普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

大学物理（第三版）
学习指导与习题选解

主编 王纪龙 周希坚

科学出版社
www.sciencep.com

普通高等教育“十一五”国家级规划教材配套教辅

大学物理(第三版)学习指导与习题选解

主编　王纪龙　周希坚

科 学 出 版 社
北 京

内容简介

本书是科学出版社出版的普通高等教育“十一五”国家级规划教材《大学物理》（第三版）（王纪龙，周希坚主编）的配套教辅，是《大学物理》立体化教材建设的重要组成部分，同时也可单独使用. 每章（第 18 章例外）内容由基本要求、基本内容和习题选解组成.

本书可作为高等工科学校各专业和其他类院校物理类专业本、专科学生的大学物理配套教辅，也可用作成人教育的大学物理教学参考书.

图书在版编目（CIP）数据

大学物理（第三版）学习指导与习题选解/王纪龙，周希坚主编. —北京：科学出版社，2008

普通高等教育“十一”国家级规划教材配套教辅

ISBN 978-7-03-021936-7

Ⅰ. 大 Ⅱ. ①王… ②周… Ⅲ. 物理学-高等学校-教学参考资料 Ⅳ. O4

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2008）第 067619 号

责任编辑：胡云志 杨 然 / 责任校对：刘小梅

责任印制：张克忠 / 封面设计：耕者设计工作室

科学出版社 出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

http://www.sciencep.com

北京市文林印务有限公司 印刷

科学出版社发行 各地新华书店经销

*

2008 年 5 月第 一 版 开本：787×1092 1/16

2008 年 5 月第一次印刷 印张：18 3/4

印数：1—4 000 字数：433 000

定价：26.00 元

（如有印装质量问题，我社负责调换〈文林〉）

前　言

完成课后作业是学生在校期间必要的实践环节，也是提高教学质量、加强对学生综合能力培养不可缺少的重要环节. 通过习题练习可以进一步加深学生对所学知识的理解.

《大学物理（第三版）》2006 年入选普通高等教育“十一五”国家级规划教材. 该版教材与第二版相比，在教材的结构、内容等方面有了较大的变化，在例题、习题选择上更加体现了围绕教学难点、重点，突出基本概念和基本规律的实际应用. 针对书中各知识点的难易程度不同，配以适当数量的习题，形成恰当的难度梯度，供老师和学生课后选作练习.

为了有利于学生学好大学物理和更好的使用本教材，我们编写了这本《大学物理学习指导与习题选解》. 参加本书编写的有太原理工大学物理系的教师张彩霞、刘红利、张绪树.

由于编写和成本的时间比较仓促，难免有一些错误和不妥之处，欢迎使用本书的广大读者提出宝贵意见和建议.

王纪龙　周希坚

2008 年 1 月 18 日　于太原

目　录

第1章 质点运动学

1.1 基本要求

1）掌握位矢、位移、速度、加速度、角速度和角加速度等描述质点运动和运动变化的物理量.

2）能借助直角坐标系计算质点在平面内运动时的速度和加速度.

3）能计算质点做圆周运动时的角速度和角加速度，切向和法向加速度.

4）理解伽利略坐标变换和速度变换.

1.2 基本内容

1. 位置矢量(简称位矢)

位置矢量，表示质点任意时刻在空间的位置，用从坐标原点向质点所在点所引的一条有向线段 $\boldsymbol{r}$ 表示. $\boldsymbol{r}$ 的端点表示任意时刻质点的空间位置. $\boldsymbol{r}$ 同时表示任意时刻质点离坐标原点的距离及质点位置相对坐标系的方位. 位矢是描述质点运动状态的物理量之一.

注意 ①瞬时性：质点运动时，其位矢是随时间变化的，即 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$. ②相对性：用 $\boldsymbol{r}$ 描述质点位置时，对同一质点在同一时刻的位置，在不同坐标系中 $\boldsymbol{r}$ 表达形式可以是不相同的. 它表示了 $\boldsymbol{r}$ 的相对性，也反映了运动描述的相对性. ③矢量性：$\boldsymbol{r}$ 为矢量，它有大小，有方向，服从几何加法.

在直角坐标系 $Oxyz$ 中

$$\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$$

$$r=|\boldsymbol{r}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$$\cos\alpha=\frac{x}{r},\quad \cos\beta=\frac{y}{r},\quad \cos\gamma=\frac{z}{r}$$

质点的运动方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}+z(t)\boldsymbol{k}$ （矢量式）

$$\text{或}\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t)\\z=z(t)\end{cases}\qquad\text{（标量式）}$$

2. 位移

$$\Delta\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)=\Delta x\boldsymbol{i}+\Delta y\boldsymbol{j}+\Delta z\boldsymbol{k}$$

$\Delta\boldsymbol{r}$ 的模为

$$|\Delta \boldsymbol{r}| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

注意 ① $\Delta \boldsymbol{r}$ 与 Δr 的区别：前者表示质点位置变化，是矢量，同时反映位置变化的大小和方位；后者是标量，反映质点位置离开坐标原点的距离的变化. ② $\Delta \boldsymbol{r}$ 与 Δs 的区别：Δs 表示 $t \sim t + \Delta t$ 时间内质点通过的路程，是标量，只有质点在直线直进时两者的大小相等或当 $\Delta t \to 0$ 时，$|\Delta \boldsymbol{r}| = \Delta s$.

3. 速度

$\boldsymbol{v} = \dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，是质点位置矢量对时间的变化率.

在直角坐标系中

$$\boldsymbol{v} = \frac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{i} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{j} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\boldsymbol{k} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} + v_z\boldsymbol{k}$$

$\boldsymbol{v}$ 的大小：$v = |\boldsymbol{v}| = \sqrt{\left(\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \left(\dfrac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\right)^2} = \sqrt{v_x^2 + v_y^2 + v_z^2}$

$\boldsymbol{v}$ 的方向：在直线运动中，$v > 0$ 表示质点沿坐标轴正向运动，$v < 0$ 表示质点沿坐标轴负向运动；在曲线运动中，$\boldsymbol{v}$ 沿曲线上各点切线，指向质点前进的一方.

注意 ①瞬时性：质点在运动中的任一时刻的速度是不同的；②矢量性：速度为矢量，具有大小、方向，求解速度应同时求得其大小和方向；③相对性：运动是绝对的，但运动描述是相对的，所以必须明确参考系、坐标系，在确定的坐标系中求质点的速度；④叠加性：因为运动是可叠加的，所以描述运动状态的物理量速度也是可叠加的；⑤要注意区别速度和速率，注意 $\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 与 $\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}$，$\dfrac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}$ 与 $\left|\dfrac{\mathrm{d}\boldsymbol{r}}{\mathrm{d}t}\right|$ 的区别.

4. 加速度

$\boldsymbol{a} = \dfrac{\mathrm{d}\,\boldsymbol{v}}{\mathrm{d}t}$，描述质点速度对时间的变化率，其中包括速度的大小和方向随时间的变化. 不论速度的大小变化，还是速度方向的变化，都会产生加速度. 加速度也为矢量.

在直角坐标中 $\boldsymbol{a} = a_x\boldsymbol{i} + a_y\boldsymbol{j} + a_z\boldsymbol{k}$

其中，$a_x = \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}$，$a_y = \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}$，$a_z = \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} = \dfrac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2}$，$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}$.

在自然坐标系中

$$\boldsymbol{a} = a_n\boldsymbol{n} + a_t\boldsymbol{t}$$

其中，$a_n = \dfrac{v^2}{\rho}$，$a_t = \dfrac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$，$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_n^2 + a_t^2}$，$\boldsymbol{a}$ 与切向的夹角 $\theta = \arctan\dfrac{a_n}{a_t}$.

加速度的方向与速度方向无直接关系. 在直线运动中，若 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 同向，则质点做加速运动，$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向，则质点做减速运动. 在曲线运动中，$\boldsymbol{a}$ 方向总是指向曲线凹的一侧.

5. 圆周运动的角速度、角加速度

角速度 $$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}$$

角加速度 $\beta = \dfrac{d\omega}{dt} = \dfrac{d^2\theta}{dt^2}$

角量与线量的关系 $v = R\omega$ ，$a_t = R\beta$ ，$a_n = R\omega^2$

6. 伽利略速度变换

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}' + \boldsymbol{u}$$

其中，$\boldsymbol{v}$ 为运动物体相对固定参考系的速度，称为绝对速度；$\boldsymbol{v}'$ 为运动物体相对运动参考系的速度，称为相对速度；$\boldsymbol{u}$ 为运动参照系相对固定参考系的速度，称为牵连速度.

1.3 习题选解

1-1 从原点到 P 点的位置矢量 $\boldsymbol{r} = -2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j}$ ，而 P 点到 Q 点的位移 $\Delta\boldsymbol{r} = 4\boldsymbol{i} - 2\boldsymbol{j}$. 求从原点到 Q 点的位置矢量，并作图表示.

解 由位移定义 $\Delta\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}_Q - \boldsymbol{r}_P$

设 Q 点坐标为 (x, y)

则 $\Delta\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} - (-2\boldsymbol{i} + 6\boldsymbol{j})$

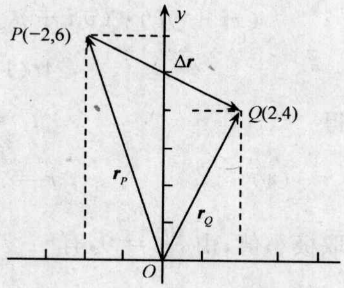
$= (x+2)\boldsymbol{i} + (y-6)\boldsymbol{j}$

而 $\Delta\boldsymbol{r} = \Delta x\boldsymbol{i} + \Delta y\boldsymbol{j}$

显然 $\begin{cases}\Delta x = x + 2 = 4 \\ \Delta y = y - 6 = -2\end{cases}$，$\begin{cases}x = 2 \\ y = 4\end{cases}$

故 $\boldsymbol{r}_Q = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = 2\boldsymbol{i} + 4\boldsymbol{j}$

如题 1-1 图所示.



题 1-1 图

1-2 设质点沿 x 轴运动，其运动方程为 $x = 3t^2 - t^3$（其中 x 以 m 计，t 以 s 计）. 求：(1) 质点在 3s 末的速度和加速度；(2) 质点在 1.5s 是做加速运动还是做减速运动；(3) 第 1s 末到第 3s 末时间内的位移和路程.

解 (1) $v = \dfrac{dx}{dt} = 6t - 3t^2$，$a = \dfrac{dv}{dt} = 6 - 6t$

将 $t = 3\text{s}$ 代入上两式分别得

$$v = -9\text{m}\cdot\text{s}^{-1}，\quad a = -12\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

(2) 将 $t = 1.5\text{s}$ 代入 v、a 表达式分别得

$$v = 6t - 3t^2 = t(6 - 3t) = 2.25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$a = 6 - 6t = -3\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 反向，质点做减速运动.

(3) 位移

$$\Delta x_{1-3} = x(3) - x(1) = -2\text{m}$$

由 $v = 6t - 3t^2 = 0$ 得 $t_1 = 0$，$t_2 = 2\text{s}$，即 $t = 2\text{s}$ 时质点瞬时静止，其后反向运动.

故路程 $\Delta x_{1-3} = x(2) - x(1) + x(2) - x(3) = 6\text{m}$

1-3 一质点在 Oxy 平面内运动，运动方程为 $x=2t$，$y=19-2t^2$ (SI)（其中 x，y 以 m 计，t 以 s 计）.（1）求质点的轨道方程；（2）求 t 时刻质点的位置矢量、速度矢量；（3）什么时刻质点的位置矢量与其速度矢量恰好垂直？（4）什么时刻质点离原点最近？求这一距离.

解 （1）由 $x=2t, y=19-2t^2$ 消去 t 得轨道方程为

$$y=19-2\left(\frac{x}{2}\right)^2=19-\frac{x^2}{2} \quad (x>0)$$

（2）$\boldsymbol{r}(t)=x(t)\boldsymbol{i}+y(t)\boldsymbol{j}=2t\boldsymbol{i}+(19-2t^2)\boldsymbol{j}$

而
$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=2, \quad v_y=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}=-4t$$

故
$$\boldsymbol{v}=v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j}=2\boldsymbol{i}-4t\boldsymbol{j}$$

（3）$\boldsymbol{r}\perp\boldsymbol{v}$ 时，则 $\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{v}=0$，即

$$(x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j})\cdot(v_x\boldsymbol{i}+v_y\boldsymbol{j})=xv_x+yv_y=2t\times2+(19-2t^2)\times(-4t)=0$$

$$4t(1-(19-2t^2))=4t(2t^2-18)=0$$

得
$$t_1=0, \quad t_2=3\mathrm{s}, \quad t_3=-3\mathrm{s}(\text{舍去})$$

（4）
$$r=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2t)^2+(19-2t^2)^2}$$

取极小值，由 $\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}=0$，有 $\quad 8t(2t^2-18)=0$

得
$$t_1=0, \quad t_2=3\mathrm{s}, \quad t_3=-3\mathrm{s}(\text{舍去})$$

但
$$\left.\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t_1}<0, \quad \left.\frac{\mathrm{d}^2r}{\mathrm{d}t^2}\right|_{t_3}>0, \text{且 } r(3)=6.08\mathrm{m}$$

故 $t=3\mathrm{s}$ 时质点离原点距离最近，其距离为 6.08m.

1-4 一质点具有恒定加速度 $\boldsymbol{a}=6\boldsymbol{i}+4\boldsymbol{j}$ (SI). $t=0$ 时，质点速度为零，位置矢量 $\boldsymbol{r}_0=10\boldsymbol{i}$. 求：（1）质点在任意时刻的速度和位置矢量；（2）质点的轨迹方程.

解 由题意知：$a_x=6\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}, a_y=4\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$

（1）
$$a_x=\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}v_x=a_x\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{v_x}\mathrm{d}v_x=\int a_x\,\mathrm{d}t=\int_0^t 6\mathrm{d}t, \quad v_x=6t$$

而
$$v_x=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}, \quad \mathrm{d}x=v_x\mathrm{d}t=6t\mathrm{d}t$$

$$\int_{10}^{x}\mathrm{d}x=\int_0^t 6t\mathrm{d}t, \quad x-10=3t^2, \quad x=10+3t^2$$

同理
$$a_y=\frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t}=4, \quad \mathrm{d}v_y=4\mathrm{d}t$$

$$\int_0^{v_y} \mathrm{d}v_y = \int_0^t 4\mathrm{d}t\,,\quad 即\ v_y = 4t$$

而

$$v_y = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,,\quad \mathrm{d}y = v_y\mathrm{d}t = 4t\mathrm{d}t$$

$$\int_0^y \mathrm{d}y = \int_0^t 4t\mathrm{d}t\,,\quad y = 2t^2$$

由此可得

$$\boldsymbol{v} = v_x\boldsymbol{i} + v_y\boldsymbol{j} = 6t\boldsymbol{i} + 4t\boldsymbol{j}$$

$$\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} = (10 + 3t^2)\boldsymbol{i} + 2t^2\boldsymbol{j}$$

(2) 轨道方程由 $x = 10 + 3t^2, y = 2t^2$ 消 t 得

$$x = 10 + \frac{3}{2}y\,,\quad 即\ 3y - 2x + 20 = 0$$

1-5 消防水枪喷出的水的流量是 $q = 280\mathrm{L\cdot min^{-1}}$. 水的流速 $v = 26\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. 若水枪竖直向上喷射,水流上升的高度是多少?在任一瞬间空中有多少升水?

解 竖直上抛的最大高度

$$H = \frac{v_0^2}{2g} = 33.8\mathrm{m}$$

水上升到最大高度的时间,由 $v_y = v_0 - gt$ (令 $v_y = 0$, v_y 为上升到最高点的速度)得

$$t = \frac{v_0}{g} = \frac{26}{10} = 2.6\mathrm{s}$$

则水在空中运动 5.2s.

又因为

$$q = 280\mathrm{L\cdot min^{-1}} = \frac{280\mathrm{L}}{60\mathrm{s}} = 4.67\mathrm{L\cdot s^{-1}}$$

在时间小于 5.2s 喷向空中的水 $\quad Q = qt' = 4.67t'\ (\mathrm{L})$

在时间大于 5.2s 喷向空中的水 $\quad Q = 2qt = 24.3\ (\mathrm{L})$

1-6 一升降机以加速度 $1.22\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ 上升,当上升速度为 $2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 时,有一螺帽自升降机的天花板上松落,天花板与升降机的底面相距 2.74m. 计算:(1) 螺帽从天花板落到底面所需的时间;(2) 螺帽相对升降机外固定柱子下降的距离.

解 以地面为参考系,坐标原点选在升降机以速度 $2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 上升时刻机外固定柱上对应升降机地板所在处,向上为正.

(1) 螺帽在 $t = 0$ 时,从 $y = y_0 = 2.74\mathrm{m}$ 处以初速为 $v_0 = 2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ 做上抛运动. 其运动方程为

$$y_1 = y_0 + v_0t - \frac{1}{2}gt^2$$

地板在 $t = 0$ 时,以初速 $v_0 = 2.44\mathrm{m\cdot s^{-1}}$,从原点做加速上抛运动,其方程为

$$y_2 = v_0t + \frac{1}{2}at^2$$

螺帽落地时 $y_1 = y_2$，因此

$$y_0 + v_0 t - \frac{1}{2}gt^2 = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$$

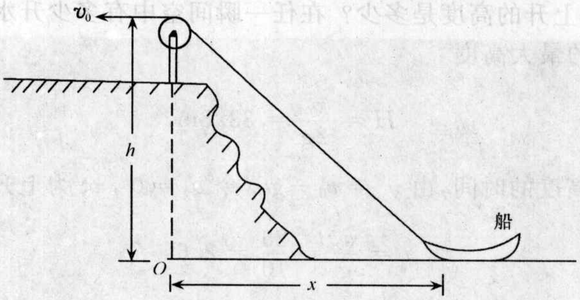
$$y_0 = \frac{1}{2}at^2 + \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2}(a+g)t^2$$

$$t = \sqrt{\frac{2y_0}{a+g}} = \sqrt{\frac{2\times 2.74}{1.22+9.8}} = 0.705\text{s}$$

（2）螺帽下降的距离

$$y_0 - y_1 = -\left(v_0 t - \frac{1}{2}gt^2\right) = -\left(2.44\times 0.71 - \frac{1}{2}\times 9.8\times 0.71^2\right) = 0.72\text{m}$$

1-7　如题 1-7 图所示，有人在离水面高 h 处通过滑轮用绳子拉船靠岸．设人用匀速 v_0 收绳子拉船，求当船与滑轮的水平距离为 x 时，船的速度和加速度的大小．



题 1-7 图

解　设绳长为 s，由题 1-7 图可知

$$s^2 = h^2 + x^2, \quad x = \sqrt{s^2 - h^2}$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}(s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}} \times 2s \times \frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{s}{\sqrt{s^2 - h^2}}\frac{ds}{dt}$$

人以匀速 v_0 收绳拉船　$\dfrac{ds}{dt} = -v_0$

$$v = \frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x}(-v_0) = -\frac{\sqrt{h^2 + x^2}}{x}v_0$$

$\boldsymbol{v}$ 的方向沿 x 轴负方向．

船的加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{sv_0}{\sqrt{s^2 - h^2}}\right) = -\frac{d(sv_0)}{\sqrt{s^2 - h^2}\,dt} - sv_0\frac{d}{dt}(s^2 - h^2)^{-\frac{1}{2}}$$

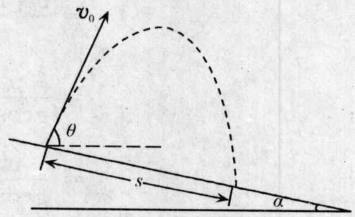
$$= -\frac{v_0}{\sqrt{s^2 - h^2}}\frac{ds}{dt} - sv_0\left(-\frac{1}{2}\right)(s^2 - h^2)^{-\frac{3}{2}}2s\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{v_0^2(s^2-h^2)}{\sqrt{s^2-h^2}(s^2-h^2)} - \frac{s^2v_0^2}{(s^2-h^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{v_0^2h_0^2}{(s^2-h^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$= -\frac{h^2v_0^2}{x^3}$$

$\boldsymbol{a}$ 的方向沿 x 轴负方向.

1-8 如题1-8图所示，一人站在山坡上，山坡与水平面成 α 角.他扔出一个初速为 v_0 的小石子，v_0 与水平面成 θ 角(向上).



题1-8图

(1) 如空气阻力不计，试证小石子落在斜坡上的距离 s 为

$$s = \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta}{g\cos^2\alpha}$$

(2) 由此证明，对于给定的 v_0 与 α 值，s 在 $\theta = \frac{\pi}{4} - \frac{\alpha}{2}$ 时有最大值，为

$$s_{\max} = \frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$

解 以斜面方向为 x 轴，垂直于斜面为 y 轴，扔出点为原点建立 Oxy 坐标系.

(1) $\begin{cases} v_{0x} = v_0\cos(\theta+\alpha) \\ v_{0y} = v_0\sin(\theta+\alpha) \end{cases}$，$\begin{cases} x = v_{0x}t + \frac{1}{2}g_xt^2 \\ y = v_{0y}t + \frac{1}{2}g_yt^2 \end{cases}$，$\begin{cases} g_x = g\sin\alpha \\ g_y = -g\cos\alpha \end{cases}$

小石子落地时 $y=0$，有

$$v_0\sin(\theta+\alpha)t + \frac{1}{2}(-g\cos\alpha)t^2 = 0$$

落地时间

$$t = \frac{2v_0\sin(\alpha+\theta)}{g\cos\alpha}$$

小石子落在斜坡上的距离

$$s = x = v_0\cos(\theta+\alpha)t + \frac{1}{2}g\sin\alpha t^2$$

$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)}{g\cos\alpha} + \frac{4v_0^2g\sin\alpha\sin^2(\alpha+\theta)}{2g^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2v_0^2g\cos\alpha\sin(\theta+\alpha)\cos(\theta+\alpha)}{g^2\cos^2\alpha} + \frac{2v_0^2g\sin\alpha\sin^2(\theta+\alpha)}{g^2\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}[\cos\alpha\cos(\theta+\alpha) + \sin\alpha\sin(\theta+\alpha)]$$

$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\cos(\theta+\alpha-\alpha)$$

$$= \frac{2v_0^2\sin(\theta+\alpha)}{g\cos^2\alpha}\cos\theta$$

(2) 对于给定的 v_0 和 α 值

$$s = \frac{v_0^2[2\sin(\theta+\alpha)\cos\theta]}{g\cos^2\alpha}$$

$$= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}[\sin(\theta+\theta+\alpha)-\sin(\theta-\theta-\alpha)]$$

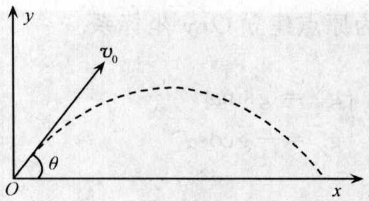
$$= \frac{v_0^2}{g\cos^2\alpha}[\sin(2\theta+\alpha)+\sin\alpha]$$

由上式可知，小石子落在斜坡上距离 s 取最大值的条件是 $\sin(2\theta+\alpha)=1$.

$$2\theta+\alpha=\frac{\pi}{2},\quad \theta=\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

故

$$s_{\max}=\frac{v_0^2(1+\sin\alpha)}{g\cos^2\alpha}$$



题 1-9 图

1-9　如题 1-9 图所示，一个人扔石头的最大出手速度为 $v_0=25\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$，他能击中一个与他的手水平距离为 $l=50\text{m}$，高 h 为 13m 处的一个目标吗？在这个距离上他能击中的目标的最大高度是多少？

解　以出手点为原点，建立 Oxy 坐标系，设出手速度 v_0 与 x 轴夹角为 θ，忽略空气阻力有

$$y=v_0\sin\theta t-\frac{1}{2}gt^2$$

$$x=v_0\cos\theta t$$

消去 t，得石头运动轨道方程

$$y=x\tan\theta-\frac{gx^2}{2v_0^2\cos^2\theta}$$

代入　$v_0=25\text{m}\cdot\text{s}^{-1},\quad x=l=50\text{m}$

$$y=50\tan\theta-\frac{2g}{\cos^2\theta}$$

当 $\frac{dy}{d\theta}=0$ 时 y 取极值，有

$$\frac{d}{d\theta}(50\tan\theta-\frac{2g}{\cos^2\theta})=0$$

$$50\sec^2\theta-2g\frac{2\sin\theta}{\cos^3\theta}=0$$

得

$$\tan\theta=\frac{50}{4g}=1.2755,\quad \theta=51.9^\circ$$

故当 $\theta = 51.9°$ 时，y 在 $l = 50\text{m}$ 处的最高高度为

$$y_{\max} = 50\tan 51.9° - \frac{2g}{\cos^2 51.9°} = 12.3\text{m}$$

所以不能击中目标，能击中的最大高度是 12.3m.

1-10　一质点沿直线运动，其坐标 x 与时间 t 有关系 $x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t$ (SI)（A、β 皆为常数）. 求：(1) 任意时刻 t 质点的加速度；(2) 质点通过原点的时刻 t.

解　质点运动方程　$x = Ae^{-\beta t}\cos\omega t$

(1) 速度

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}(Ae^{-\beta t}\cos\omega t)$$

$$= \frac{1}{dt}(Ae^{-\beta t}d\cos\omega t + A\cos\omega t\, de^{-\beta t})$$

$$= -A\omega e^{-\beta t}\sin\omega t - A\beta e^{-\beta t}\cos\omega t$$

加速度

$$a = \frac{dv}{dt} = \frac{1}{dt}(-A\omega e^{-\beta t}d\sin\omega t - A\omega\sin\omega t\, de^{-\beta t} - A\beta e^{-\beta t}d\cos\omega t - A\beta\cos\omega t\, de^{-\beta t})$$

$$= -A\omega^2 e^{-\beta t}\cos\omega t + A\omega\beta\sin\omega t\, e^{-\beta t} + A\beta\omega e^{-\beta t}\sin\omega t + A\beta^2\cos\omega t\, e^{-\beta t}$$

$$= Ae^{-\beta t}[(\beta^2 - \omega^2)\cos\omega t + 2\omega\beta\sin\omega t]$$

(2) 质点通过原点时 $x = 0$，所以 $Ae^{-\beta t}\cos\omega t = 0$. 由于 $e^{-\beta t} \neq 0$，所以 $\cos\omega t = 0$. 有

$$\omega t = k\pi + \frac{\pi}{2}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

$$t = \frac{(2k+1)\pi}{2\omega}, \quad k = 0,1,2,\cdots$$

1-11　一质点沿半径为 R 的圆周运动，其路程 s 随时间 t 变化的规律为

$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2 \text{ (SI)}$$

其中，b，c 为大于零的常数，且 $b^2 > R$. 求：(1)质点运动的切向加速度 a_t 和法向加速度 a_n；(2) $a_t = a_n$ 的时刻 t.

解　质点做圆周运动

$$s = bt - \frac{1}{2}ct^2$$

(1) 速率

$$v = \frac{ds}{dt} = b - ct$$

切向加速度

$$a_t = \frac{dv}{dt} = -c$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(b-ct)^2}{R}$$

(2) 切向加速度 $a_t = -c < 0$，法向加速度 $a_n > 0$. 当 $|a_t| = |a_n|$ 时

$$\frac{(b-ct)^2}{R} = c\,,\quad (b-ct)^2 = Rc$$

$$b - ct = \pm\sqrt{Rc}\,,\quad t = \frac{b}{c} \pm \sqrt{\frac{R}{c}}$$

1-12 一质点沿半径为 R 的圆周按路程为 $s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$ (SI) 的规律运动，其中 v_0，b 都是常量. (1) 求 t 时刻质点的加速度；(2) t 为何时，加速度的大小等于 b？(3) 当加速度为 b 时，质点沿圆周运动了多少圈？

解 质点做圆周运动

$$s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2$$

(1) 速率

$$v = \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = v_0 - bt$$

切向加速度

$$a_t = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -b$$

法向加速度

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(v_0 - bt)^2}{R}$$

质点的加速度大小为

$$a = \sqrt{a_n^2 + a_t^2} = \frac{1}{R}\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4}$$

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{v}$ 的夹角

$$\theta = \arctan\frac{a_n}{a_t} = \arctan\left[-\frac{(v_0 - bt)^2}{Rb}\right]$$

(2) 当 $a = b$ 时

$$\frac{1}{R}\sqrt{R^2 b^2 + (v_0 - bt)^4} = b\,,\quad t = \frac{v_0}{b}$$

(3) 当 $a = b$ 时

$$t = \frac{v_0}{b}\,,\quad s = v_0 t - \frac{1}{2}bt^2 = \frac{v_0^2}{2b}$$

质点沿圆周运行的圈数

$$n = \frac{s}{2\pi R} = \frac{v_0^2}{4\pi Rb}$$

1-13 一质点沿半径为 0.1m 的圆周运动，用角坐标表示其运动方程为 $\theta = 2 + 4t^3$ (SI). (1) 求 $t = 2\mathrm{s}$ 时质点切向加速度和法向加速度的大小；(2) 当 θ 等于多少时，质点的加速度和半径的夹角成 45°.

解 质点做圆周运动

$$\theta = 2 + 4t^3$$

(1) 角速度

$$\omega = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = 12t^2$$