域**. 函数 $f(x)$ 的定义域 D 通常记为 $D(f)$.

对于 $x_0 \in D(f)$, 由法则 f 所对应的实数值 y 称为 $f(x)$ 在点 x_0 处的函数值, 通常记为 $f(x_0)$, 有时也记为 $y|_{x=x_0}$, 此时我们也称函数 $f(x)$ 在点 x_0 处有定义. 全体函数值组成的集合称为函数 $f(x)$ 的**值域**, 通常记为 $R(f)$, 即

$$R(f) = \{y \mid y = f(x), x \in D(f)\}$$

从函数的定义来看, 当定义域与对应法则确定后, 函数就完全确定了. 可见定义域与对应法则是确定函数的两个要素, 因此, 对于函数 $f(x)$, $g(x)$, 如果它们有相同的定义域和对应法则, 它们就是同一个函数.

表示函数的主要方法有三种: 表格法、图形法、解析法(公式法), 这在中学数学中大家已经熟悉, 其中, 用图形法表示函数是基于函数图形的概念, 即坐标平面上的点集

$$\{(x, y) \mid y = f(x), x \in D(f)\}$$

称为函数 $y = f(x)$, $x \in D(f)$ 的图形, 如图 1-3 所示.

对于由解析式表示的函数, 其定义域是指使得函数表达式有意义的自变量取值的全体, 这种定义域也称为函数的**自然定义域**.

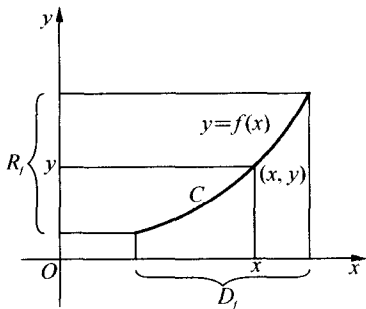


图 1-3

例 1 求函数 $y = \frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域.

解 当 $3x-2 > 0$ 且 $3x-2 \neq 1$ 时, 即 $x > \frac{2}{3}$ 且 $x \neq 1$ 时, 函数 $\frac{1}{\lg(3x-2)}$

才有意义, 因此, $y = \frac{1}{\lg(3x-2)}$ 的定义域为

$$D(f) = \left(\frac{2}{3}, 1\right) \cup (1, +\infty)$$

例 2 求函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域.

解 当 $\left|\frac{x-1}{5}\right| \leq 1$ 且 $x^2 < 25$ 时, 即 $-4 \leq x \leq 6$ 且 $-5 < x < 5$ 时, 函数

$\arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 才有意义, 因此函数 $y = \arcsin \frac{x-1}{5} + \frac{1}{\sqrt{25-x^2}}$ 的定义域为

$$D(f) = [-4, 5)$$

在用解析法表示函数时, 有一种特别的情形, 即有的函数在定义域的不同部分用不同的解析式表示, 这种函数被称为**分段函数**.

例如, 函数

$$y = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

是定义域为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R(f) = [0, +\infty)$ 的一个函数, 它的图形如图 1-4 所示, 当自变量 x 取 $(-\infty, 0)$ 内的数值时, 函数值由 $y = -x$ 确定, 而当自变量 x 取 $[0, +\infty)$ 内的数值时, 函数值由 $y = x$ 确定, 所以是一个分段函数.

例如, 函数

$$y = \operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ -1, & x < 0 \end{cases}$$

也是分段函数, 它的定义域为 $D(f) = (-\infty, +\infty)$, 值域为 $R(f) = \{-1, 0, 1\}$, 图形如图 1-5 所示. 此函数称为符号函数.

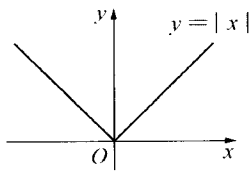


图 1-4

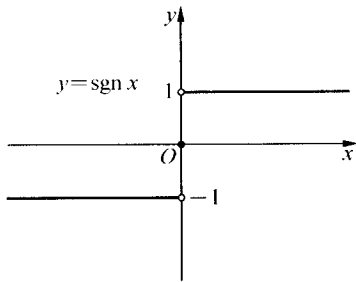


图 1-5

1.2.2 反函数

定义 2 设函数 $y = f(x)$ 的定义域是 $D(f)$, 值域是 $R(f)$, 如果对每一个 $y \in R(f)$, 都有唯一确定的 $x \in D(f)$ 与之对应且满足 $y = f(x)$, 则 x 是定义在 $R(f)$ 上以 y 为自变量的函数, 记此函数为

$$x = f^{-1}(y), y \in R(f)$$

并称其为函数 $y = f(x)$ 的**反函数**.

显见 $x = f^{-1}(y)$ 与 $y = f(x)$ 互为反函数, 且 $x = f^{-1}(y)$ 的定义域和值域分别是 $y = f(x)$ 的值域和定义域.

注意到在 $x = f^{-1}(y)$ 中, y 是自变量, x 是因变量, 但是习惯上, 常用 x 作为自变量, y 作为因变量. 因此, $y = f(x)$ 的反函数 $x = f^{-1}(y)$ 常记为

$$y = f^{-1}(x), x \in R(f)$$

在平面直角坐标系 xOy 中, 函数 $y = f(x)$ 的图形与其反函数 $y = f^{-1}(x)$ 的图形关于直线 $y = x$ 对称, 如图 1-6 所示.

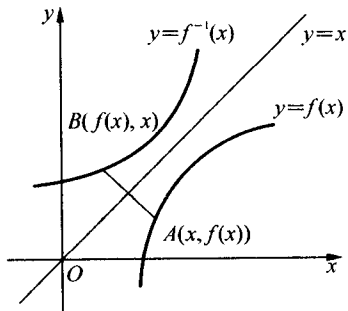


图 1-6

什么样的函数才有反函数呢? 由定义可知, 函数 $y = f(x)$ 具有反函数的充要条件是对应法则 f 使得定义域中的点与值域中的点是一个对一的(简称一一对应). 因为单调函数具有这种性质, 所以单调函数必有反函数.

对于单调函数, 求其反函数的步骤是先从 $y = f(x)$ 中解出 $x = f^{-1}(y)$, 然后将 x 与 y 互换, 便得到反函数 $y = f^{-1}(x)$.

习题 1.2

1. 下列各题中, 函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是否相同? 为什么?

(1) $f(x) = \ln x^2$, $g(x) = 2\ln x$

(2) $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x - 1}$, $g(x) = x - 1$

(3) $f(x) = x$, $g(x) = \sin(\arcsin x)$

(4) $f(x) = x$, $g(x) = e^{\ln x}$

2. 求下列函数的定义域:

(1) $y = \sqrt{x-2} + \frac{1}{x-3} + \ln(5-x)$

(2) $y = \frac{\sqrt{x+2}}{|x|-x}$

(3) $y = 2^{\frac{1}{x}} + \arcsin(\ln \sqrt{1-x})$

(4) $y = \arcsin \frac{1}{x}$

(5) $y = \sqrt{\lg \frac{5x-x^2}{4}}$

(6) $y = 1 - e^{1-x^2}$