西安交大考研

数学135系列

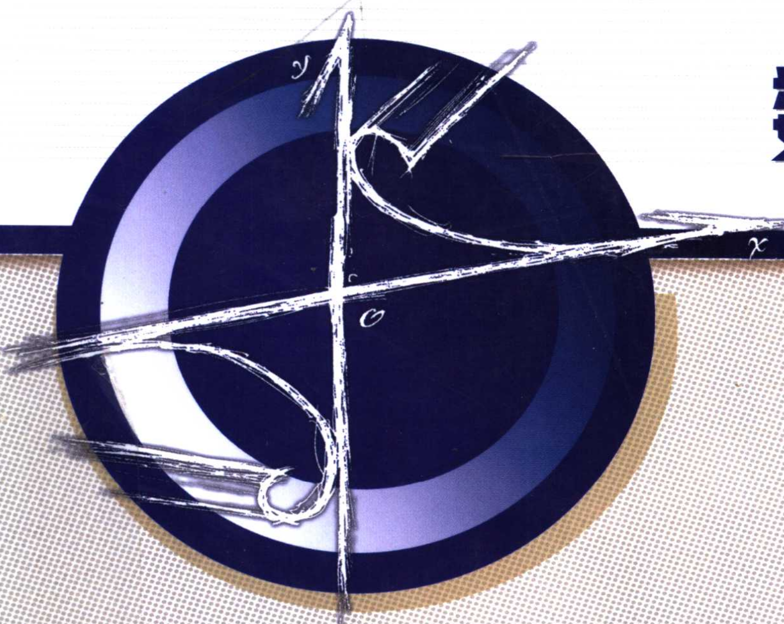
2008版

# 数学考研

# 典型题

主编　龚冬保

## 数学一



网上提问　免费答疑

龚冬保教授网上答疑 解除你复习中的困惑

西安交通大学出版社
XI'AN JIAOTONG UNIVERSITY PRESS

（2008版）

# 数学考研典型题

（数学一）

主　编　龚冬保

副主编　魏战线　张永怀　魏立线

西安交通大学出版社

·西安·

## 内 容 简 介

本书自 1999 年问世以来，2008 版是最新修订版，也是本书第 9 版. 由于本书的例题和练习题精典，所以在本书问世后的 8 年中，每年均以高分覆盖当年考题，深受考生欢迎. 例如 2000 年，书中 36 道题命中考题中非客观题(大题)27 道(次)(数学一，8 题 49 分；数学二，7 题 44 分；数学三，6 题 41 分；数学四，5 题 44 分)；2001 年覆盖考题 66 道(次)332 分(数学一 68 分，数学二 90 分，数学三 83 分，数学四 91 分)；2002 年覆盖考题 338 分(数学一 87 分，数学二 91 分，数学三 81 分，数学四 79 分)；2003 年覆盖考题 561 分(数学一 142 分，数学二 139 分，数学三 142 分，数学四 138 分)；2004 年覆盖数学一试卷 136 分；2005 年(数学一分册)覆盖数学一 135 分；2006 年覆盖数学一 146 分.

本书由四部分组成：第一部分是考卷分析：对新"考试大纲"问世后 2005～2007 年的数学考研考卷作了列表分析，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了；第二部分是应试对策：讲的是复习备考及身临考场的策略；第三部分是典型题选讲与练习：选了 1500 余道题，其中 500 多道例题(包含了往届的考题)，讲解采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了详细解答；第四部分是考题分析：龚冬保教授每年都有一篇专文，深入剖析当年的试题，指出命题的动向.

本书可供准备考研的读者使用，也可供大学数学教师参考.

西安交通大学出版社考研图书网：kaoyan. xjtupress. com

**图书在版编目(CIP)数据**

数学考研典型题—2008 版(数学一)/龚冬保等编著.
—9 版.—西安：西安交通大学出版社，2007.5
ISBN 978-7-5605-1967-8

Ⅰ.数…　Ⅱ.龚…　Ⅲ.高等数学-研究生-入学考试-解题　Ⅳ.O13-44

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2005)第 025300 号

书　　名　数学考研典型题—2008 版(数学一)
编　　著　龚冬保　魏战线　张永怀　魏立线
出版发行　西安交通大学出版社
地　　址　西安市兴庆南路 10 号(邮编：710049)
电　　话　(029)82668357　82667874(发行部)
　　　　　(029)82668315　82669096(总编办)
印　　刷　西安新视点印务有限责任公司
字　　数　847 千字
开　　本　787mm×1092mm　1/16
印　　张　27.125
版　　次　2007 年 5 月第 9 版　2007 年 5 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-5605-1967-8 / O·223
定　　价　38.60 元

# 2008版前言

## ——从2007年考题中的一道证明题谈起

仔细分析2007年的数学考研题，可以感到具体的题目并不难，但整卷却“难”！主要是那道四套数学试卷共用的“难题”——设函数 $f(x)$，$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，在 $(a,b)$ 内具有二阶导数且存在相等的最大值，$f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，证明：存在 $\xi\in(a,b)$，使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$——影响了整卷．这道题多数考生知道作辅助函数 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$，由题设 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，要证明 $\varphi''(\xi)=0$，便需要在 $(a,b)$ 内再找 $\varphi(x)=0$ 的一个点．这要用 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(a,b)$ 内有相同的最大值及介值定理，这个“弯”拐得有点大，缺乏创见的同学很难拐这个弯．许多同学在考场苦苦思索而不得其解，严重挫伤了考生的自信心，耗费了宝贵的时间．致使此题后面几乎都是中等以下的题也成了“难”题，并且无暇检查前面已做的题．因而我们说这一道题使整卷变“难”了！

也有考生早早地放弃了这道题，集中精力做其它题，考了个高分！因此，我们觉得有必要在此向广大读者再一次强调我们提出的“凡是考研的基本题都要会做；凡是会做的题都不做错”这两个“凡是”．在考试中，遇到不会做的难题要敢于放弃，集中精力把会做的题的分数拿下，像这次考135分也不是不可能；在平时复习时，反复练习自己能学会的题，而不纠缠于几道难题，可以提高复习效率，增强复习效果．这就是两个“凡是”的涵义，实质是要紧扣“考试大纲”，练好基本功．

我们编写的“精讲精练”、“典型题”或“模拟试卷”也都是遵循上述原则写的，着重于讲解考研的基本概念、基本理论和基本的方法，尤其侧重于解题的思路和方法．本书更强调解题的方法、技巧与基本功之间的联系，指明“熟能生巧”的原由．

回到今年那道最难的题，我们可以给出多种解法，提示如下：

**解1** 设 $f(x_1)=g(x_2)=M$ 是 $f(x)$、$g(x)$ 在 $(a,b)$ 内的相同的最大值．若 $x_1=x_2$，则 $\varphi(x)=f(x)-g(x)$ 在 $a$，$x_1$，$b$ 已有三个零点，命题可证；若 $x_1\neq x_2$，不妨设 $x_1<x_2$，则 $\varphi(x_1)=f(x_1)-g(x_1)>0$，$\varphi(x_2)=f(x_2)-g(x_2)<0$，由介值定理得，存在 $\eta\in(x_1,x_2)$，使 $\varphi(\eta)=0$，命题得证．

**解2** 同上 $\varphi(a)=\varphi(b)=0$，$\varphi(x_1)>0$，$\varphi(x_2)<0$，因此 $\varphi(x)$ 在 $[a,b]$ 内有最大值点 $\eta_1$ 和最小值点 $\eta_2$，且 $\varphi'(\eta_1)=\varphi'(\eta_2)=0$，在 $[\eta_1,\eta_2]$ 上对 $\varphi'(x)$ 用罗尔定理得，存在 $\xi$ 使 $\varphi''(\xi)=0$．

**解3** （用泰勒公式）$\varphi(a)=\varphi(\eta_1)+\dfrac{1}{2}\varphi''(\xi_1)(\eta_1-a)^2$

$$\varphi(a)=\varphi(\eta_2)+\frac{1}{2}\varphi''(\xi_2)(\eta_2-a)^2$$

故 $\varphi''(\xi_1)<0$，$\varphi''(\xi_2)>0$．由达布中值定理知，存在 $\xi\in(\xi_1,\xi_2)$，使 $\varphi''(\xi)=0$（用到 $\varphi'(\eta_1)=\varphi'(\eta_2)=0$）．

**解4** 由 $\varphi'(\eta_1)=0$ 及 $\varphi''(\eta_1)\leqslant 0$；$\varphi'(\eta_2)=0$ 及 $\varphi''(\eta_2)\geqslant 0$．若 $\varphi''(\eta_1)$ 和 $\varphi''(\eta_2)$ 中有一个等于0，问题得证．若 $\varphi'(\eta_1)<0$，$\varphi'(\eta_2)>0$，由达布中值定理知，存在 $\xi(\eta_1,\eta_2)$ 使 $\varphi''(\xi)=0$．

其中解1、解2用到闭区间连续函数的“介值定理”和“最值定理”；解3和解4用到的达布中值定理，在我们的书中均有介绍．由此启发读者还不难得出本题的其它解法．

本书已出到第9版了，是读者的关爱，使本书越改越好，但由于种种原因，书中的缺点和差错仍在所不免，恳请读者不吝赐教．

本书自出版以来得到西安交通大学出版社的支持，我们在此表示诚挚的谢意！

编　者

2007春，于西安交大

# 第1版前言

（2007年修订）

每当我们上了数学考研辅导课后，总有不少同学建议我们写一本考研辅导的书. 在考生朋友不断地鼓励和期盼下，我们终于写成了此书，希望它能成为众多考生的一个好朋友，陪伴着他们去数学考场“潇洒走一回”.

通过目录，读者可以了解到本书的特点：第一部分（第1章）是考卷分析. 我们对2005至2007三年的考卷作了列表分析. 通过这些表格，将每套考卷的内容覆盖、数学能力、认知水平及难度都量化了. 只要看看六张表格中的数字，就能知道每套考卷主要考些什么. 比如在数学能力方面，计算题基本上要占80分左右；在认知水平上，要求“理解”水平的题在一半左右；在难易程度上，中档题占一半左右，等等. 这样，您看了本书第1章应当对数学考试“心中有数”了. 进一步，如果您藉助我们设计的表格，按照自己的水平，去独立分析一两套试卷，那么就知道应当如何去准备这场考试了. 因此，第1章是作复习前准备必不可少的. 第二部分（第2章）是应试对策，讲的是复习迎考及身临考场的策略. 在有一定数学水平的基础上，能不能考出理想成绩，就要看您的发挥了，如何能发挥好，应试策略是关键. 而“策略”又是最容易被人们忽视的. “考试又不是打仗，讲什么策略”？岂不闻考场如战场，策略往往是成败的关键. 我们写这一章也是个尝试，希望能引起考生对策略问题的重视. 其实，对策是人们干什么事都应考虑的，所谓“优化运筹”不就是要寻找最优对策吗？有了好的复习迎考对策，在此基础上，订一个切实可行的计划，就可以帮助你以高效率和好效果较轻松地争取好成绩. 第三部分（第3～12章）是典型题的选讲与练习，这是本书的主要部分. 我们选了1 500多道题，其中500道例题，采用分析、注释、一题多解等讲法，讲解解题的方法与技巧，所有练习题均给出了答案与提示. 要想考个好成绩，关键是提高解题能力. 我们的书主要围绕基本运算和推理能力、灵活善变的解题技巧、综合运用所学知识及提高应用意识来选题、讲题和布置练习题的. 我们不主张单纯“猜题”，认为只要内容覆盖面全，主要方法都练到了，就能考好，比“猜题”更稳妥，而且有利于提高数学素养；第四部分（第13章）是模拟题，数学一和数学三各两套. 在复习时，请先不要看模拟题，复习完临考前再用这两套题来进行两次“热身”. 用三小时做一套题，看看自己究竟如何，最后找找差距. 值得说明的是，本书中模拟题也有特色，它是以“从难、从严、从实战”出发设计的. 每套试卷比正式考卷更难些，综合题、应用题多些，读者如能在三小时内将我们提供的每套考卷完成，并能获得90分以上的平均成绩，那么，上了考场，正常发挥也一定能考90分以上. 但您如果提前看过了题目，再去做效果就不好了.

以上是我们编写本书的主要想法，但总觉得编写仓促，书中可能会有不少的问题和漏洞，恳切地希望读者多多批评指正.

感谢西安交通大学出版社的支持，使这本书能以面世，感谢关心与鼓励我们的朋友们！

编者

2007.4 于西安交大

（因龚冬保教授主编的《数学考研模拟考试试卷》已单独出版，故本书第四部分取消. ——出版者注）

# 目 录

# 第 1 章

# 考卷分析

本章主要对过去的一些典型试题作了深入的分析又对最近三年的数学一考卷以表格形式作了定量分析，以使考研同学较深入了解考研试卷的主要特征.

## 1.1 分析的必要性

为什么要分析已考过的试卷?不少考生甚至觉得刚考过的题肯定不会再考了，对分析已考过试卷的必要性持怀疑态度，因此，我们先简单说一下分析的必要性.

考试是一种心理测量，一份考卷好比一杆"秤". 比如您上集市买菜，总要先看看秤一样，您准备考研究生，就得先分析考卷，看看在考试内容、考试难度、考题份量、认知和能力层次等等在每份考卷中是如何体现的，摸一摸近几年考卷的底，然后再制订适合自己的应试策略，从而减少复习迎考的盲目性.

对于考研试卷分析的方法，我们分为"微观分析"和"宏观分析"两种. 所谓"微观分析"，就是对试卷中每道试题都要认真作，边作边分析这道题的考点，解这个题的思路及主要方法是什么，这一类题在考研中的地位等等. 在"微观分析"的基础上进一步作"宏观分析"，我们的做法是，给每份试卷有一个表格，将这份试卷中的每道题的属性用数量表示在相应的空格之中，一份试卷一张表，只要看到表格中的数据，不必看具体的试卷本身，就可以了解这份试卷的考点分布、题型结构及整卷难度等等.

本章中对试题和试卷的分析，不仅仅是将分析结果告诉读者，更重要是希望读者学会本书介绍的分析方法，结合自己的实际，针对性更强地去独立分析自己准备投考的那一类考卷. 分析过去是为了预测未来，作到对数学考研"心中有数".

## 1.2 微观分析举例

**例 1.1** 我们试比较 2004 年工学和经济学的两道相似的试题：

(1) (2004，一、二) 设 $f(x)$ 连续，且 $f'(0)>0$，则存在 $\delta>0$，使(  ).

(A) $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 单调增.　　(B) $f(x)$ 在 $(-\delta,0)$ 单调减.

(C) 对 $\forall x\in(0,\delta)$ 有 $f(x)>f(0)$.　　(D) $\forall x\in(-\delta,0)$ 有 $f(x)>f(0)$.

(2) (2004，三、四) 设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 连续，且 $f'(a)>0$，$f'(b)<0$，则下列结论中错误的是(  ).

(A) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(a)$.　　(B) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)>f(b)$.

(C) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f'(x_0)=0$.　　(D) 至少存在一点 $x_0\in(a,b)$ 使 $f(x_0)=0$.

**解** (1) 选(C) 由 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}>0$，知存在 $\delta>0$，当 $0<x<\delta$ 有 $f(x)-f(0)>0$. 故(C) 正确.

(2) 选(D),(A)(B) 的正确性即是(1) 之选项(C). 至于(C) 的正确性可用连续函数的介值定理;故只有(D) 的结论是不对的,故选(D).

比较这两道题(1) 中仅有一点的导数 $f'(0)>0$ 的假设;(2) 中设 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,而(2) 中的选项(A),(B) 均可用到(1) 的概念,即只要对导数概念清楚就行了. 在(1) 中若假设 $f'(x)$ 在 0 点连续,那么选项(A) 也是对的. 证明是这样. 由 $f'(x)$ 连续,且 $f'(0)>0$ 故存在 $\delta>0$,在 $(0,\delta)$ 上 $f'(x)>0$,因此 $f(x)$ 在 $(0,\delta)$ 上单调增. 因此(2) 的假设太强:用 $f'(x)$ 的连续性由 $f'(a)>0$ 知存在 $\delta_1>0$,在 $(a,a+\delta_1)$ 上 $f(x)$ 单增. 当然有 $f(x_0)>f(a)$;由 $f'(b)<0$ 知存在 $\delta_2>0$,在 $(b-\delta_2,b)$ 上 $f'(x)<0$,$f(x)$ 单调减,有 $f(x_0)>f(b)$ 十分简单. 因此(1) 题要难些,且选项(A) 有迷惑性,作这样的题要求概念清楚,并直接证明(C) 的正确性;而(2) 较简单,用排除法较好因为(A)、(B)(C) 是正确的结论容易证明.

顺便指出如将(2) 题的假设改成 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上存在. 其它不变那么选项(A)、(B)、(C) 中结论的正确性正是本书例 4.34(达布中值定理) 的证(1). 读者不妨查读一下,是完全一样的.

至于(2) 的选项(D) 的结论未必正确可以看一个很简单的例子:设 $f(x)=2-x^2$. 在 $[-1,1]$ 上,$f'(-1)=2>0$,$f'(1)=-2<0$,但在 $[-1,1]$ 上 $f(x)\geqslant 1>0$,不存在 0 点.

在考场上作这两个题用不了几行,但剖析起来,尤其是对照剖析,使我们对极限、导数及连续性、单调性都有更深刻的领会,甚至变化一下(2) 题,还可引领到"达布中值定理"这就是举一反三,触类旁通的意思,只限于会不会做这两道题去做题,就不会有多大的收获. 这是我们说的微观分析的方法.

**例 1.2**　(2001,一)　设 $f(0)=0$,则 $f(x)$ 在 $x=0$ 可导的充要条件是

(A) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(1-\cosh)$ 存在.　　(B) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}f(1-e^h)$ 存在.

(C) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h^2}f(h-\sinh)$ 存在.　　(D) $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{1}{h}[f(2h)-f(h)]$ 存在.

**解**　选(B). 本题是概念性较强的题. 只要对导数的定义有透彻理解,就能容易用排除法排除不正确选项. 如,由定义知 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=f'(0)$. 而选项(A)、(C) 中,相当于 $x$ 的因式是 $h^2$,只能取正数趋于 0,不能作导数存在充要条件;而选项(D) 中的极限存在与 $f(0)$ 的取值无关. 也不能作可导充要条件. 因而只有(B) 是正确的选项. 不必举反例,也不要会证明选项(B) 的正确性.

作为平时的练习,深入分析本题,则可以有许多启发. 首先,我们来举反例否定三个不正确选项. 对(A)、(C),可用同一反例:$f(x)=|x|$,满足 $f(0)=0$,且 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2}=\dfrac{1}{2}$ 存在及 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sinh)}{h^2}=0$ 存在,但 $f(x)$ 在 0 点不可导,说明(A)、(C) 选项均不对;对于(D),令 $f(x)=\begin{cases}1, & x\neq 0,\\ 0, & x=0.\end{cases}$ 也有 $f(0)=0$,$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在,而 $f(x)$ 在 0 点间断,故不可导. 因此(D) 也被排除. 仿此,读者还可自己举出与上面不同的反例. 顺便提及,本书的第 4 章之例 4.3、4.4、4.5 及其注释,与本题的考点及分析问题方法以及在那里我们列举的反例,均与本题是一致的. 由于导数概念的重要性,此书的每一版都保留了这几个题. 读者可对比着看,以加深对导数概念及其存在的充分条件. 必要条件及充要条件的理解.

其次,我们来证明选项(B) 的正确性.

必要性. $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{1-e^h}\cdot\dfrac{1-e^h}{h}=-f'(0)$ 存在.

充分性. 对任意 $x\to 0$,取 $|x|<1$,令 $1-e^h=x$. 或 $h=\ln(1-x)$. 则 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{x}{\ln(1-x)}$.

于是 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=-\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-e^h)}{h}$ 存在即 $f'(0)$ 存在.

细心的读者会问　由 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{1-\cosh}\cdot\dfrac{1-\cosh}{h^2}$ 令 $1-\cosh=x$,则 $x\to 0$. 不是也有 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(1-\cosh)}{h^2}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}\cdot\dfrac{1}{2}$ 存在吗. 不是同样证明了选项(A) 也是正确的吗?! 问题在哪里?! 原来,令 $1-\cosh=x$,由 $h\to 0$,只能有 $x\to 0^+$. 因此,我们知道,选项(A) 是 $f(x)$ 在 $x=0$ 处右导数存在的充要条件,因此,我们举反例只要举 $f(x)$ 在 $x=0$ 点右导数存在而导数不存在的例子;进一步看选项(C),我们知道当 $h\to 0$ 时,$h-\sinh$ 是

与 $h^3$ 同阶的无穷小，因而 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}\cdot\dfrac{h-\sin h}{h^2}$. 只要当 $h\to 0$ 时，$h\dfrac{f(h-\sin h)}{h-\sin h}$ 的极限存在. $f'(0)$ 可以是无穷大量. 于是令 $f(x)=x^{2/3}$. 显然 $f(0)=0$，$f'(0)=\infty$ 不存在. 但 $\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(h-\sin h)}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{(h-\sin h)^{2/3}}{h^2}=\lim\limits_{h\to 0}\left(\dfrac{h-\sin h}{h^3}\right)^{2/3}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^{2/3}$ 存在.

至于选项(D)，如果我们令 $f(x)=\begin{cases}0, & x\text{ 是有理数}\\ 1, & x\text{ 是无理数}\end{cases}$，那么，总有 $f(0)=0$，$\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(2h)-f(h)}{h}=0$ 存在，但 $f(x)$ 处处间断！

像这样去分析一道题，必定能作到举一反三、触类旁通，做一个题胜似做一类题.

**例 1.3**　(2002，一)　设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$ (　　)

(A) 发散　(B) 绝对收敛　(C) 条件收敛　(D) 收敛性由所给条件不能判定.

**解**　选(C). 本题值得分析之处在于不少考生以为级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$ 是交错级数，且 $\dfrac{1}{u_n}$ 与 $\dfrac{1}{n}$ 是等价无穷小，由莱布尼茨判别法它收敛，如加绝对值则发散. 故选(C). 这是不对的，理由是设 $a_n=\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}}$，由已知条件，无法证明 $a_n$ 单调减. 而用莱布尼茨法则这一条是不可少的. 沿这个思路去想这个题，反倒是学习好的学生会选(D)，因为他无法证明 $a_n$ 的单调性.

其实要证明此级数收敛，应当用部分和：

$$S_n=(\frac{1}{u_1}+\frac{1}{u_2})-(\frac{1}{u_2}+\frac{1}{u_3})+(\frac{1}{u_3}+\frac{1}{u_4})\cdots+(-1)^{n+1}\frac{1}{u_n}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}=\frac{1}{u_1}+\frac{(-1)^{n+1}}{u_{n+1}}$$

故 $\lim\limits_{h\to\infty}S_n=\dfrac{1}{u_1}$ 存在，从而级数收敛，且其和为 $\dfrac{1}{u_1}$.

因此，此题如改成下面两种题更好.

其一，仍是选择题，只要改为“设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\dfrac{1}{u_n}$ (　　)”仍为原题的 4 个选项. 那么正确答案是(D)，而不是(C).

为了排除选项(C)，我们可令 $\dfrac{1}{u_n}=\dfrac{1}{n}+\dfrac{(-1)^n}{n\ln(n+3)}$，则有 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，但

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{u_n}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{1}{n}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln(n+3)},$$

前一个和式收敛，后一个和式发散，故发散. 这样一改对学习好的学生有利. 而且选项(C) 有迷惑性.

其二，“设 $u_n\neq 0(n=1,2,\cdots)$，且 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n}{u_n}=1$，证明级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}(\dfrac{1}{u_n}+\dfrac{1}{u_{n+1}})$ 条件收敛，并求其和.

改为这样的非客观题，应当是较有水平的一道好题.

分析以往的试题，主要应从其考点，解题的思路与方法方面作深入的探讨，这样会发现，以往考题有许多是相同的.

**例 1.4**　(1)(2000，二)　设 $\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\-2&3&0&0\\6&-4&5&0\\0&0&-6&7\end{bmatrix}$，$\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{A})^{-1}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})$，则 $(\boldsymbol{E}+\boldsymbol{B})^{-1}=$ ______.

(2)(2001，一)　设 $\boldsymbol{A}^2+\boldsymbol{A}-4\boldsymbol{E}=0$，则 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})^{-1}=$ ______.

(3)(2002，二)　已知 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为 3 阶矩阵，且 $2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}-4\boldsymbol{E}$.

(i) 证明 $\boldsymbol{A}-2\boldsymbol{E}$ 可逆；(ii) 若 $\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1&-2&0\\1&2&0\\0&0&2\end{bmatrix}$，求 $\boldsymbol{A}$.

**解**　我们只要做第(3) 题，读者可仿此做(1)(2) 两题.

(3) (i) 证.用 $A$ 左乘所给等式两边得 $2B = AB - 4E$. $(A-2E)B-4A=0$,要证 $A-2E$ 可逆,故设法分出 $(A-2E)$ 的因式即得 $(A-2E)B-4(A-2E)=8E$. 或 $(A-2E)(B-4E)=8E$.

故 $A-2E$ 可逆,且 $(A-2E)^{-1}=\frac{1}{8}(B-4E)$.

(ii) $A-2E=8(B-4E)^{-1}$,用分块矩阵的方法易得

$$8(B-4E)^{-1}=\begin{bmatrix}-2 & 2 & 0\\ -1 & -3 & 0\\ 0 & 0 & -4\end{bmatrix},\ A=\begin{bmatrix}0 & 2 & 0\\ -1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & -2\end{bmatrix}.$$

而2003年数学四和数学二、2004年数学一、二又考了三道类似题.

**例 1.5** (1) 设 $B=\begin{bmatrix}2 & 0 & 2\\ 0 & 4 & 0\\ 2 & 0 & 2\end{bmatrix}$ 及 $AB=2A+B$,则 $(A-E)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & 0 & 0\end{bmatrix}$.

(2) 设 $A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & 2 & 0\\ -2 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 及 $A^2B-A-B=E$,则 $|B|=$ ________.

(3) 设 $A=\begin{bmatrix}2 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$ 且 $ABA^*=2BA^*+E$,则 $|B|=$ ________.

**解** (3) 由 $|A|=3$,将已知等式两边右乘以 $A$ 得 $3AB=6B+A$. $3(A-2E)B=A$.

取行列式得 $3^3|A-2E||B|=|A|$, $|B|=\frac{1}{9}$.

(2) 题请读者自行完成.

像这样从考点、思路、方法去分析,可将许多看似不一样的题归之为同一类的题.

再看几道考点、思路、方法相同的高数题.

**例 1.6** (2001,三、四与1991,一、二)

(1) (2001,三) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x\ (k>1)$,证明存在 $\xi\in(0,1)$,使 $f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi)$.

(2) (2001,四) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,在 $(0,1)$ 内可导,且 $f(1)=3\int_0^{1/3}e^{1-x^2}f(x)\mathrm{d}x$,证明存在 $\xi\in(0,1)$ 使 $f'(\xi)=2\xi f(\xi)$.

(3) (1991,一、二) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续,$(0,1)$ 内可导,且 $3\int_{2/3}^1 f(x)\mathrm{d}x=f(0)$. 证明存在 $c\in(0,1)$ 使 $f'(c)=0$.

**解** 这三道题从考点、思路、解法上也是一样的题.我们只要解其中一题,其余两题读者一定能做.

(1) 由 $f(1)=k\int_0^{1/k}xe^{1-x}f(x)\mathrm{d}x$,便知其第一步用积分中值定理.由积分中值定理得,存在 $\eta\in[0,\frac{1}{k}]$. 使 $f(1)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$. 再从要证明的结果知,将用罗尔定理,区间是 $[\eta,1]\subseteq[0,1]$,辅助函数便是 $F(x)=xe^{1-x}f(x)$. $F(x)$ 显然在 $[\eta,1]$ 上连续,在 $(\eta,1)$ 可导,且 $F(1)=f(1)=F(\eta)=\eta e^{1-\eta}f(\eta)$. 故由罗尔定理知.存在 $\xi\in(\eta,1)\subset(0,1)$,使 $F'(\xi)=0$. 而

$$F'(x)=e^{1-x}f(x)-xe^{1-x}f(x)+xe^{1-x}f'(x)$$

于是 $F'(\xi)=0$ 即 $\xi f'(\xi)-(\xi-1)f(\xi)=0$,也就是

$$f'(\xi)=(1-\xi^{-1})f(\xi).$$

**例 1.7** (2003,三) 设 $f(x)$ 在 $[0,3]$ 连续,$(0,3)$ 内可导,且 $f(0)+f(1)+f(2)=3$, $f(3)=1$. 证明存在 $\xi\in(0,3)$,使 $f'(\xi)=0$.

**证** 由已知 $\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1$,及 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上连续,故 $f(x)$ 在 $[0,2]$ 上有最大值和最小值 $M$ 和 $m$.

从而有 $m \leqslant \frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}=1 \leqslant M$,同介值定理知,存在 $\eta \in [0,2]$,使 $f(\eta)=f(3)=1$. 于是 $f(x)$ 在 $[\eta,3]$ 上满足罗尔定理条件,由罗尔定理知,存在 $\xi \in (\eta,3) \subset (0,3)$ 使 $f'(\xi)=0$.

与例 1.6 比较之(1) 设 $f(1)=\int_0^{1/k} x e^{1-x} f(x)\mathrm{d}x / \frac{1}{k}$,本题是 $f(3)=\frac{f(0)+f(1)+f(2)}{3}$,它们都是一个端点的值等于函数在某区间的平均值. 积分中值定理本质上就是平均值定理,因此,理解透了,这两题也是相同的. 这就是我们作微观分析的一种主要方法.

**例 1.8**　(2007,一、二、三、四) 设 $f(x)$,$g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$(a,b)$ 内二阶可导且存在相等最大值,$f(a)=g(a)$,$f(b)=g(b)$,证明存在 $\xi \in (a,b)$,使 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(本题证明见前言)

本题的考点:介值定理与罗尔定理. 与例 1.6、1.7 一样,方法也是一样的. 但本题难在要证明 $[f(x)-g(x)]''_\xi=0$,主要是证 1,要用介值定理先找出 $f(x)-g(x)$ 在 $(a,b)$ 内的一个零点. 证 2、证 3、证 4 都用到最值定理,证 3、证 4 则用到达布定理与泰勒公式. 这些“弯”不是训练有素的同学是拐不过来的. 因此,我们认为解此题学生要有一定的“创见”(见表 1.3).

## 1.3　宏观分析

我们用下面的表格,将考卷的一些特征数量化,通过一些简单的统计,就可以了解每套考卷的特点和各套考卷的共性. 值得说明的是,我们这种分析不是考后的统计分析,考后的统计分析能评价试卷的“好与差”,主要提供考试管理人员、命题教师参考,当然,也可以提供考生参考. 那种分析要有足够的样本,才可以作到分析的客观性. 我们的这种分析是根据自己的教学经验,对考生水平的估计而作出的. 虽说主观,却能结合考生实际,来解释试卷的特征.

先对数据各项目作个简单说明.

各课程的章目是按考研大纲所列内容的次序排列的,我们将章名限制在四个字以内,有的章不能用四个字概括则略写. 现在把略写的章名用括号说明如下:

函数极限(连续);(向量代数) 空间解几;随机事件(和概率);随机变量(概率分布);多维(随机变量及其概率)分布;其余的章目估计不会引起误会,就不作说明了. 如大数定律一章自然也包含中心极限定理等等. 读者如有不清楚的可参看“考研大纲”.

认知层次一栏中的“简用”是指简单应用,表示能将有关知识在另一个新环境中进行应用;“应用”是指复杂应用,表示能将有关知识在两个以上新环境中进行应用.

“期望”是指整卷的难度期望分,其计算方法见表 1.1 后面的难度分析. 表格中的“分值”填写的是试卷中各章内容在各个类别中所占的分数.

(1) 2005 年数学一试卷

**表 1.1　2005 年数学一宏观分析表**

| 课程 | 分值 类别 / 章目 | 数学能力 | | | | | 认知层次 | | | | | 难度 | | | | | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 概念 | 计算 | 推理 | 综合 | 应用 | 识记 | 理解 | 简用 | 应用 | 创见 | 易 | 较易 | 中 | 较难 | 难 | |
| 高等数学 | 函数极限 | | | | 9 | | | 5 | 4 | | | | | | 9 | | 9 |
| | 一元微分 | | 11 | | 2 | | | 11 | 2 | | | 4 | | | 2 | 7 | 13 |
| | 一元积分 | | 5 | | 4 | | | | 9 | | | | | 7 | 2 | | 9 |
| | 空间解几 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 多元微分 | 4 | 4 | | 2 | | 4 | 4 | 2 | | | 4 | | 6 | | | 10 |
| | 多元积分 | | 21 | | 6 | | | 27 | | | | | | 15 | 12 | | 27 |
| | 无穷级数 | | 12 | | | | | 12 | | | | | | 12 | | | 12 |
| | 微分方程 | | 4 | | 6 | | | 4 | 6 | | | | 4 | | 6 | | 10 |
| 线性代数 | 行列式 | | | | 2 | | | 2 | | | | | | 2 | | | 2 |
| | 矩　阵 | 4 | | | 4 | | | 8 | | | | | | 6 | 2 | | 8 |
| | 向　量 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 方程组 | | | | 7 | | | 7 | | | | | | | 7 | | 7 |
| | 特征向量 | 4 | | | | | | 4 | | | | | 4 | | | | 4 |
| | 二次型 | | 9 | | | | | 9 | | | | | | 9 | | | 9 |
| 概率统计 | 随机事件 | | 4 | | | | | 4 | | | | | | 4 | | | 4 |
| | 随机变量 | | | | | 4 | | | 4 | | | | | 4 | | | 4 |
| | 二维分布 | | 9 | | | | | 9 | | | | | | 9 | | | 9 |
| | 数字特征 | | 9 | | | | | | 9 | | | | | 9 | | | 9 |
| | 大数定律 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 统计概念 | 4 | | | | | | 4 | | | | | 4 | | | | 4 |
| | 参数估计 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 假设检验 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 合计 | 16 | 88 | | 42 | 4 | 4 | 110 | 36 | | | 8 | 12 | 83 | 40 | 7 | 期望 81.2 |

从表 1.1 看出

1. 内容分布　一元积分题偏少,但多元积分题多,尚可平衡.

2. 数学能力　综合题 42 分,推理的证明题也有综合性,这是近年数学考研命题很重要的倾向.

3. 认知层次　这一项很难把握,但每年均以理解类的题多.

4. 难度　期望分由易到难各档的期望分分别为 90%、75%、60%、35% 和 20%,于是按上表此试卷期望分为:$8\times 90\%+12\times 75\%+83\times 60\%+40\times 35\%+7\times 20\%=81.2$,因试卷长度较长,估计平均成绩约在 72 分左右.

(2) 2006 年数学一试卷

**表 1.2　2006 年数学一宏观分析表**

| 课程 | 分值 类别 / 章目 | 数学能力 | | | | | 认知层次 | | | | | 难　度 | | | | | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 概念 | 计算 | 推理 | 综合 | 应用 | 识记 | 理解 | 简用 | 应用 | 创见 | 易 | 较易 | 中 | 较难 | 难 | |
| 高等数学 | 函数极限 | | 4 | 12 | | | 4 | | 12 | | | 4 | | | 12 | | 16 |
| | 一元微分 | 4 | | | | | 4 | | | | | | | 4 | | | 4 |
| | 一元积分 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 空间解几 | | 4 | | | | 4 | | | | | 4 | | | | | 4 |
| | 多元微分 | 4 | | | 16 | | | 14 | 6 | | | | | 14 | | 6 | 20 |
| | 多元积分 | 8 | 10 | | 6 | | | 18 | 6 | | | | 4 | 14 | 6 | | 24 |
| | 无穷级数 | 4 | 12 | | | | | 16 | | | | | | 16 | | | 16 |
| | 微分方程 | | 4 | | 2 | | 4 | | 2 | | | 4 | | 2 | | | 6 |
| 线性代数 | 行列式 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 矩　阵 | 4 | 4 | | | | | 8 | | | | | | 8 | | | 8 |
| | 向　量 | 4 | | | | | | 4 | | | | | | 4 | | | 4 |
| | 方程组 | | | 9 | | | | | 9 | | | | | | 9 | | 9 |
| | 特征向量 | | 9 | | | | | 9 | | | | | | | 9 | | 9 |
| | 二次型 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| 概率统计 | 随机事件 | | 4 | | | | 4 | | | | | | 4 | | | | 4 |
| | 随机变量 | 4 | 9 | | | | | 13 | | | | | | 13 | | | 13 |
| | 多维分布 | | 4 | | | | | 4 | | | | | 4 | | | | 4 |
| | 数字特征 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 大数定律 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 统计概念 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 参数估计 | | 9 | | | | | 9 | | | | | | 9 | | | 9 |
| | 假设检验 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 合计 | 32 | 73 | 21 | 24 | | 16 | 99 | 35 | | | 12 | 12 | 84 | 36 | 6 | 期望 96 |

从表 1.2 看出

1. 内容分布　一元微积分题偏少，比去年倾向更盛.

2. 数学能力　无应用题，由于多元积分题多，故综合题少.

3. 认知层次　较高层次的题没有.

4. 难度　期望分 96 分，比往年稍容易些，加以试卷不算长，估计平均在 86 分左右.

(3) 2007 年数学一试卷

**表 1.3　2007 年数学一宏观分析表**

| 课程 | 分值 类别 章目 | 数学能力 | | | | | 认知层次 | | | | | 难度 | | | | | 合计 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 概念 | 计算 | 推理 | 综合 | 应用 | 识记 | 理解 | 简用 | 应用 | 创见 | 易 | 较易 | 中 | 较难 | 难 | |
| 高等数学 | 函数极限 | | 4 | | | | 4 | | | | | 4 | | | | | 4 |
| | 一元微分 | 4 | | 11 | 2 | 4 | 4 | 8 | 4 | | 5 | | 4 | 4 | 2 | 11 | 21 |
| | 一元积分 | | 8 | | | | 4 | 4 | | | | | 4 | 4 | | | 8 |
| | 空间解几 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 多元微分 | | 4 | | | 11 | 4 | | 11 | | | 4 | | 11 | | | 15 |
| | 多元积分 | 4 | 4 | | | | | 18 | | | | | | 14 | 4 | | 18 |
| | 无穷级数 | | | | 10 | | | 10 | | | | | | | 10 | | 10 |
| | 微分方程 | | 4 | | 2 | | 4 | | 2 | | | 4 | 2 | | | | 6 |
| 线性代数 | 行列式 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 矩　阵 | | 4 | | | | 4 | | | | | | 4 | | | | 4 |
| | 向　量 | 4 | | | | | 4 | | | | | 4 | | | | | 4 |
| | 方程组 | | 11 | | | | | 11 | | | | | | 11 | | | 11 |
| | 特征向量 | | 11 | | | | | 4 | | 7 | | | | 4 | 7 | | 11 |
| | 二次型 | 4 | | | | | | 4 | | | | | | 4 | | | 4 |
| 概率统计 | 随机事件 | 4 | | | | | | 4 | | | | | | | 4 | | 4 |
| | 随机变量 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 多维分布 | 4 | 15 | | | | | 19 | | | | | 8 | 11 | | | 19 |
| | 数字特征 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 大数定律 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 统计概念 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 参数估计 | | 11 | | | | | 11 | | | | | | 11 | | | 11 |
| | 假设检验 | | | | | | | | | | | | | | | | |
| | 合计 | 24 | 76 | 11 | 14 | 15 | 28 | 93 | 17 | 7 | 5 | 16 | 22 | 74 | 27 | 11 | 期望 81.6 |

从表 1.3 看出

1. 内容分布　覆盖面较好，一元微分学的题略多些.
2. 数学能力　推理题和综合题至少了些.
3. 认知层次　分布尚可.
4. 难度　期望分 81.6，加以计算量大，编排不好，估计平均分只有 70 分上下.

## 1.4 小结与预估

上面 3 张统计表，把 3 年试卷的考试内容、考核的能力、认知层次及难度等，都数量化了. 这些数据不但清楚地告诉我们近年来数学考研试卷的结构，而且，如果我们进一步分析这些数据，并将宏观与微观分析相结合还可以获得更多的有益信息，预测数学考研题的走向，对准备未来的考试心中有数. 下面是我们的简单小结与预估.

**1. 考试内容**

各考卷最大共同点是内容覆盖面大.当然,总有些内容是年年都能考到的,也有些是偶尔考到的,比如高等数学中的定积分在力学、物理学方面的应用,实际的极值问题,多元函数积分学中的求质心和转动惯量等方面的考题很少出现但 2002 年出现了求压力的题.2003 年又有变力作功的题.1999 年数学一、三、四均没有线性方程组的考题,而 2000 年均考到了!

**2. 数学能力**

计算题最多,在近 3 年的试卷中,综合题的比例明显要高.大多数综合题和应用题都要通过计算来完成,因此,**强化综合运用数学知识能力及计算基本功的训练是最重要的**.下面我们来举 2000 年及 2001 年的两道试题为例.

**例 1.9**　(2000,一、二) 设 $f(x)$、$g(x)$ 是恒大于零的可导函数,且 $f'(x)g(x)-f(x)g'(x)<0$,则当 $a<x<b$ 时,有

(A)　$f(x)g(b)>f(b)g(x)$　　(B)　$f(x)g(a)>f(a)g(x)$

(C)　$f(x)g(x)>f(b)g(b)$　　(D)　$f(x)g(x)>f(a)g(a)$

**解 1**　(概念清楚的解法).已知条件可化为 $\left[\dfrac{f(x)}{g(x)}\right]'<0$,因而 $\dfrac{f(a)}{g(a)}>\dfrac{f(x)}{g(x)}>\dfrac{f(b)}{g(b)}$.　选(A)

**解 2**　(灵活解法)　在$[1,2]$上令 $f(x)=1$,$g(x)=x$,显然满足已知条件,这时只有(A)正确,故选(A).

解 2 是非正规的解法,它可以不知道所给的已知条件是什么涵义,却能做对此题!

2001 年及 2003 年不仅是综合题增加了,而且概念推理的考查加强了,做题的灵活性也就更强了.

**例 1.10**　(2001,一、二) 已知 $y=f(x)$ 其定义域内可导,它的图形如图 1.1 所示,则其导函数 $y=f'(x)$ 的图形为(　　)

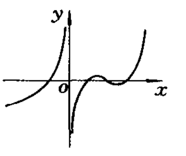



图 1.1

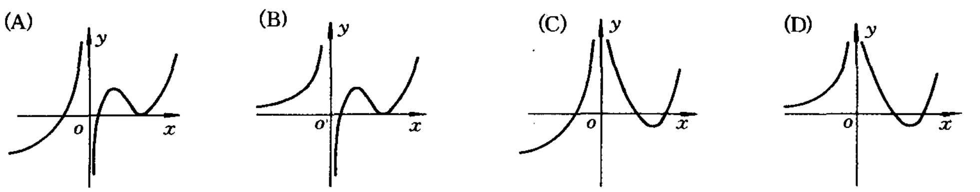



图 1.2

**解 1**　(筛选法),由 $y=f(x)$ 的图形知,在$(-\infty,0)$内 $f'(x)>0$.故只有(B)、(D)可能正确;又在$(0,+\infty)$内 $f(x)=0$ 有三个单根,故 $f'(x)=0$ 只有两个单根,故只有(D)正确.选(D).

**解 2**　(灵活的特例法).设 $f(x)=\begin{cases} x-\dfrac{1}{x}, & x<0 \\ \dfrac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^2}, & x>0 \end{cases}$

图形如所设的图形,这时,

$$f'(x)=\begin{cases} 1+\dfrac{1}{x^2}, & x<0 \\ \dfrac{1}{x^3}(x^3-11x+12), & x>0 \end{cases}$$

只要分析 $y=f'(x)$ 的图形上几个简单特点,便易选(D).

**例 1.11**　(2003,一、二)　设 $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$连续,其导函数图形为图 1.3 所示.则 $f(x)$ 有

(A) 1 个极小值点和 2 个极大值点.

(B) 2 个极小值点和 1 个极大值点.

(C) 2 个极小值点和 2 个极大值点.

(D) 3 个极小值点和 1 个极大值点.

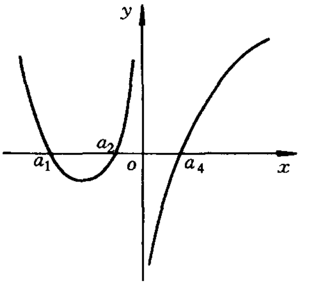



图 1.3

**解**　本题拟直接选.从图上看 $f'(x)$ 有三个零点 $a_1$、$a_2$、$a_4$ 和一个无穷型间

断点 $a_3=0$. 而当 $x$ 从左向右越过 $a_1$ 点和 $a_3=0$ 点时，$f'(x)$ 由正变负. 故这 2 点是 $f(x)$ 的极大值点；同样，$a_2$、$a_4$ 是极小值点. 因而选(C).

例 1.9 是已知函数图形，研究导函数图形. 而例 1.10 是已知导数图形，研究原函数性质，实质是不定积分问题. 按图 1.3 可以构造一个导函数如下：

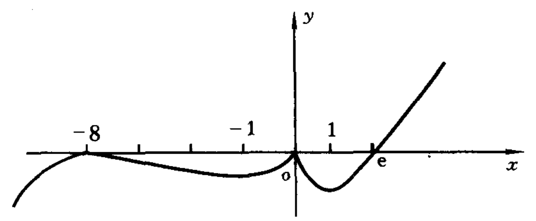



图 1.4

令 $$f'(x)=\begin{cases}\dfrac{-(x^{\frac{1}{3}}+1)(x^{\frac{1}{3}}+2)}{x^{1/3}}, & x<0\\ \ln x, & x>0\end{cases}$$

则 $f'(x)$ 的图形相似图 1.3 中的图形.

而 $$f(x)=\begin{cases}-\dfrac{3}{4}x^{\frac{2}{3}}(x^{\frac{2}{3}}+4x^{\frac{1}{3}}+4)+c, & x\leqslant 0\\ x\ln x-x+c, & x>0\end{cases}$$

取 $c=0$. 则 $y=f(x)$ 的图形如图 1.4 所示，其中 $-8$, $0$ 是 2 极大值点而 $-1$, $1$ 是 2 个极小值点.

**因此，做题时，不但要基本功扎实，还要有灵活的、机智的方法.** 其中形数结合的方法是很好的解题方法，希望引起读者重视.

**3. 认知层次**

近年有的考题在认知层次方面也有属于"复杂应用"的高层次的题，不过为了降低难度，往往将这种题分成两问，我们试改成一问来分析其中一题：

**例 1.12** (改自 2005，一、二) 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，在 $(0,1)$ 内可导，且 $f(0)=0$, $f(1)=1$. 证明存在 $\xi\neq\eta\in(0,1)$，使 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)=1$.

**分析**　若 $f(x)=x$，结论显然成立. 因此只讨论 $f(x)\neq x$ 的情况($x\in(0,1)$). 由要证明的结论，想到拉氏中值定理：$f'(\xi)$ 和 $f'(\eta)$ 应为两弦的斜率，由 $\xi\neq\eta$ 知此二弦应共一个端点 $B$(图 1.5). 设 $B(x_0,f(x_0))$，则问题化为是否存在 $x_0\in(0,1)$，使 $\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}\cdot\dfrac{f(x_0)}{x_0}=1$，由 $f(x_0)\neq x_0$，故有 $f(x_0)=1-x_0$. 化为这样的问题，本命题便变得容易了，这就是原试题中的第一问. 我们将证明简述于下：

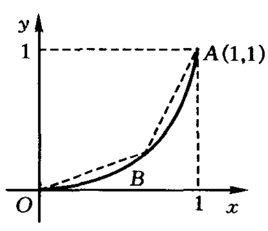



图 1.5

**证**　令 $F(x)=f(x)-(1-x)$，则 $F(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，且 $F(0)=-1$, $F(1)=1$，由介值定理知，存在 $x_0\in(0,1)$，使 $F(x_0)=0$，即 $f(x_0)=1-x_0$. 又 $f(x)$ 在 $[0,x_0]$ 和 $[x_0,1]$ 上满足拉氏中值定理条件，即存在 $0<\eta<x_0$，使 $f'(\eta)=f(x_0)/x_0$；存在 $\xi\in(x_0,1)$，使 $f'(\xi)=\dfrac{1-f(x_0)}{1-x_0}$，即有 $0<\eta<x_0<\xi<1$，使 $f'(\xi)\cdot f'(\eta)=1$.

以上由拉氏定理的几何意义，推到两弦斜率之积为 1，从而得出 $f(x_0)=1-x_0$，转而用介值定理后再用拉氏定理完成命题的证明，不是基本功训练有素的人，是无法想象的. 反过来说，只要基本功扎实，掌握一些数学分析问题的基本方法，再难的题也是会有思路的，所以，我们特别强调多作基本题，探索解题思路与方法.

值得一提的是，认知层次与题目难度并非一致. 比如下面 2004 年数一、二的一道选择题.

**例 1.13** (2004，一、二)　设 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 为满足 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 的任意两非零矩阵. 则必有(　).

(A) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关.

(B) $\boldsymbol{A}$ 的列向量线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关.

(C) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的行向量线性相关.

(D) $\boldsymbol{A}$ 的行向量线性相关，$\boldsymbol{B}$ 的列向量线性相关.

**解**　选(A). 设 $\boldsymbol{A}=(a_{is})=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s)$. 其中 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的列向量；$\boldsymbol{B}=(b_{sj})=\begin{bmatrix}\boldsymbol{\beta}_1\\ \boldsymbol{\beta}_2\\ \vdots\\ \boldsymbol{\beta}_s\end{bmatrix}$. 其中 $\boldsymbol{\beta}_1,\boldsymbol{\beta}_2,\cdots,\boldsymbol{\beta}_s$ 是 $\boldsymbol{B}$ 的行向量. 设 $\bar{\boldsymbol{\alpha}}_k=(a_{k1},a_{k2},\cdots,a_{ks})$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的一个非零行向量. 则由 $\boldsymbol{AB}=\boldsymbol{O}$ 知，$a_{k1}\boldsymbol{\beta}_1+a_{k2}\boldsymbol{\beta}_2+\cdots+a_{ks}\boldsymbol{\beta}_s$