

大学物理 (第三版)

学习指导与习题选解

S/mol

kg



Technical drawing of a mechanical part, likely a gear or a similar component, showing various geometric features and labels. The drawing includes a circular arc with a radius of 100, a central circular feature with a radius of 50, and a rectangular section with a width of 100. The drawing is labeled with various dimensions and symbols, including kg , cd , K , O , O' , K_{Γ} , ϵ_{Γ} , f , α_o , α'_o , α , α_0 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 , α_5 , α_6 , α_7 , α_8 , α_9 , α_{10} , α_{11} , α_{12} , α_{13} , α_{14} , α_{15} , α_{16} , α_{17} , α_{18} , α_{19} , α_{20} , α_{21} , α_{22} , α_{23} , α_{24} , α_{25} , α_{26} , α_{27} , α_{28} , α_{29} , α_{30} , α_{31} , α_{32} , α_{33} , α_{34} , α_{35} , α_{36} , α_{37} , α_{38} , α_{39} , α_{40} , α_{41} , α_{42} , α_{43} , α_{44} , α_{45} , α_{46} , α_{47} , α_{48} , α_{49} , α_{50} , α_{51} , α_{52} , α_{53} , α_{54} , α_{55} , α_{56} , α_{57} , α_{58} , α_{59} , α_{60} , α_{61} , α_{62} , α_{63} , α_{64} , α_{65} , α_{66} , α_{67} , α_{68} , α_{69} , α_{70} , α_{71} , α_{72} , α_{73} , α_{74} , α_{75} , α_{76} , α_{77} , α_{78} , α_{79} , α_{80} , α_{81} , α_{82} , α_{83} , α_{84} , α_{85} , α_{86} , α_{87} , α_{88} , α_{89} , α_{90} , α_{91} , α_{92} , α_{93} , α_{94} , α_{95} , α_{96} , α_{97} , α_{98} , α_{99} , α_{100} , α_{101} , α_{102} , α_{103} , α_{104} , α_{105} , α_{106} , α_{107} , α_{108} , α_{109} , α_{110} , α_{111} , α_{112} , α_{113} , α_{114} , α_{115} , α_{116} , α_{117} , α_{118} , α_{119} , α_{120} , α_{121} , α_{122} , α_{123} , α_{124} , α_{125} , α_{126} , α_{127} , α_{128} , α_{129} , α_{130} , α_{131} , α_{132} , α_{133} , α_{134} , α_{135} , α_{136} , α_{137} , α_{138} , α_{139} , α_{140} , α_{141} , α_{142} , α_{143} , α_{144} , α_{145} , α_{146} , α_{147} , α_{148} , α_{149} , α_{150} , α_{151} , α_{152} , α_{153} , α_{154} , α_{155} , α_{156} , α_{157} , α_{158} , α_{159} , α_{160} , α_{161} , α_{162} , α_{163} , α_{164} , α_{165} , α_{166} , α_{167} , α_{168} , α_{169} , α_{170} , α_{171} , α_{172} , α_{173} , α_{174} , α_{175} , α_{176} , α_{177} , α_{178} , α_{179} , α_{180} , α_{181} , α_{182} , α_{183} , α_{184} , α_{185} , α_{186} , α_{187} , α_{188} , α_{189} , α_{190} , α_{191} , α_{192} , α_{193} , α_{194} , α_{195} , α_{196} , α_{197} , α_{198} , α_{199} , α_{200} , α_{201} , α_{202} , α_{203} , α_{204} , α_{205} , α_{206} , α_{207} , α_{208} , α_{209} , α_{210} , α_{211} , α_{212} , α_{213} , α_{214} , α_{215} , α_{216} , α_{217} , α_{218} , α_{219} , α_{220} , α_{221} , α_{222} , α_{223} , α_{224} , α_{225} , α_{226} , α_{227} , α_{228} , α_{229} , α_{230} , α_{231} , α_{232} , α_{233} , α_{234} , α_{235} , α_{236} , α_{237} , α_{238} , α_{239} , α_{240} , α_{241} , α_{242} , α_{243} , α_{244} , α_{245} , α_{246} , α_{247} , α_{248} , α_{249} , α_{250} , α_{251} , α_{252} , α_{253} , α_{254} , α_{255} , α_{256} , α_{257} , α_{258} , α_{259} , α_{260} , α_{261} , α_{262} , α_{263} , α_{264} , α_{265} , α_{266} , α_{267} , α_{268} , α_{269} , α_{270} , α_{271} , α_{272} , α_{273} , α_{274} , α_{275} , α_{276} , α_{277} , α_{278} , α_{279} , α_{280} , α_{281} , α_{282} , α_{283} , α_{284} , α_{285} , α_{286} , α_{287} , α_{288} , α_{289} , α_{290} , α_{291} , α_{292} , α_{293} , α_{294} , α_{295} , α_{296} , α_{297} , α_{298} , α_{299} , α_{300} , α_{301} , α_{302} , α_{303} , α_{304} , α_{305} , α_{306} , α_{307} , α_{308} , α_{309} , α_{310} , α_{311} , α_{312} , α_{313} , α_{314} , α_{315} , α_{316} , α_{317} , α_{318} , α_{319} , α_{320} , α_{321} , α_{322} , α_{323} , α_{324} , α_{325} , α_{326} , α_{327} , α_{328} , α_{329} , α_{330} , α_{331} , α_{332} , α_{333} , α_{334} , α_{335} , α_{336} , α_{337} , α_{338} , α_{339} , α_{340} , α_{341} , α_{342} , α_{343} , α_{344} , α_{345} , α_{346} , α_{347} , α_{348} , α_{349} , α_{350} , α_{351} , α_{352} , α_{353} , α_{354} , α_{355} , α_{356} , α_{357} , α_{358} , α_{359} , α_{360} , α_{361} , α_{362} , α_{363} , α_{364} , α_{365} , α_{3



2008

主编 王纪龙 周希坚

科学出版社

北 京

普通高等教育“十一五”国家级规划教材

内 容 简 介

本书是科学出版社出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学物理》(第三版)(王纪龙,周希坚主编)的配套教辅,是《大学物理》立体化教材建设的重要组成部分,同时也可单独使用.每章(第18章例外)内容由基本要求、基本内容和习题选解组成.

本书可作为高等工科大学各专业和其他类院校物理类专业本、专科学生的大学物理配套教辅,也可用作成人教育的大学物理教学参考书.

图书在版编目(CIP)数据

大学物理(第三版)学习指导与习题选解/王纪龙,周希坚主编. —北京:科学出版社,2008

普通高等教育“十一”国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-021936-7

I. 大 II. ①王… ②周… III. 物理学-高等学校-教学参考资料
IV. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2008)第 067619 号

责任编辑:胡云志 杨 然 / 责任校对:刘小梅

责任印制:张克忠 / 封面设计:耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码:100717

<http://www.sciencep.com>

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版

开本:787×1092 1/16

2008 年 5 月第一次印刷

印张:18 3/4

印数:1—4 000

字数:433 000

定价:26.00 元

(如有印装质量问题,我社负责调换〈文林〉)

前 言

完成课后作业是学生在校期间必要的实践环节,也是提高教学质量、加强对学生综合能力培养不可缺少的重要环节.通过习题练习可以进一步加深学生对所学知识的理解.

《大学物理(第三版)》2006年入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材.该版教材与第二版相比,在教材的结构、内容等方面有了较大的变化,在例题、习题选择上更加体现了围绕教学难点、重点,突出基本概念和基本规律的实际应用.针对书中各知识点的难易程度不同,配以适当数量的习题,形成恰当的难度梯度,供老师和学生课后选作练习.

为了有利于学生学好大学物理和更好的使用本教材,我们编写了这本《大学物理学习指导与习题选解》.参加本书编写的有太原理工大学物理系的教师张彩霞、刘红利、张绪树.

由于编写和成本的时间比较仓促,难免有一些错误和不妥之处,欢迎使用本书的广大读者提出宝贵意见和建议.

王纪龙 周希坚

2008年1月18日 于太原

目 录

前言	章 0 第
第 1 章 质点运动学	(1)
1.1 基本要求	(1)
1.2 基本内容	(1)
1.3 习题选解	(3)
第 2 章 质点动力学	(17)
2.1 基本要求	(17)
2.2 基本内容	(17)
2.3 习题选解	(22)
第 3 章 刚体的转动	(51)
3.1 基本要求	(51)
3.2 基本内容	(51)
3.3 习题选解	(53)
第 4 章 气体动理论	(64)
4.1 基本要求	(64)
4.2 基本内容	(64)
4.3 习题选解	(66)
第 5 章 热力学基础	(80)
5.1 基本要求	(80)
5.2 基本内容	(80)
5.3 习题选解	(83)
第 6 章 真空中的静电场	(102)
6.1 基本要求	(102)
6.2 基本内容	(102)
6.3 习题选解	(107)
第 7 章 静电场中的导体和电介质	(127)
7.1 基本要求	(127)
7.2 基本内容	(127)
7.3 习题选解	(128)

第 8 章 真空中的稳恒磁场	(139)
8.1 基本要求	(139)
8.2 基本内容	(139)
8.3 习题选解	(141)
第 9 章 介质中的磁场	(157)
9.1 基本要求	(157)
9.2 基本内容	(157)
9.3 习题选解	(157)
第 10 章 变化电磁场的基本规律	(163)
10.1 基本要求	(163)
10.2 基本内容	(163)
10.3 习题选解	(166)
第 11 章 机械振动	(187)
11.1 基本要求	(187)
11.2 基本内容	(187)
11.3 习题选解	(189)
第 12 章 机械波	(204)
12.1 基本要求	(204)
12.2 基本内容	(204)
12.3 习题选解	(207)
第 13 章 几何光学	(222)
13.1 基本要求	(222)
13.2 基本内容	(222)
13.3 习题选解	(224)
第 14 章 波动光学	(228)
14.1 基本要求	(228)
14.2 基本内容	(228)
14.3 习题选解	(233)
第 15 章 狭义相对论基础	(253)
15.1 基本要求	(253)
15.2 基本内容	(253)
15.3 习题选解	(256)
第 16 章 从经典物理到量子物理	(265)
16.1 基本要求	(265)

16.2 基本内容.....	(265)
16.3 习题选解.....	(268)
第 17 章 量子力学基础	(276)
17.1 基本要求.....	(276)
17.2 基本内容.....	(276)
17.3 习题选解.....	(278)
第 18 章 原子核和基本粒子简介	(290)
习题选解.....	(290)

量天尺測地，量地天②；始同不異裏裏的暖相一吾箇中處處吾熟與；吾相親③。意主

1. 位置丈量(简称位丈)

有方向,服从几何加法.

$$\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}} = 1, \quad \frac{x}{a} \mathbf{i} + \frac{y}{b} \mathbf{j} + \frac{z}{c} \mathbf{k} = \mathbf{r} = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = a, \quad \frac{x}{a} \frac{\mathbf{i}}{a} + \frac{y}{b} \frac{\mathbf{j}}{b} + \frac{z}{c} \frac{\mathbf{k}}{c} = \mathbf{a} \quad \text{中其}$$

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (\text{矢量式})$$

$\frac{\partial}{\partial t} \text{strain} = 0$ 约束的向量可写为 $x = x(t)$, $\dot{x} = \dot{x}$, $\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}$, 中其

(标量式)

$$|\Delta \mathbf{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

注意 ① $\Delta \mathbf{r}$ 与 Δr 的区别:前者表示质点位置变化,是矢量,同时反映位置变化的大小和方位;后者是标量,反映质点位置离开坐标原点的距离的变化. ② $\Delta \mathbf{r}$ 与 Δs 的区别: Δs 表示 $t \sim t + \Delta t$ 时间内质点通过的路程,是标量,只有质点在直线直进时两者的大小相等或当 $\Delta t \rightarrow 0$ 时, $|\Delta \mathbf{r}| = \Delta s$.

3. 速度

$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}$, 是质点位置矢量对时间的变化率.

在直角坐标系中

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} + v_z\mathbf{k}$$

$$v \text{ 的大小: } v = |\mathbf{v}| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$$

$\mathbf{v}$ 的方向:在直线运动中, $v > 0$ 表示质点沿坐标轴正向运动, $v < 0$ 表示质点沿坐标轴负向运动;在曲线运动中, $\mathbf{v}$ 沿曲线上各点切线,指向质点前进的一方.

注意 ①瞬时性:质点在运动中的任一时刻的速度是不同的;②矢量性:速度为矢量,具有大小、方向,求解速度应同时求得其大小和方向;③相对性:运动是绝对的,但运动描述是相对的,所以必须明确参考系、坐标系,在确定的坐标系中求质点的速度;④叠加性:因为运动是可叠加的,所以描述运动状态的物理量速度也是可叠加的;⑤要注意区别速度和速率,注意 $\frac{dr}{dt}$ 与 $\frac{d\mathbf{r}}{dt}$, $\frac{dr}{dt}$ 与 $\left|\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right|$ 的区别.

4. 加速度

$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$, 描述质点速度对时间的变化率,其中包括速度的大小和方向随时间的变化. 不论速度的大小变化,还是速度方向的变化,都会产生加速度. 加速度也为矢量.

在直角坐标中

$$\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$$

$$\text{其中, } a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}, a_y = \frac{dv_y}{dt} = \frac{d^2y}{dt^2}, a_z = \frac{dv_z}{dt} = \frac{d^2z}{dt^2}, |\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}.$$

在自然坐标系中

$$\mathbf{a} = a_n\mathbf{n} + a_t\mathbf{t}$$

$$\text{其中, } a_n = \frac{v^2}{\rho}, a_t = \frac{dv}{dt}, |\mathbf{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}, \mathbf{a} \text{ 与切向的夹角 } \theta = \arctan \frac{a_n}{a_t}.$$

加速度的方向与速度方向无直接关系. 在直线运动中,若 $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 同向,则质点做加速运动, $\mathbf{a}$ 与 $\mathbf{v}$ 反向,则质点做减速运动. 在曲线运动中, $\mathbf{a}$ 方向总是指向曲线凹的一侧.

5. 圆周运动的角速度、角加速度

角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}$$

角加速度

$$\beta = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

角量与线量的关系

$$v = R\omega, \quad a_t = R\beta, \quad a_n = R\omega^2$$

6. 伽利略速度变换

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}' + \mathbf{u}$$

其中, $\mathbf{v}$ 为运动物体相对固定参考系的速度, 称为绝对速度; $\mathbf{v}'$ 为运动物体相对运动参考系的速度, 称为相对速度; $\mathbf{u}$ 为运动参照系相对固定参考系的速度, 称为牵连速度.

1.3 习题选解

1-1 从原点到 P 点的位置矢量 $\mathbf{r} = -2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$, 而 P 点到 Q 点的位移 $\Delta\mathbf{r} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$. 求从原点到 Q 点的位置矢量, 并作图表示.

解 由位移定义 $\Delta\mathbf{r} = \mathbf{r}_Q - \mathbf{r}_P$

设 Q 点坐标为 (x, y)

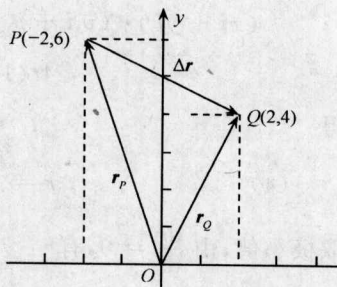
$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{r} &= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - (-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j}) \\ &= (x+2)\mathbf{i} + (y-6)\mathbf{j} \end{aligned}$$

$$\text{而} \quad \Delta\mathbf{r} = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j}$$

$$\text{显然} \quad \begin{cases} \Delta x = x + 2 = 4 \\ \Delta y = y - 6 = -2 \end{cases}, \quad \begin{cases} x = 2 \\ y = 4 \end{cases}$$

$$\text{故} \quad \mathbf{r}_Q = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$$

如题 1-1 图所示.



题 1-1 图

1-2 设质点沿 x 轴运动, 其运动方程为 $x = 3t^2 - t^3$ (其中 x 以 m 计, t 以 s 计). 求: (1) 质点在 3s 末的速度和加速度; (2) 质点在 1.5s 是做加速运动还是做减速运动; (3) 第 1s 末到第 3s 末时间内的位移和路程.

$$\text{解 (1)} \quad v = \frac{dx}{dt} = 6t - 3t^2, \quad a = \frac{dv}{dt} = 6 - 6t$$

将 $t = 3\text{s}$ 代入上两式分别得

$$v = -9\text{m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad a = -12\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

(2) 将 $t = 1.5\text{s}$ 代入 v, a 表达式分别得

$$v = 6t - 3t^2 = t(6 - 3t) = 2.25\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$$

$$a = 6 - 6t = -3\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$$

a 与 v 反向, 质点做减速运动.

(3) 位移

$$\Delta x_{1-3} = x(3) - x(1) = -2\text{m}$$

由 $v = 6t - 3t^2 = 0$ 得 $t_1 = 0, t_2 = 2\text{s}$, 即 $t = 2\text{s}$ 时质点瞬时静止, 其后反向运动. 故路程

$$\Delta x_{1-3} = x(2) - x(1) + x(2) - x(3) = 6\text{m}$$

1-3 一质点在 Oxy 平面内运动, 运动方程为 $x = 2t$, $y = 19 - 2t^2$ (SI) (其中 x , y 以 m 计, t 以 s 计). (1) 求质点的轨道方程; (2) 求 t 时刻质点的位置矢量、速度矢量; (3) 什么时刻质点的位置矢量与其速度矢量恰好垂直? (4) 什么时刻质点离原点最近? 求这一距离.

解 (1) 由 $x = 2t$, $y = 19 - 2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y = 19 - 2\left(\frac{x}{2}\right)^2 = 19 - \frac{x^2}{2} \quad (x > 0)$$

$$(2) \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} = 2t\mathbf{i} + (19 - 2t^2)\mathbf{j}$$

而

$$v_x = \frac{dx}{dt} = 2, \quad v_y = \frac{dy}{dt} = -4t$$

故

$$\mathbf{v} = v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j} = 2\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$$

(3) $\mathbf{r} \perp \mathbf{v}$ 时, 则 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{v} = 0$, 即

$$(x\mathbf{i} + y\mathbf{j}) \cdot (v_x\mathbf{i} + v_y\mathbf{j}) = xv_x + yv_y = 2t \times 2 + (19 - 2t^2) \times (-4t) = 0$$

$$4t(1 - (19 - 2t^2)) = 4t(2t^2 - 18) = 0$$

得

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 3\text{s}, \quad t_3 = -3\text{s}(\text{舍去})$$

(4)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2t)^2 + (19 - 2t^2)^2}$$

取极小值, 由 $\frac{dr}{dt} = 0$, 有 $8t(2t^2 - 18) = 0$

得

$$t_1 = 0, \quad t_2 = 3\text{s}, \quad t_3 = -3\text{s}(\text{舍去})$$

但

$$\left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t_1} < 0, \quad \left.\frac{d^2r}{dt^2}\right|_{t_3} > 0, \quad \text{且 } r(3) = 6.08\text{m}$$

故 $t = 3\text{s}$ 时质点离原点距离最近, 其距离为 6.08m .

1-4 一质点具有恒定加速度 $\mathbf{a} = 6\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ (SI). $t = 0$ 时, 质点速度为零, 位置矢量 $\mathbf{r}_0 = 10\mathbf{i}$. 求: (1) 质点在任意时刻的速度和位置矢量; (2) 质点的轨迹方程.

解 由题意知: $a_x = 6\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$, $a_y = 4\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$

(1)

$$a_x = \frac{dv_x}{dt}, \quad dv_x = a_x dt$$

$$\int_0^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x dt = \int_0^t 6 dt, \quad v_x = 6t$$

而

$$v_x = \frac{dx}{dt}, \quad dx = v_x dt = 6t dt$$

$$\int_{10}^x dx = \int_0^t 6t dt, \quad x - 10 = 3t^2, \quad x = 10 + 3t^2$$

同理

$$a_y = \frac{dv_y}{dt} = 4, \quad dv_y = 4 dt$$

$$\int_0^{v_y} dv_y = \int_0^t 4 dt, \quad \text{即 } v_y = 4t$$

而

$$v_y = \frac{dy}{dt}, \quad dy = v_y dt = 4t dt$$

$$\int_0^y dy = \int_0^t 4t dt, \quad y = 2t^2$$

由此可得

$$\mathbf{v} = v_x \mathbf{i} + v_y \mathbf{j} = 6t \mathbf{i} + 4t \mathbf{j}$$

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} = (10 + 3t^2) \mathbf{i} + 2t^2 \mathbf{j}$$

(2) 轨道方程由 $x = 10 + 3t^2, y = 2t^2$ 消 t 得

$$x = 10 + \frac{3}{2}y, \quad \text{即 } 3y - 2x + 20 = 0$$

1-5 消防水枪喷出的水的流量是 $q = 280 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1}$. 水的流速 $v = 26 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. 若水枪竖直向上喷射, 水流上升的高度是多少? 在任一瞬间空中有多少升水?

解 竖直上抛的最大高度

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 33.8 \text{ m}$$

水上升到最大高度的时间, 由 $v_y = v_0 - gt$ (令 $v_y = 0$, v_y 为上升到最高点的速度) 得

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{26}{10} = 2.6 \text{ s}$$

则水在空中运动 5.2 s.

又因为

$$q = 280 \text{ L} \cdot \text{min}^{-1} = \frac{280 \text{ L}}{60 \text{ s}} = 4.67 \text{ L} \cdot \text{s}^{-1}$$

在时间小于 5.2 s 喷向空中的水 $Q = qt' = 4.67t' \text{ (L)}$

在时间大于 5.2 s 喷向空中的水 $Q = 2qt = 24.3 \text{ (L)}$

1-6 一升降机以加速度 $1.22 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ 上升, 当上升速度为 $2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 时, 有一螺帽自升降机的天花板上松落, 天花板与升降机的底面相距 2.74 m. 计算: (1) 螺帽从天花板落到底面所需的时间; (2) 螺帽相对升降机外固定柱子下降的距离.

解 以地面为参考系, 坐标原点选在升降机以速度 $2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 上升时刻机外固定柱上对应升降机地板所在处, 向上为正.

(1) 螺帽在 $t = 0$ 时, 从 $y = y_0 = 2.74 \text{ m}$ 处以初速为 $v_0 = 2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ 做上抛运动. 其运动方程为

$$y_1 = y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2$$

地板在 $t = 0$ 时, 以初速 $v_0 = 2.44 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, 从原点做加速上抛运动, 其方程为

$$y_2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

螺帽落地时 $y_1 = y_2$, 因此

$$y_0 + v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 = v_0 t + \frac{1}{2} a t^2$$

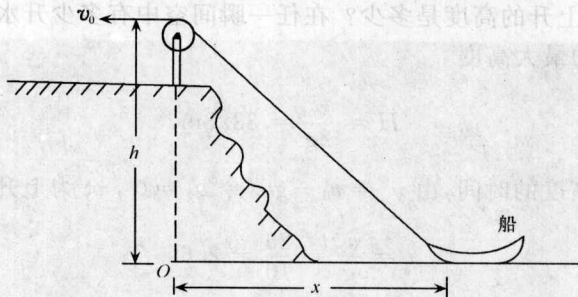
$$y_0 = \frac{1}{2} a t^2 + \frac{1}{2} g t^2 = \frac{1}{2} (a + g) t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{a+g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2.74}{1.22 + 9.8}} = 0.705 \text{ s}$$

(2) 螺帽下降的距离

$$y_0 - y_1 = - \left(v_0 t - \frac{1}{2} g t^2 \right) = - \left(2.44 \times 0.71 - \frac{1}{2} \times 9.8 \times 0.71^2 \right) = 0.72 \text{ m}$$

1-7 如题 1-7 图所示, 有人在离水面高 h 处通过滑轮用绳子拉船靠岸. 设人用匀速 v_0 收绳子拉船, 求当船与滑轮的水平距离为 x 时, 船的速度和加速度的大小.



题 1-7 图

解 设绳长为 s , 由题 1-7 图可知

$$s^2 = h^2 + x^2, \quad x = \sqrt{s^2 - h^2}$$

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2} (s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2s \times \frac{ds}{dt} \\ &= \frac{s}{\sqrt{s^2 - h^2}} \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

人以匀速 v_0 收绳拉船

$$\frac{ds}{dt} = -v_0$$

$$v = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} (-v_0) = -\frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x} v_0$$

v 的方向沿 x 轴负方向.

船的加速度

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \left(-\frac{sv_0}{\sqrt{s^2 - h^2}} \right) = -\frac{d(sv_0)}{\sqrt{s^2 - h^2} dt} - sv_0 \frac{d}{dt} (s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} \\ &= -\frac{v_0}{\sqrt{s^2 - h^2}} \frac{ds}{dt} - sv_0 \left(-\frac{1}{2} \right) (s^2 - h^2)^{-\frac{3}{2}} 2s \frac{ds}{dt} \end{aligned}$$

$$= \frac{v_0^2 (s^2 - h^2)}{\sqrt{s^2 - h^2} (s^2 - h^2)} - \frac{s^2 v_0^2}{(s^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}} = - \frac{v_0^2 h^2}{(s^2 - h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

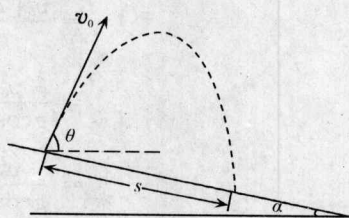
$$= - \frac{h^2 v_0^2}{x^3}$$

a 的方向沿 x 轴负方向.

1-8 如题 1-8 图所示, 一人站在山坡上, 山坡与水平面成 α 角. 他扔出一个初速为 v_0 的小石子, v_0 与水平面成 θ 角(向上).

(1) 如空气阻力不计, 试证小石子落在斜坡上的距离 s 为

$$s = \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos\theta}{g \cos^2 \alpha}$$



题 1-8 图

(2) 由此证明, 对于给定的 v_0 与 α 值, s 在 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时有最大值, 为

$$s_{\max} = \frac{v_0^2 (1 + \sin\alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$

解 以斜面方向为 x 轴, 垂直于斜面为 y 轴, 扔出点为原点建立 Oxy 坐标系.

$$(1) \begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos(\theta + \alpha) \\ v_{0y} = v_0 \sin(\theta + \alpha) \end{cases}, \quad \begin{cases} x = v_{0x}t + \frac{1}{2}g_x t^2 \\ y = v_{0y}t + \frac{1}{2}g_y t^2 \end{cases}, \quad \begin{cases} g_x = g \sin\alpha \\ g_y = -g \cos\alpha \end{cases}$$

小石子落地时 $y = 0$, 有

$$v_0 \sin(\theta + \alpha)t + \frac{1}{2}(-g \cos\alpha)t^2 = 0$$

落地时间

$$t = \frac{2v_0 \sin(\alpha + \theta)}{g \cos\alpha}$$

小石子落在斜坡上的距离

$$\begin{aligned} s = x &= v_0 \cos(\theta + \alpha)t + \frac{1}{2}g \sin\alpha t^2 \\ &= \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha)}{g \cos\alpha} + \frac{4v_0^2 g \sin\alpha \sin^2(\alpha + \theta)}{2g^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2v_0^2 g \cos\alpha \sin(\theta + \alpha) \cos(\theta + \alpha)}{g^2 \cos^2 \alpha} + \frac{2v_0^2 g \sin\alpha \sin^2(\theta + \alpha)}{g^2 \cos^2 \alpha} \\ &= \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} [\cos\alpha \cos(\theta + \alpha) + \sin\alpha \sin(\theta + \alpha)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} \cos(\theta + \alpha - \alpha) \\
 &= \frac{2v_0^2 \sin(\theta + \alpha)}{g \cos^2 \alpha} \cos \theta
 \end{aligned}$$

(2) 对于给定的 v_0 和 α 值

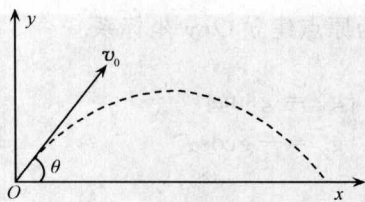
$$\begin{aligned}
 s &= \frac{v_0^2 [2 \sin(\theta + \alpha) \cos \theta]}{g \cos^2 \alpha} \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} [\sin(\theta + \theta + \alpha) - \sin(\theta - \theta - \alpha)] \\
 &= \frac{v_0^2}{g \cos^2 \alpha} [\sin(2\theta + \alpha) + \sin \alpha]
 \end{aligned}$$

由上式可知,小石子落在斜坡上距离 s 取最大值的条件是 $\sin(2\theta + \alpha) = 1$.

$$2\theta + \alpha = \frac{\pi}{2}, \quad \theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

故

$$s_{\max} = \frac{v_0^2 (1 + \sin \alpha)}{g \cos^2 \alpha}$$



题 1-9 图

1-9 如题 1-9 图所示,一个人扔石头的最大出手速度为 $v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$,他能击中一个与他的手水平距离为 $l = 50 \text{ m}$,高 h 为 13 m 处的一个目标吗?在这个距离上他能击中的目标的最大高度是多少?

解 以出手点为原点,建立 Oxy 坐标系,设出手速度 v_0 与 x 轴夹角为 θ ,忽略空气阻力有

$$y = v_0 \sin \theta t - \frac{1}{2} g t^2$$

$$x = v_0 \cos \theta t$$

消去 t ,得石头运动轨道方程

$$y = x \tan \theta - \frac{g x^2}{2 v_0^2 \cos^2 \theta}$$

代入

$$v_0 = 25 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}, \quad x = l = 50 \text{ m}$$

$$y = 50 \tan \theta - \frac{2g}{\cos^2 \theta}$$

当 $\frac{dy}{d\theta} = 0$ 时 y 取极值,有

$$\frac{d}{d\theta} (50 \tan \theta - \frac{2g}{\cos^2 \theta}) = 0$$

$$50 \sec^2 \theta - 2g \frac{2 \sin \theta}{\cos^3 \theta} = 0$$

得

$$\tan \theta = \frac{50}{4g} = 1.2755, \quad \theta = 51.9^\circ$$

故当 $\theta = 51.9^\circ$ 时, y 在 $l = 50\text{m}$ 处的最高高度为

$$y_{\max} = 50 \tan 51.9^\circ - \frac{2g}{\cos^2 51.9^\circ} = 12.3\text{m}$$

所以不能击中目标,能击中的最大高度是 12.3m .

1-10 一质点沿直线运动,其坐标 x 与时间 t 有关系 $x = Ae^{-\beta t} \cos \omega t$ (SI) (A, β 皆为常数). 求: (1) 任意时刻 t 质点的加速度; (2) 质点通过原点的时刻 t .

解 质点运动方程

$$x = Ae^{-\beta t} \cos \omega t$$

(1) 速度

$$\begin{aligned} v &= \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{-\beta t} \cos \omega t) \\ &= \frac{1}{dt}(Ae^{-\beta t} d\cos \omega t + A\cos \omega t de^{-\beta t}) \\ &= -A\omega e^{-\beta t} \sin \omega t - A\beta e^{-\beta t} \cos \omega t \end{aligned}$$

加速度

$$\begin{aligned} a &= \frac{dv}{dt} = \frac{1}{dt}(-A\omega e^{-\beta t} d\sin \omega t - A\omega \sin \omega t de^{-\beta t} - A\beta e^{-\beta t} d\cos \omega t - A\beta \cos \omega t de^{-\beta t}) \\ &= -A\omega^2 e^{-\beta t} \cos \omega t + A\omega\beta \sin \omega t e^{-\beta t} + A\beta\omega e^{-\beta t} \sin \omega t + A\beta^2 \cos \omega t e^{-\beta t} \\ &= Ae^{-\beta t}[(\beta^2 - \omega^2)\cos \omega t + 2\omega\beta \sin \omega t] \end{aligned}$$

(2) 质点通过原点时 $x = 0$, 所以 $Ae^{-\beta t} \cos \omega t = 0$. 由于 $e^{-\beta t} \neq 0$, 所以 $\cos \omega t = 0$. 有

$$\omega t = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

$$t = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

1-11 一质点沿半径为 R 的圆周运动,其路程 s 随时间 t 变化的规律为

$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2 \text{ (SI)}$$

其中, b, c 为大于零的常数,且 $b^2 > R$. 求: (1) 质点运动的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n ; (2) $a_t = a_n$ 的时刻 t .

解 质点做圆周运动

$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2$$

(1) 速率

$$v = \frac{ds}{dt} = b - ct$$

切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -c$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

(2) 切向加速度 $a_t = -c < 0$, 法向加速度 $a_n > 0$. 当 $|a_t| = |a_n|$ 时

$$\frac{(b-ct)^2}{R} = c, \quad (b-ct)^2 = Rc$$

$$b-ct = \pm \sqrt{Rc}, \quad t = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{R}{c}}$$

1-12 一质点沿半径为 R 的圆周按路程为 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ (SI) 的规律运动, 其中 v_0 , b 都是常量. (1) 求 t 时刻质点的加速度; (2) t 为何时, 加速度的大小等于 b ? (3) 当加速度为 b 时, 质点沿圆周运动了多少圈?

解 质点做圆周运动

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$$

(1) 速率

$$v = \frac{ds}{dt} = v_0 - bt$$

切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -b$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

质点的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}$$

a 与 v 的夹角

$$\theta = \arctan \frac{a_n}{a_t} = \arctan \left[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb} \right]$$

(2) 当 $a = b$ 时

$$\frac{1}{R} \sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4} = b, \quad t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 当 $a = b$ 时

$$t = \frac{v_0}{b}, \quad s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2 = \frac{v_0^2}{2b}$$

质点沿圆周运行的圈数

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

1-13 一质点沿半径为 0.1m 的圆周运动, 用角坐标表示其运动方程为 $\theta = 2 + 4t^3$ (SI). (1) 求 $t = 2\text{s}$ 时质点切向加速度和法向加速度的大小; (2) 当 θ 等于多少时, 质点的加速度和半径的夹角成 45° .

解 质点做圆周运动

$$\theta = 2 + 4t^3$$

(1) 角速度

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = 12t^2$$