21SHIJI GAOZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

21世纪

高职高专“十一五”规划教材

Gaodeng SHUXUE 上册

高等数学

主审 邵 杰

主编 吴炳荣 李思广

西北工業大學出版社

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

21SHIJI GAOZHIZHUAN SHIYIWU GUIHUA JIAOCAI

21世纪 高职高专"十一五"规划教材

Gaodeng SHUXUE

高等数学 上册

主审 邵 杰

主编 吴炳荣 李思广

西北工業大學出版社

NORTHWESTERN POLYTECHNICAL UNIVERSITY PRESS

【内容简介】 本教材是根据教育部《高职高专教育高等数学教学课程教学基本要求》结合多年高等数学课程的教学实践而编写的。

本教材的编写坚持以人为本，以学为主，注重创新意识和综合素质培养的指导思想，坚持以应用为目的，以必需够用为度和少而精的原则，在保证科学性的基础上考虑到专升本的要求，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本教材突出了与计算机应用的结合，下册专辟"数值计算初步"一章，增加了部分计算方法的内容、计算机解法初步，介绍一些常用算法的框图和程序，使学生能够更好更快的适应科技工作的需要，适应用人单位的需要。

图书在版编目(CIP)数据

高等数学/吴炳荣，李思广主编．—西安：西北工业大学出版社，2007.8

ISBN 978-7-5612-2269-0

Ⅰ.高… Ⅱ.①吴…②李… Ⅲ.①高等数学-高等学校②技术学校-教材 Ⅳ.013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 121175 号

出版发行：西北工业大学出版社

通信地址：西安市友谊西路 127 号　　邮政编码：710072

电　　话：(029)88493844　88491757

网　　址：www.nwpup.com

印 刷 者：河南新华印务有限公司

开　　本：787 mm×1 092 mm　　1/16

印　　张：26.5

字　　数：620 千字

版　　次：2007 年 8 月第 1 版　　印次：2007 年 8 月第 1 次印刷

定　　价：40.00 元

《高等数学》

作者名单

主　审　邵　杰

主　编　吴炳荣　李思广

副主编　张爱真　郝钢军　何凤英

吴松丽　张桂贞

编　委　邵　杰　商丘科技学院

吴炳荣　解放军信息工程大学

李思广　周口职业技术学院

张爱真　周口职业技术学院

郝钢军　周口职业技术学院

何凤英　周口职业技术学院

吴松丽　驻马店教育学院

张桂贞　河南司法警官职业学院

前言

《高等数学》课程是计算机系各专业学生的一门必修的重要基础理论课，是为培养高等技术应用型人才服务的，是学生掌握数学工具的主要课程。

本教材是根据教育部《高职高专教育高等数学教学课程教学基本要求》结合多年高等数学课程的教学实践而编写的。

本教材的编写坚持以人为本，以学为主，注重创新意识和综合素质培养的指导思想，坚持以应用为目的，以必需够用为度和少而精的原则，在保证科学性的基础上考虑到专升本的要求，注意讲清概念，减少理论证明，注重学生基本运算能力和分析问题、解决问题能力的培养。

本教材突出了与计算机应用的结合，下册专辟“数值计算初步”一章，增加了部分计算方法的内容、计算机解法初步，介绍一些常用算法的框图和程序，使学生能够更好更快的适应科技工作的需要，适应用人单位的需要。

本教材分上下册，教学时数为120学时左右。本书可供高职高专院校师生使用。

本书由邵杰主审，统稿和定稿，吴炳荣、李思广主编。参编人员有：吴炳荣第一、六章；李思广第二、八章、第十章第三、四节；张爱真第三、第四章；张桂贞第五章、第十一章第一、二节；郝钢军第七章、第十一章第三、四节；何凤英第十二章；吴松丽第九章、第十章第一、二节，限于我们的水平，书中一定存在不妥之处，敬请师生，读者批评指正。

编者

2007年7月

『目　录』
Contents

第一章　函数　极限　连续函数

第二章　导数与微分

第三章　导数的应用

第四章　不定积分

第五章　定积分及其应用

第六章 微分方程

第一章　函数　极限　连续函数

高等数学课程的主要内容是微分、积分及其应用，它是一门研究变量的数学、极限的数学. 研究变量时，着重考察变量之间的相依关系(即函数关系)，并讨论某一个变量变化时，与它相关的变量的变化趋势. 这种研究方法就是所谓的极限方法. 连续则是函数的一个重要性态，连续函数是高等数学研究的主要对象. 本章中，我们将首先引入集合，然后用两个集合中的一种对应关系——映射来定义，着重介绍函数的极限和连续性等基本知识，为以后的学习奠定必要的基础.

第一节　集　合

集合的概念是现代数学的基础，广泛应用于各种科学技术的领域中，它是计算机科学工作者不可缺少的数学工具. 如程序设计、数据结构、形式语言、关系数据库、操作系统等计算机学科中，都离不开集合论的方法与概念.

一、集合的基本概念

1. 集合与元素

集合是数学中的最基本的概念之一，如同几何中"点"、"线"等概念一样，不可精确定义，我们只能给出集合的一种描述：

所谓集合，"就是由我们直观上或思想上，能明确加以区分的一些对象所构成的整体".

我们看下面的例子：

例 1　"我们教室里在座的所有学生"是一个集合.

例 2　"26 个小写的英文字母"是一个集合.

例 3　"计算机内存之全体单元"构成一个集合.

例 4　"$1,2,3,\cdots,n,\cdots$"构成正整数集合.

例 5　"坐标满足 $x^2+y^2\leqslant R^2$ 的全部点"构成图 1-1 所示的点集.

这样的例子很多，我们这里就不再多举了.

通常用大写的英文字母 A,B,C……代表集合.

组成集合的每个事物叫做这个集合的元素.通常用小写的英文字 a,b,c,……代表元素.如果 a 是集合 A 的一个元素,则记为

$$a \in A,$$

读做"a 属于 A",或说"a 在 A 中";

如果 a 不是集合 A 的一个元素,则记为

$$a \notin A,$$

读做"a 不属于 A",或说"a 不在 A 中".

任一个元素,对某一集合而言,要么在集合中,要么不在集合中,二者必居其一,绝不会又在集合中,又不在集合中.

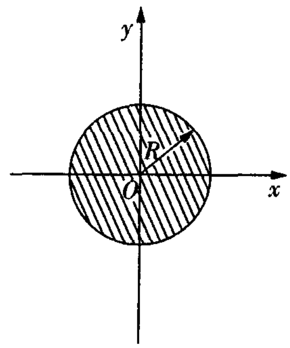

图 1－1

2. 集合的表示方法

常用的有两种:列举法和描述法.

1)列举法

就是将集合中的元素,一一地、全部列入花括号内,并用逗号将元素一一分开.

如"所有小于 5 的正整数"这个集合的元素为 1,2,3,4,除这四个元素外,再没有别的元素了,如果把这个集合命名为 A,就可以记为

$$A = \{1,2,3,4\},$$

能够清楚表示集合成员的情况下可使用省略号.例如前面的例 2 要表示为

$$B = \{a,b,c,d,e\cdots x,y,z\}.$$

2)描述法

就是利用集合中元素的共同性质来表示集合的方法,其书写的形式是

$$A = \{x \mid x\text{ 具有的性质 }P\} = \{x \mid P(x)\},$$

式{ }中"|"号左边的 x 表示集合 A 中的元素,"|"号右边的 P(x) 是谓词,即 A 由使 P(x) 为真的全体元素 x 构成.

例如前面的例 5 可表示为

$$A = \left\{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant R^2\right\}.$$

例 6 $S = \{x \mid x \in \mathbf{R},\text{且 } x > 0\}$.

它表示由正数全体构成的集合,其元素为大于零的实数,这里的属性即为 $x > 0$. 习惯上将正数全体构成的集合记为 $\mathbf{R}_+$,而将负数全体记为 $\mathbf{R}_-$.

本书中用 **N** 代表自然数集合(包括 0),即 $\mathbf{N} = \{0,1,2\cdots\}$,**Z** 代表整数集合,**Q** 代表有理数集合,**R** 代表实数集合.

3. 集合的类型

(1)有限集:集合中所包含的元素的个数只有有限个,称为有限集.

(2)无限集:集合中所包含的元素的个数是无限个,称为无限集.

(3)空集:没有元素的集合叫空集,记为$\varnothing$. 空集可描述表示为

$$\varnothing = \{x \mid x \neq x\}.$$

空集是客观存在的,例如,

$$A = \{x \mid x \in R 且 x^2 + 1 = 0\}$$

是方程 $x^2+1=0$ 的实数解集，因为该方程没有实数解，所以 $A=\varnothing$.

(4)子集：设 A、B 为集合，如果 B 中的每一个元素都是 A 中的元素，则称 B 为 A 的子集合，简称子集. 记为 $B\subset A$. 读为"A 包含 B 或 B 包含于 A".

关于子集有下列结论：

①$A\subset A$，即"集合 A 是其自己的子集".

证 $\because \forall x\in A\Rightarrow x\in A$，$\therefore A\subset A$.

②$\varnothing\subset A$，即"空集是任意集合的子集".

证 任给集合 A，由子集定义有

$$\varnothing\subset A\Leftrightarrow \forall x(x\in\varnothing\rightarrow x\in A).$$

右边的蕴含式中因前提条件 $x\in$ 为假，所以整个蕴含式对一切 x 为真. 因此 A 为真.

③如果 $A\subset B$，$B\subset C$，则 $A\subset C$，即"集合的包含关系有传递性".

证 $\because A\subset B, B\subset C$,

$\therefore \forall x\in A\Rightarrow x\in B\Rightarrow x\in C$,

$\therefore x\subset C$.

注：符号"$\rightarrow$"表示蕴含，"$\Rightarrow$"表示永真蕴含，"$\Leftrightarrow$"表示等价.

(5)全集：由所研究的所有事物构成的集合称为全集，记为 U. 全集是个相对性的概念，由于所研究的问题不同，所取的全集也不同. 例如我们计算机系选举学生会主席，当然我们考虑的全集是计算机系全体学生；又例如我们新生军训统计请假人员，当然我们考虑的全集是全院的新生人员.

在一元二次方程 $ax^2+bx+c=0$ 的求实根中所取的全集为 $\mathbf{R}$，在高等数学下册中研究平面解析几何问题时把整个坐标平面作为全集.

定理 1 对任意集合 A 有 $A\subset U$.

证 $\because \forall x\in A\Rightarrow x\subset U$,

$\therefore A\subset U$.

二、集合的相等

二个集合怎样才算相等呢？以下外延公理给出了它的规定.

外延公理 两个集合 A 和 B 相等，即 $A=B$，当且仅当它们有相同的元素(也就是，A 中的每一个元素是 B 中的一个元素，而 B 中的每一个元素也是 A 中的一个元素).

$$A=B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\leftrightarrow x\in B)$$

或 $A=B\Leftrightarrow \forall x(x\in A\rightarrow x\in B)\wedge \forall x(x\in B\rightarrow x\in A)$.

三、集合的运算

集合的三种基本运算，即并、交、差.

定义 1 设 A 和 B 都是集合

(a)A 和 B 的并集记为 $A\cup B$

$$A\cup B=\{x \mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$$

(b)A 和 B 的交集记为 $A\cap B$

$$A\cap B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$$

(c)A 和 B 的差集记为 $A-B$

$$A-B=\{x \mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$$

对于 $U-A$ 由差集的定义知

$$U-A=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A\}=\{x \mid x\notin A\},$$

称为 A 在 U 中的余集或者补集，记为 $\overline{A}$，即

$$\overline{A}=\{x \mid x\in U \text{ 且 } x\notin A \text{ 且 } A\subset U\}\text{（如图 1-2）.}$$

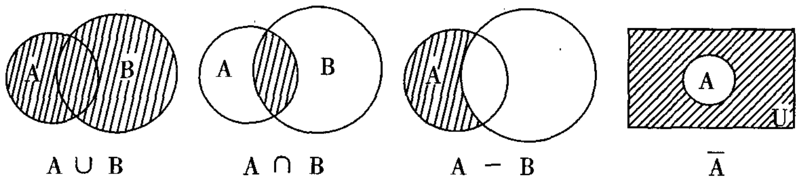

图 1-2

集合的并集、交集、差集具有以下性质：

幂等律　$A\cup A=A$

　　　　$A\cap A=A$

结合律　$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$

　　　　$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$

交换律　$A\cup B=B\cup A$

　　　　$A\cap B=B\cap A$

分配律　$(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$

　　　　$(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$

0-1 律　$A\cup\varnothing=A, A\cap\varnothing=\varnothing, A\cup U=U, A\cap U=A$

吸收律　$A\cup(A\cap B)=A, A\cap(A\cup B)=A$

互补律　$A\cup\overline{A}=U, A\cap\overline{A}=\varnothing$

复原律　$\overline{\overline{A}}=A$

德·摩根律　$\overline{(A\cup B)}=\overline{A}\cap\overline{B}$

　　　　　$\overline{(A\cap B)}=\overline{A}\cup\overline{B}$

四、区间、点的邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 和 b 都是实数，且 $a<b$，数集

$$\{x \mid a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a,b)，即

$$(a,b)=\{x \mid a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间(a,b)的端点,这里 $a\notin(a,b)$,$b\notin(a,b)$. 数集$\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}$称为闭区间,记作[a,b],即

$$[a,b]=\{x \mid a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间[a,b]的端点,这里 $a\in[a,b]$,$b\in[a,b]$. 类似地可说明

$$[a,b)=\{x \mid a\leqslant x<b\},$$

$$(a,b]=\{x \mid a<x\leqslant b\},$$

[a,b)和(a,b]都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间,数 b - a 称为这些区间的长度. 从数轴上看,这些有限区间是长度为有限的(不包括端点或包括一个、两个端点的)线段(图 1-3).

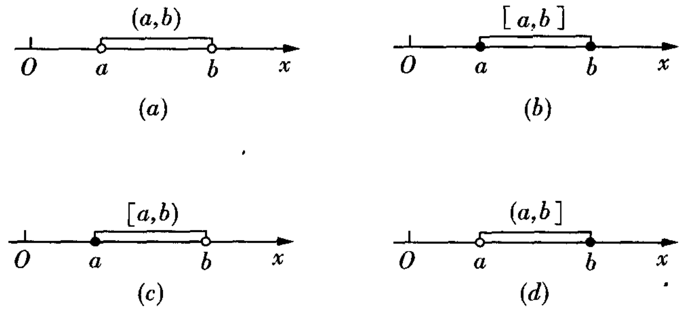

图 1-3

此外还有所谓无限区间. 引进记号 +∞(读作正无穷大)及 -∞(读作负无穷大),则无限的半开或开区间表示如下:

$$[a,+\infty)=\{x \mid a\leqslant x\}$$

$$(-\infty,b]=\{x \mid x\leqslant b\}$$

$$(a,+\infty)=\{x \mid a<x\}$$

$$(-\infty,b)=\{x \mid x<b\}$$

这些区间在数轴上表现为长度为无限的半直线,如图 1-4 所示.

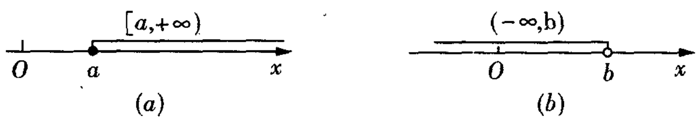

图 1-4

全体实数的集合 **R** 也记作(-∞,+∞),它也是无限的开区间.

要注意的是,记号 +∞,-∞ 都只是表示无限性的一种记号,它们都不是某个确定的数,因此也不能参与数的运算.

以后如果遇到所作的论述对不同类型的区间(有限的,无限的,开的,闭的,半开的)都适用,为了避免重复,就用“区间 I”代表各种类型的区间.

邻域也是一个经常用到的概念. 设 a 与 δ 是两个实数,且 δ>0,数集

$$\{x \mid |x-a| < \delta\},$$

称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a,\delta)$，即

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\},$$

点 a 叫做 $U(a,\delta)$ 的中心，δ 叫做 $U(a,\delta)$ 的半经.

因为 $|x-a| < \delta$ 相当于

$$-\delta < x-a < \delta \text{ 即 } a-\delta < x < a+\delta$$

所以

$$U(a,\delta) = \{x \mid a-\delta < x < a+\delta\}.$$

由此看出，$U(a,\delta)$ 也就是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$，这个开区间以点 a 为中心，而长度为 2δ（图 1－5）.

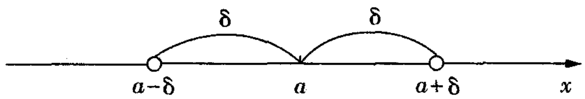

图 1－5

在数轴上，$|x-a|$ 表示点 x 与点 a 之间的距离，因此点 a 的 δ 邻域

$$U(a,\delta) = \{x \mid |x-a| < \delta\}$$

在数轴上表示与点 a 距离小于 δ 的一切 x 的全体，这正是开区间 $(a-\delta, a+\delta)$.

有时用到的邻域中心去掉，点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $\overset{0}{U}(a,\delta)$，即

$$\overset{0}{U}(a,\delta) = \{x \mid 0 < |x-a| < \delta\},$$

这里 $0 < |x-a|$ 就表示 $x \neq a$.

习题 1－1

1. 用集合符号写出下列集合：

(1) 大于 30 的所有实数集合；

(2) 圆 $x^2+y^2=16$ 上所有的点组成的集合；

(3) 椭圆 $\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{9}=1$ 外部一切点的集合.

2. 用列举法表示下列集合：

a. 小于 20 的质数组成的集合；

b. $\{x \mid x \in R, x^2+x-6=0\}$；

c. $\{x \mid x \in N, 3 < x < 12\}$.

3. 用描述法表示下列集合：

a. $\{1,2,3,\cdots,79\}$；

b. 奇整数集合；

c. 能被 5 整除的整数集合.

4. 论述域是 Z,确定下列哪些集合是相等的:

$A=\{x \mid x^2-1=15 且 x^3=1\}$;

$B=\{0\}$;

$C=\{x \mid \exists y \mid y\in z 且 x=2y\}$;

$D=\{x \mid x^2-6x+8=0\}$;

$E=\{2x \mid x\in Z\}$;

$F=\{2,4\}$;

$G=\{x \mid x^2+1=0\}$;

$H=\{0,2,-2,4,-4,6,-6\cdots\}$.

5. 设 $A=\{a_1,a_2,a_3,a_4\}$,$B=\{a_2,a_3,a_4,a_5\}$,$C=\{a_1,a_2,a_4,a_5,a_6\}$.

写出 $A\cup B,B\cup C,A\cap B,A\cap C,B\cap C,A-B,B-C$.

6. 设 $A=N,B=Z^-$(负整数集合)$C=\{0\}$,$D=\{2n \mid n\in Z\}$,试写出

(1)$A\cup B\cup C$;(2)$A\cap B$;(3)$(B\cap D)\cup C$;(4)$D\cap C$.

7. 用区间表示满足下列不等式的所有 x 的集合:

(1)$|x|\leqslant 2$;(2)$|x-5|\leqslant 1$;(3)$|x-1|<\delta(\delta>0)$;

(4)$|x|>1$;(5)$|x+2|\geqslant 3$.

8. 在数轴上画出满足下列条件的所有 x 的集合:

(1)$|x-a|<\delta$ a 为常数,$\delta>0$;

(2)$1<|x-2|<3$.

9. 如果 $A=\{(x,y) \mid x-y+2\geqslant 0\}$,

$B=\{(x,y) \mid 2x+3y-6\geqslant 0\}$,

$C=\{(x,y) \mid x-4\leqslant 0\}$,

在坐标平面上标出 $A\cap B\cap C$ 的区域.

第二节 映 射

映射是两个集合的元素之间通过某种法则确定的对应关系,下面先给出定义.

定义 1 设 X 与 Y 是两个非空集合,f 表示某个确定的规则,对于每个元素 $x\in X$,通过 f 都有唯一的元素 $y\in Y$ 与对应,则称为集合到集合的映射,记为

$$f: X\to Y 或 X\xrightarrow{f}Y.$$

这意味着对应关系 f 将集合 X 中的每一元素 $x\in X$ 与集合 Y 中的某个元素 $y\in Y$ 对应,习惯上记为:$y=f(x)$.

对上述定义,还需要说明以下两点:

(1)在映射中,并不要求集合 Y 中的所有元素都与集合 X 中的某个元素对应.

(2)尽管集合 X 中的任一元素不允许与集合 Y 中的两个或多个元素对应,但集合 Y