数学建模入门

徐全智　杨晋浩　著

电子科技大学出版社

数学建模入门

徐全智　杨晋浩　著

电子科技大学出版社

[川] 新登字 016 号

内容简介

本书是在我校多次使用的讲义《数学建模入门》的基础上，融入我校组织、训练大学生数学建模活动的经验和体会改写而成。

本书内容包括建模方法论、数据处理、模拟模型、机理分析方法以及科技和参赛论文写作等。书中还编入丰富的建模实例和练习题。

本书适合作为高等学校本专科《数学建模》课程的教材，也可作为数学建模竞赛培训教材以及供科技人员参考。

数学建模入门

徐全智　杨晋浩　著

*

电子科技大学出版社出版

（中国成都建设北路 2 段 4 号）　邮编 610054

西南冶金地质印刷厂印刷

*

开本 787×1092　1/16　印张 13.25　字数 321 千字

版次 1996 年 1 月第一版　印次 1996 年 1 月第一次印刷

印数 1—5000 册

ISBN 7-81043-391-1/O·36

定价：13.60 元

序

自 1989 年我国大学生组队参加美国数学建模通讯竞赛（MCM）到 1992 年我国举办中国大学生数学建模联赛，至今已有数年。这一竞赛活动得到了我国大学生的热情响应，参与的院校和学生人数逐年递增。通过竞赛这种形式，促进大专院校数学课程改革，增长学生分析问题和解决问题的能力，已愈来愈取得广大师生的共识。可以预料，这一活动将在深度和广度上进一步发展。

数学建模是工程技术、管理科学、经济等多种学科与数学的交叉，其内容十分广泛。作为一门课程开出，其基本内容、基本方法、基本要求如何确定，尚有待研究。因此，编写不同风格、不同特色的数学建模教材或参考资料，是深化课程改革、深化教学改革的需要。

本书是作者在指导学生参加数学建模竞赛和开设数学建模课程两个方面的实践中，总结、整理、归纳而成。因此，本书既可作为数学建模课程的教材，较系统介绍数学建模的一般方法，以培养学生相应的能力和素质。又可作为参赛的实战培训资料，注重学生在实战参与中的技能和素质培养。在这两个方面的结合上本书是一个很有益的探索。希望通过它的出版能促进更多不同风格、不同特色教材的出现，以适应教学改革和培养跨世纪人才的需要。

王荫清于四川联合大学

1996 年元月

（王荫清教授系中国工业与应用数学学会四川省分会理事长）

前　言

本书是我校《数学建模》系列教材的第一本。该书是在我校多次使用的讲义《数学建模入门》的基础上，结合我们多年从事《数学建模》教学的经验和担任数学建模竞赛培训工作的体会修改而成。

本书力求解决的问题是：什么是数学建模？如何进行数学建模？书中以介绍数学建模的一般方法为主线，着重训练学生运用数学工具建立数学模型、解决实际问题的技能技巧，强调从事现代科研活动的能力和相关素质的培养，尤其重视培养从整体上把握事物特征的能力，以及掌握科研论文写作方法等。

我校《数学建模》系列教材的第二本为拓广学生数学知识面的系列讲座教材，第三本是数学建模练习题集。

本书适合于高等学校本专科作为《数学建模》课程的教材，也可作为大学生数学建模竞赛培训教材，以及供科技工作者和自学者参考。

本书由电子科技大学朱济生副教授审阅并提出了不少中肯的意见和宝贵的建议。书中插图由李惠敏老师绘制。我校 1994 年和 1995 年参加“全国大学生数学建模竞赛”的同学们也做了部分工作并提供了本书附录中的两篇例文。我校各级领导和许多教师，给予了大力支持和帮助，在此我们一并表示衷心的感谢。

限于著者水平，不妥之处敬请读者批评指正。

电子科技大学应用数学系
徐全智　杨晋浩
一九九六年元月于成都

目　录

第一章 导 言

1.1 数学科学的重要性

“科学技术是第一生产力”这一重要科学论断被越来越多的人所接受。在西方国家的国民经济增长中百分之七十以上依靠新科学技术。我们所处的信息时代的一个重要特点是数学的应用向一切领域渗透，高科技与数学的关系日益密切，产生了许多与数学相结合的新学科，如数学化学、数学生物学、数学地质学、数学社会科学等等。当今社会日益数学化，一些有远见的科学家就曾深刻指出：“信息时代高科技的竞争本质上是数学的竞争。”“当今如此受到称颂的‘高技术’本质上是一种数学技术”。

在80年代，美国国家研究委员会发布了一系列关于美国数学教育的未来的报告：《人人关心美国数学教育的未来》、《振兴美国数学——90年代的计划》等等。我国著名科学家钱学森教授多次强调数学科学的重要性，并在“发展我国的数学科学——中国数学会数学教育与科研座谈会上的讲话”中论述了他对“数学技术”的理解。在我国数学的重要性似乎不言自明，每位学生的学习生涯中学习数学的持续时间最长。可是往往有学生发出疑问：“我们学习这门数学课程有什么用途?”而授课老师只能空泛作答：“今后你会用上。”这实质上是数学的重要性究竟体现在哪里的问题。著名德国数学家 H. G. Grassmann 认为：“数学除了锻炼敏锐的理解力、发现真理以外，她还有另一个训练全面考虑科学系统的头脑的开发功能。”数学的重要性不仅体现在数学知识的应用，更重要的是数学的思维方式。数学为组织和构造知识提供方法，用于技术时就能使科学家和工程师们生产出系统的，能复制的，并且是可以传播的知识。从而“在经济竞争中数学科学是必不可少的，数学科学是一种关键的、普遍的、能够实行的技术。”数学教育工作者应建立这种观点并用其指导数学教学。

1.2 数学建模

近年来，数学模型（Mathematical Model）和数学建模（Mathematical Modelling）这两个术语使用的频率越来越高，什么是数学建模呢？可以说数学建模是运用数学去解决实际问题，就要用数学的语言、方法去近似地刻划该实际问题，而这种刻划的数学表述就是一个数学模型，其过程就是数学建模的过程。

为解决一个实际问题，建立数学模型是一种有效的重要方法。

让我们考虑一个十字路口的交通问题，为使交通顺畅，需设计一个最佳交通流控制方案（是否设置单行道，是否限制载重车通行等）。一种选择是将几种不同设计方案交给交通警，让他们尝试运行，从中找出最优的方案。显然，这种实验的方法费时费力，执行起来很困难，而且极有可能造成该十字路口和相邻区域的交通混乱。另一种选择是将这一问题

交给公路交通研究室。研究人员收集必要的数据，如车辆的速度、大小、机动性，交通流的密度，十字路口的结构等等，用数学和统计学知识进行分析，提炼出这些变量之间的必要的关系式，通过对结果的检验与分析，便可确定出几种设计方案中的最优的一种。研究者们建立了一个十字路口交通流模型，这是一个数学模型，用它可以评估类似的交通流控制方案，而且研究室的其他人也可以使用这个模型。

数学建模是一种数学的思考方法，从科学、工程、经济、管理等角度看数学建模就是用数学的语言和方法，通过抽象、简化建立能近似刻划并“解决”实际问题的一种强有力的数学工具。

生理医学专家有了药物浓度在人体内随时间和空间变化的数学模型后，他会用来分析药物的疗效，从而有效地指导临床用药。厂长经理们筹划出一个合理安排生产和销售的数学模型，是为了获取尽可能高的经济效益。对于建立起的数学模型，还需要用一定的技术手段（例如推理证明、计算等等）求解该数学问题并用实际情形来验证，以达到“解决”实际问题的目的。若需要还可能修改模型并且重复上述过程。完成整个数学建模往往涉及大量的计算，这需要计算机的支撑。在高性能电子计算机未出现之前，正是由于缺乏这一技术手段而在一定程度上限制了数学建模这一强有力方法的应用和发展。计算机的迅速发展促使数学建模这一方法飞速发展，在某种意义下，数学建模已经发展成为一个独立的数学分支，而且不断向应用数学和纯粹数学提供大量的挑战性问题，从而推进了数学科学的发展。反过来，数学建模的发展又推动了计算机在高速、智能、小型、价廉这四个方面的迅速发展，使计算机能更广泛地应用于各行各业。

1.3 数学建模的教与学

马克思早在一百年前就曾指出：“一种科学只有在成功地运用数学时，才算达到真正完善的地步。”高科技的出现把我们的社会推进到数学工程技术的新时代，现代数学已成为发展现代科技的动力，这就要求现在的工科学生——将来的工程技术人员，具备雄厚的数学基础和良好的数学素质。目前，我国工科院校除开设《高等数学》外，还开设了数门工程数学。修完这些数学课程的学生们面对实际问题往往不知从何处着手，不知如何把错综复杂的实际问题简化，抽象为合理的数学结构，并运用自己掌握的数学知识去分析求解，从而解决实际问题。究其原因，出现这种现象与我们传统的教育观念不无关系。数学教学中重传授知识和培养逻辑推演和计算能力，越来越形式、抽象，只见定义、定理、推导、证明、计算，而越来越少讲数学与我们周围世界的密切联系。教学指导思想不更新，不可能通过具体的数学教学达到训练学生全面考虑科学系统的头脑的目的。

作为一名初学者，首先应当清楚“数学建模”完全不同于其他数学分支，学习该课程的困难不在于学习和理解所用的数学，而在于明白在何处用它，怎样用它，而“学着用”数学和“学”数学是根本不同的。掌握成功应用数学建立数学模型所需的技能与理解数学概念、证明定理、求解方程所需的技巧也迥然不同。

数学对其他科学的有效性，在很大程度上是通过建立数学模型来体现的。训练有素的数学建模工作者们面对各类实际问题，他们都能将每一个问题转化为某种数学形式，建立起令人赞叹的数学模型，成功地解决实际问题。当你开始阅读这本书时，或许你已经很好地学习过《高等数学》、《线性代数》、《概率论》等数学课程，这可以帮助你顺利阅读它。可是尽管你掌握了不少数学知识，即使你已经通读了这本书和其他数学模型书，你可能会对

数学建模有比较深的了解，却未必能熟练掌握建模技巧。那么初学时应当如何发展自己的建模能力呢？我们的建议是去做，去实践。学习建模就像学习游泳一样必须亲身实践，站在岸边永远学不会游泳。只是欣赏别人的数学模型的人，他永远不会拥有让别人欣赏的数学模型。当你亲身参与了真正的数学建模活动，你会发觉自己处于一种良性循环之中：越多的参与越感到自己数学知识的不足，数学思考方法上的不足，更激起学习数学的积极性。数学本领高了，参与数学建模就更得心应手，兴趣更浓，如此循环不息。

从教学的角度来看，开设数学建模课是为了使学生将学习过的数学方法和知识同周围的现实世界联系起来，甚至和真正的实际应用问题联系起来。不仅应使学生知道数学有用、怎样用，更要使学生体会到在真正的应用中还需要继续学习。本书不是以介绍数学建模案例为主，也不是以某一数学学科或某种数学方法为中心介绍经典模型。本书的特色是以介绍数学建模的一般方法为主线，着重训练运用数学建立模型的技能技巧。在教学中应强调学生的积极参与，着重能力和相关素质的培养。

（1）培养“翻译”能力。对实际问题进行充分分析后，经一定抽象和简化，用数学语言表达出来形成数学模型。对应用数学的方法进行推演或计算的结果，能用一般人能领会的语言“翻译”（表达）出来，当然这样的结果是用非数学的、非技术的语言描述。

（2）用数学方法和思想进行综合应用和分析。能充分理解数学分析的重要性，理解合理的抽象和简化，在数学建模过程中灵活地、创造性地使用数学工具。

（3）想象力的培养。注重培养学生的想象力和联想能力，著名科学家爱因斯坦曾说过：“想象力比知识更重要，因为知识是有限的，而想象力概括着世界上的一切，推动着进步，并且是知识化的源泉。”在建模过程中往往要求学生充分发挥联想，把表面上完全不同的实际问题，用相同或相似的数学模型去描述它们。培养学生有广泛的兴趣，勤思考，勤练习而逐步达到触类旁通的境界。

（4）发展观察力，形成洞察力。面对错综复杂的实际问题，能很快地抓住问题的要点，逐步剔除冗余的信息，使问题趋于明确。并能很快清理出解决问题的重点与难点。洞察力的形成不是一朝一夕的事，全靠多练习而熟能生巧。

（5）熟练使用技术手段。熟练使用计算机及相应的各种数学软件包是必不可少的技术手段，正如我们前面所提到的，数学建模的发展和计算机的发展是相辅相成的。另外，让学生学会查阅各类资料，学会使用资料也是很重要的方面。

在数学建模教学中应重视以上五个方面能力和素质的培养，这容易达成共识。我们还认为如果在教学中将实践检验放在重要的地位，以提高学生从事现代科学研究的能力为目标，还应注意以下两方面：

（6）培养交流与表达的能力，团结合作的精神。现代科研活动往往是群体的合作活动，需要各个成员间相互理解、支持、协调，相互交流、集思广益，才可能进行成功的合作。学生长期习惯于听老师讲课，独立完成习题的学习方式，往往拙于交流和表达自己的思想，更疏于与人合作。应竭力提倡讨论、争辩、勇于提出自己见解，培养互相交流、互相学习、互相妥协的能力。

（7）科技论文写作能力。我们发觉部分学生数学思维活跃敏捷，掌握了一定的数学方法，完成的数学模型颇具创见性。可是从他们提交的论文来看，往往不能清晰地表达自己的建模思想和对问题的分析，并清楚地表达结论。甚至整篇文章重点不突出，思想不清晰，词不达意，使人觉得他的思维混乱。培养学生具备科技论文写作能力是教学中不应忽视的一个方面。

第二章 数学与现实世界

2.1 从现实对象到数学模型

原型和模型 我们生活在一个五彩缤纷、变化万千的现实世界中，人们无时无刻不在运用智慧和力量去认识、利用、改造这个世界。原型（Prototype）是指人们在社会活动和生产实践中关心和研究的现实世界中的实际对象，在科技领域则常用系统（System）、过程（Process）等术语，如机械系统、电力系统、生态系统、交通系统、社会经济系统；又如导弹飞行过程、化学反映过程、污染扩散过程等等。模型（包括直观模型和物理模型）则指为了某个特定目的将原型的某一部分信息简缩、提炼而成的原型替代物，可以看成原型某一方面的理想化。

数学模型 在第一章我们将数学模型简述为刻划实际对象的数学表述。数学模型可详细地描述为对于现实世界的一个特定对象，为了一个特定目的，根据特有的内在规律，做出一些必要的简化假设，运用适当的数学工具得到的一个数学结构。

数学模型模仿了一个现实系统，但建立数学模型并非以模仿为目标，而是为了解决实际问题。数学模型是对现实对象的信息加以分析、提炼、归纳、翻译的结果，它用精确的语言表达了对象的内在特性，是利用函数、方程等数学概念创立的模型。当我们建立一个数学模型时，我们从现实世界进入充满数学概念的抽象世界。在数学世界内，我们用数学方法对数学模型进行推理演绎、求解，并借助于计算机处理这个模型，得到数学上的解答。最后，我们再回到现实世界，将模型的数学解“翻译”成现实问题的实际“解答”，如给出现实对象的分析、预报、决策、控制的结果。这些结果还必须经实际的检验，即用现实对象的信息检验得到的解答，确认结果的正确性。我们始于现实世界而终结于现实世界，数学模型是一道理想的桥梁。

2.2 建模实例

对训练有素的建模工作者而言不算困难的建模问题，对初学者来说并非易事。因此我们建议初学者采取循序渐进的学习方式，开始阶段不要急于去尝试工业上复杂的建模问题。现实生活中有许多值得我们思考的问题，其中不少既简单又实用。本章列出的 10 个建模实例是一些极普通的问题，不需要你具备过多过深的数学方法和知识就可以尝试去做，它们可以让你体会到建模“艺术”的概貌，体味到建模的魅力。值得一提的是这 10 个实例都有继续深入的余地，若你深入思考下去会感到余味无穷。

建立一个数学模型与求解一道数学题目有极大的差别，建议你在阅读这 10 个实例时注意以下的差别：

（1）建模没有唯一正确的答案。求解数学题目往往有唯一正确的答案，数学建模是利

用数学工具解决实际问题的重要手段，对同一个实际问题可能建立起若干个不同的模型，模型无所谓“对”与“错”，评价模型优劣的唯一标准是实践检验。

（2）有不同的建模方法。常用的建模方法有机理分析法和测试分析法，机理分析是根据对现实对象特性的认识，分析其因果关系，找出反映内部机理的规律，建立的模型常有明确的物理或现实意义（试分析10个实例中哪几个用到机理分析法。在第七章，将系统地介绍几类机理分析方法）。测试分析将研究对象视为一个内部机理无法直接寻求的“黑箱”系统，采用系统辨识的方法，即测量系统的输入、输出数据，以此为基础运用统计分析，按照事先确定的准则在某一类模型中选出一个与数据拟合得最好的模型（第五章有详细介绍）。将两种方法结合起来也是常用的建模方法。另外计算机模拟也可以作为建立数学模型的手段。

（3）模型与建模目的有关。建立数学模型是为了解决实际问题，在着手建立它之前应首先明确建模目的。对同一个实际对象，建模目的不同导致建模的侧重点和出发点也不同。例如，为工业加工区的一个交通要道设计交通模型，其目的是让运载产品的汽车流尽量通畅，或是尽快疏散上、下班时拥挤的自行车流。显然由这两个不同的建模目的所左右的模型是大相径庭的。

（4）模型具有可转移性。模型是现实对象抽象化、理想化的产物，它不为对象的所属领域所独有，可以转移到另外的领域，数学模型具有应用的广泛性。在10个实例中可以见到一个数学模型应用于多个实际问题的情形。

综上所述，对实际问题建模没有确定的模式，它与问题的性质、建模目的、建模者自身的数学素质有关，甚至还与建模者的灵性有关。因建模方法与其他数学方法根本不同，无法归纳出普遍的准则和技巧，而经验、想象力、洞察力、判断及直觉、灵感在建模过程中起的作用往往比一些具体的数学知识更大。人们说数学建模是一门“艺术”，要获取这门艺术的真谛和内涵是富有挑战性的。请先在10个实例中加以体味吧。

例 2.2.1　带子模型

问题描述：在捆扎管道（用带子捆在管道的外部起保护作用）或包扎伤口时，需要捆扎好管道又不会浪费太多的带子。如图 2.1，带子的宽度记为 W，管道的直径为 D，带子和管道垂直方向的夹角为 A，显然这三个变量间有一种联系，我们研究出这种关系就可以进一步讨论如何根据管道直径确定带子宽度，如何确定捆扎方式，最终达到不浪费的目的。

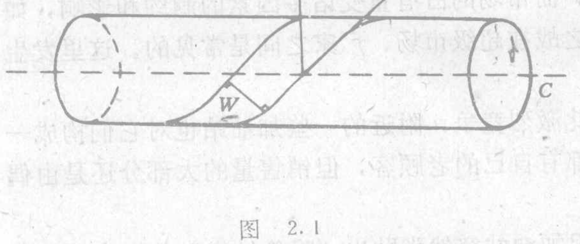

图　2.1

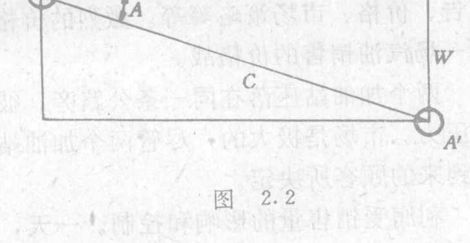

图　2.2

我们力求找出一个关系式来表达变量间的联系，为使问题更清楚明确，首先做出以下两条假设：

1. 管子的横截面是圆。

2. 带子捆扎无重叠，即没有带子的重叠浪费。

再给出变量说明：

W——带子宽度（单位：厘米）；

A——带子与管道垂直方向的夹角（单位：度）；

C——管道的周长（单位：厘米）。

问题分析：这里有两种处理方法，可以通过理论推导来得到一个数学表达式。我们设想将管道和带子的曲面展开，“平放”在一个平面上，得到如图 2.2 的图形，注意 A' 是管子上同一点，很容易得出三个变量间的关系式为

$$W = C\sin A \tag{2.1}$$

另外一种处理方式是让我们回到现实中，选取不同尺寸的管子，不同宽度的带子以及一个量角器，进行实际测量，可以测得如表 2.1 中的一组数据：

表 2.1

C（厘米）	10	10	10	10	10	20	20	20	20	20	30	30	30	30	30
W（厘米）	3	5	7	9	11	3	5	7	9	11	3	5	7	9	11
A（度）	17	30	44	64	—	9	14	20	27	33	6	10	14	17	21

可以试试这组数据与理论推导结果是否一致（试一试）。从数据表中推出所需的关系式看起来很困难，尤其是测量不够准确时更是如此。在第五章中将会专门讨论如何根据数据建立经验模型的方法。目前你还应该更深入地考虑当带子宽度极小或极大时会出现什么情况，特别看看下面两种情况发生时角度 A 会怎样变化：

(1) W 趋于零；

(2) W 等于周长 C。

思考：

(1) 当管子的横截面是正方形或是其他形状时，对问题的结论有什么影响？

(2) 给定管子长度，给定带子宽度，你需要多长的带子？管子两端有何影响？

(3) 如果将带子有重叠地捆扎，又将如何？

例 2.2.2　价格竞争模型

问题描述：销售的竞争在于占有市场，而市场的占有量受诸多因素的制约和影响，如广告、价格、市场策略等等。激烈的价格之战在超级市场、厂家之间是常见的。这里发生了一场汽油销售的价格战。

两个加油站座落在同一条公路旁，彼此激烈竞争，附近的一些加油站也对它们构成一定压力。市场是极大的，尽管两个加油站都有自己的老顾客，但销售量的大部分还是由偶然到来的顾客所决定。

利润受销售量的影响和控制。一天，甲加油站突然张贴出“降价销售”的广告吸引更

多的顾客，以图形成更大市场，获取更多的利润。结果造成乙加油站的顾客被拉走了许多，盈利急剧减少。他们为了挽回损失采取对策，决定马上降价，但需要制定一个合适的价格，既可以同甲加油站竞争，又可以获取尽可能高的利润。

问题分析：我们需要建立一个描述这场“价格战”的价格竞争模型，并站在乙加油站的立场为其制定对策。首先需要建立一个模型，可用来预测当甲加油站的汽油价格下调后，乙加油站的销售量的变化情况。

下面引入一些指标：

x——乙加油站的销售价格（便士/升）；

y——甲加油站的销售价格（便士/升）；

W——汽油的成本价格（便士/升）；

L——乙加油站在价格战之前的销售量（升/日）；

P——汽油的正常销售价格（便士/升）。

其中，P 由其他加油站的一般销售价格确定，不妨定为常数。

现在我们已将“价格竞争”问题转化为一个典型的数学问题，即推测和分析各个变量间的关系和相互影响。这是成为一名熟练建模工作者应具有的素质之一。

可以认为乙加油站的销售量受以下各因素的影响：

(1) 两加油站之间的销售价格之差；

(2) 乙加油站的销售价格与正常价格之间的差价；

(3) 甲加油站销售价格与正常价格之间的差价。

更进一步假定乙加油站的销售量受以上各因素的线性影响，下面式子表示乙加油站的销售量：

$$L - a(x - y) - b(P - y) + c(P - x) \tag{2.2}$$

其中 a、b、c 是比例常数，并且均大于零（为什么?）。确定乙加油站的利润函数为：

$$E(x,y) = (x - W)[L - a(x - y) - b(p - y) + c(p - x)]。 \tag{2.3}$$

将 y 作为参数输入，x 作为变量，可求出 $E(x,y)$ 的最大值，并求出 $E(x,y)$ 取最大值时 x 的值为

$$x = \frac{1}{2(a + c)}[L + y(a + b) - P(b - c) + W(a + c)]。$$

用以下数据检验这个模型：

$$L = 20000，P = 40，W = 30，\quad y = 37、38、39$$

现在的问题是比例常数 a、b、c 取何值。在一般的建模过程经常需要确定参数的值，往往是考虑了数据的精确度，参数的数量级等因素后用某种方法估计出来。这里考虑、权衡了 a、b、c 的数量级之后，取

$$a = 4 \times 1000, \quad b = c = 1000$$

当然你也可以尝试取其他一些数据，例如 $a=10$，或 $a=0.2$，但你会很快发现这并不合适。另外也可以认为含有 a、b、c 的各项对 $E(x,y)$ 的影响不尽相同，即可以选择三个不等的比例常数。利用上面选定的数值算出的结果列在表 2.2 中。

注意价格竞争前的利润为 $(40 - 30) \times 20000 = 200000$ 便士 $= 2000$ 镑。

思考：

(1) 分析已得利润函数 $E(x,y)$ 是否有不适当之处？用以下数据代入利润函数，分析所得结果是否合乎常识？

$$y=p,\ y=x,\ x=p。$$

(2) 表 2.2 中的结果关于比例常数的灵敏度如何？为什么取数量级为 $O(1000)$？请用"*"量级试一试。

表 2.2

y 值	最优点 x 值	E(镑)
39	36.5	2112.5
38	36.0	1800.0
37	35.5	1512.5

例 2.2.3　疏散模型

现代化都市里大楼林立，这些拔地而起的摩天大楼安全性不容忽视，我们经常耳闻目睹大楼内发生意外情况，造成令人震惊的人员伤亡和财产损失。

大楼内居住人员的安全保障在于无论发生什么情况，人员都能有组织、有秩序地进行疏散撤离。某座大楼的管委会想进行一次紧急疏散人员的演习。演习之前，他们对诸如大楼满员时是否有足够的撤离路线，需要多长时间疏散完毕等问题必须心中有数。并且他们还需为每个房间的人员落实撤离路线、步骤。

演习是为了防患于未然，但财力人力所限不可能过多地进行这种演习，我们希望建立一个模拟这种疏散过程的模型。

问题描述：上面的叙述太笼统，据此无法建立模型，因为我们不知道大楼面积多大，楼层数和出口数是多少，每间房子中有多少人等等。但是一个熟练的建模工作者善于简化那些看起来很复杂的问题，而且通常从较简单的情况入手所得的结果有助于整个问题的解决。

我们先考虑一所学校的一座教学楼，其中一楼有一排相同的教室(示意图见图 2.3)。假定学生们沿着教室外的过道走向过道尽头处的出口。现在问题简化为求出将四间教室的学生们全部撤离至出口外所花时间。

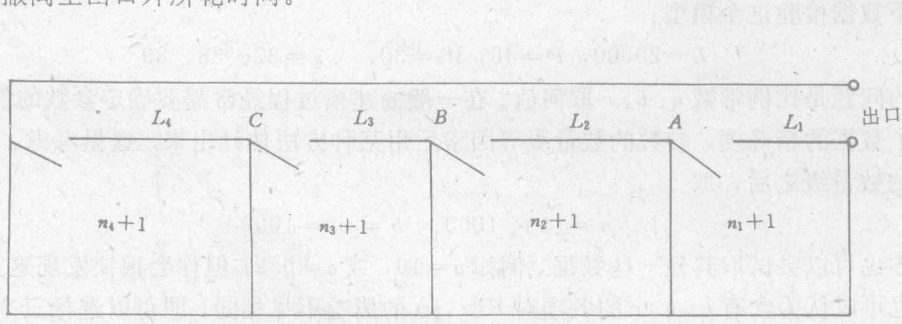

图　2.3

问题分析：不妨先分析从一间房中有秩序撤离师生的情况。考虑下面一系列的变量：

房中人数 n_1+1 个(n_1 个学生和 1 名老师);

人与人之间的间距为 d 米;

人员撤离时速度为常数 v 米/秒。

这样撤离的全体人员形成一条长为 $n_1 d$ 米的人链。若链首的人是从教室门口出发,则全部人员离开教室的时间为 $n_1 d/v$。又由于第一个人到达教室门口有一个延迟时间,记为 t_0(秒),所以整个教室撤空的时间为 $n_1 d/v+t_0$。此时人链的最后一个人恰好到达教室门口(即图 2.3 中 A 处),这里到出口还有 L_1 长的距离,所以整个撤离时间还应加上 L_1/v,即

$$\frac{L_1}{v}+\frac{n_1 d}{v}+t_0 \tag{2.4}$$

上面我们仅仅考虑一间房子的情形,两间房子会出现什么情况?第二个房间的师生构成的人链链长为 $n_2 d$,人链的第一个人到达教室门口的延迟时间也是 t_0,教室门口(图 2.3 中 B 处)到出口的走廊长为 L_1+L_2,第二个教室全体人员撤离时所需时间为

$$\frac{L_1+L_2}{v}+\frac{n_2 d}{v}+t_0 \tag{2.5}$$

再仔细推敲一番可以发觉上述分析过程有一个欠缺之处,即没有考虑两条"人链"在走廊上的冲突问题。一般而言,教室外的通道是足以让两列队伍并行通过,但为避免出现混乱,我们假定只能允许一列队伍通过。规定在第一个教室的师生撤离过程中,第二个教室的师生需要等待时要等在一旁。

注意到第一条"人链"链尾到达 A 处所需时间为 $t_0+n_1 d/v$,而第二条"人链"链首到达 A 处所需时间为 t_0+L_2/v,因此当

$$t_0+\frac{n_1 d}{v}>t_0+\frac{L_2}{v}$$

即

$$n_1>\frac{L_2}{d} \tag{2.6}$$

第二个教室的师生必须等待,从而全体人员撤离出口所花费时间为

$$t_0+\frac{n_1 d}{v}+\frac{L_1}{v}+\frac{n_2 d}{v}=t_0+\frac{(n_1+n_2)d}{v}+\frac{L_1}{v} \tag{2.7}$$

当 $n_1 \leqslant \frac{L_2}{d}$(即第一个教室学生人数少)时,第二个教室的师生则无需等待。特别当 $n_1=L_2/d$,两条队伍撤离既无需等待,也没有间歇时间。全体师生撤离的时间由 式(2.5) 给出:

$$t_0+\frac{n_2 d}{v}+\frac{L_1+L_2}{v}$$

取 $L_1=10$ 米,$L_2=12$ 米,$v=2$ 米/秒,$t_0=3$ 秒,$d=1$ 米,代入 $n_1=L_2/d$ 得 $n_1=12$,即第一间教室人数不超过 13 人时,第二个教室的师生不需等待。又设第二间教室有 31 人,即 $n_2=30$,则全体师生撤离时间为:

$$t_0+\frac{n_2 d}{v}+\frac{L_1+L_2}{v}=3+30\times\frac{1}{2}+(10+12)\times\frac{1}{2}=29(\text{秒})$$

思考:

(1)在上述分析中仅仅考虑到两个房间,你能否推算出图 2.3 中所有四个房间的情形?

(2)不妨假定过道足够宽,两列队伍可以同时进出。若给出 $L_1=12$ 米,$L_2=15$ 米,$n_1=20$,$n_2=30$,会得到什么结果?

(3)你认为上述的分析是否合理，得到的模型是否完善？你能否对其做一些改进和提高？

例 2.2.4　常染色体隐性病模型

现在世界上已经发现的遗传病将近4000种。在一般情况下，遗传病是与特殊的种族、部落及群体有关。例如，遗传病库利氏贫血症的患者以居住在地中海岸为多，镰状网性贫血症一般流行在黑人中，家庭黑蒙性白痴症则在东欧犹太人中间流行。患者经常未到成年就痛苦地死去，而他们的父母则是疾病的病源。我们能否尽量减少悲剧的发生？

问题描述：无论是人，还是动、植物都会将本身的特征遗传给下一代。在常染色体遗传中，后代是从双亲的基因对中各继承一个基因，形成自己的基因对（又称基因型），基因对确定了后代所表现的遗传特性。如果用 A 表示常染色体遗传的正常基因，a 表示遗传的不正常基因，则 AA，Aa，aa 分别是正常人、隐性患者，显性患者的基因型。

能否控制或降低遗传病的发病率？应该采取什么措施？

问题分析：表 2.3 列出父母的基因型配对对后代基因型的影响。

表 2.3

父母的基因型	$AA-AA$	$aa-aa$	$aa-AA$	$aa-Aa$	$Aa-AA$	$Aa-Aa$
后代的基因型	AA	aa	Aa	aa，Aa	Aa，AA	AA，Aa，aa

从表 2.3 可见显性患者的后代不可能是正常人；两个隐性患者结合，他们的后代仍可能是显性患者；而隐性患者与正常人结合，其后代或是正常人或是隐性患者。隐性患者虽然带有不正常的基因，却不会出现显牲特性，不会受到疾病的折磨。

为降低遗传疾病的发病率，并使每个儿童至少有一个正常的父亲或母亲，可作以下规定：

a. 正常人不能与显性患者结合；

b. 隐性患者必须与正常人结合。

在这种控制结合的情况下，考虑后代中隐性患者的分布情况。

设 a_n，b_n 分别表示第 n 代中基因型为 AA，Aa 的人数占总人数的百分数，记

$$x^{(n)}=\begin{bmatrix}a_n\\ b_n\end{bmatrix},n=1,2,\cdots$$

父母的基因型确定下一代基因型的概率分布如表 2.4。

表 2.4

		父母的基因型	
		$AA-AA$	$AA-Aa$
后代基因型	AA	1	$\frac{1}{2}$
	Aa	0	$\frac{1}{2}$