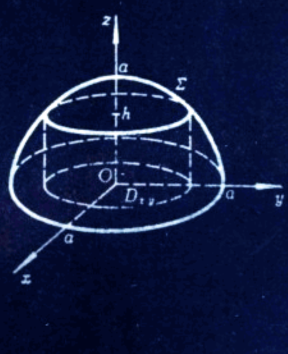
高等数学

（上）

吴德佺　编著



北京工业大学出版社

序　言

这本书的形成经过了35年。它的编写者在北京大学毕业的次年遇上了58年的教学改革运动。这改革的精神促使他有心于教学工作，并有志于研究所任课程的教材内容与教学方法的改革。他在这几十年的教学生涯中一直担任着讲授物理类各个系与各个专业的《高等数学》这门课程，使用了多种教材，阅读了许多文献，编印了多次讲义，并在1981年和1986年两次大量铅印了本书的前身。这些铅印本曾在十多所理工科学校中被用作教本，在四十多所大专院校中被图书馆和数学系资料室用作参考书，得到广泛的好评与鼓励。这便促成了这本书的加工出版，以便得到更广泛的修改意见，有益于我们共同关心的教学改革。

本书的体系紧扣着这样一个主题：高等数学是微积分及其在实际应用中的发展。本书简要地阐述了认识的实际过程，突出基本、突出重点、指出关键，旨在培养学生分析问题、解决问题的能力。为此，本书把基本初等函数的连续性作为基本出发点，从这些函数在解析几何中的图形的直观连续性（连续不断），通过坐标的变化得到它们的连续性的数量表示（$\varepsilon—X$，$\varepsilon—\delta$），从而达到一般函数的连续性的数量表示以及一般的函数极限的概念。因此整本书的理论阐述能够图形与数量相结合、直观与逻辑相一致，便于引导学生思维、启发学生自学。于是它可以在形式一样或本质相同的地方从简从略，可以把简易推理或简单计算或类似概念留给学生自做，甚至告诉学生有些东西可以只“写在脑子里”。它甚至可以在每段理论阐述中留下“思考题”，要求学生在概念思维上“照猫画虎”，自教自学。所以这本书用作教材适合于充分发挥教师与学生双方的主动积极性：教学结合着自学，心心相印地讲授。

致　学　生

我们每一个人都已经学过许多东西，其中能够熟练套用的固然不少，但能够灵活运用的只是一小部分带有自己心得体会的——而这正是源于自教自学。因此，我们今天准备将来实用于工作的学习应当注重自立自学，以求获得尽可能多的能灵活运用的东西。所以，我们今后的学习应当尽量利用教师的教学机会，发挥自己的自学能力，认真用心听课（要警惕那种听课不专心甚至左右私语的行为，它减少自己的学习机会，甚至有损同学的学习，也不尊重教师的工作）。

因此要在听课之前用心预习要听的内容，以便听课时抓紧那些不懂的地方，细听那些难懂的地方，并在那些已懂的地方更多地听出教师的心声。要在听课之后用心复习所听的内容，首先全面回忆，新懂处多问为什么，关键处追问究竟为什么；然后反复思考，把它们从概念上清理简化成一个整体，把它与前阶段所学的衔接起来理解牢记——务求真懂。要在复习之后用心做习题，首先观察各个题目的意图（要考你什么），明确有关的概念，确定可用的方法，针对那些无把握的题目进行再复习；然后逐题草稿，琢磨修改；最后正式抄写，查阅一遍，当记的记（概念的基本性质、计算的基本方法、分析推理的方式、典型问题的解法、容易失误的要点）——务求真会。

重要的是，在每一个学习阶段之末，安排时间专心致志地进行总结，把所学过的提高到理论上来认识，通过笔记、习题、考卷（这些是你自己写的宝贵教材）来透视你学习的得失，写出你的心得体会，旨在较多较牢地掌握你真懂、真会的东西。你这样用心学习整个学科，便牢固地掌握到一大批东西；而如果你平时有心广泛学习，就还能通过阅读和谈话得到一些特别深刻的印象；这两方面汇合起来就在你的心目中形成一本抽象的书，这是你将

来考虑有关这门学科的问题时会下意识地直接引用的“心经”。你的这本心得书反映着你长时间勤学勤练的功夫，它会在你要用它解决有关这门学科的问题时向你保证：功夫不负有心人。

致　教　师

我们每一个教师都希望把自己的真功夫如何通过自学得来的方法传授给学生，他们是中学生出身，具有一定的自学能力（甚至有某些独立工作的能力，也即将毕业工作）；所以我们的教学工作的本性就是要充分发挥学生的积极性，通过自学——讲授，促成他们高效率地掌握这门基础学科的基本功夫。因此教师讲课可以不讲学生预习教材时字面上能懂的东西，而致力于阐述如何在字里行间进行：分析推理、提取概念、抓住重点、紧扣关键。还可以结合思考题、习题、考卷（这些是学生自己的辅助教材），教师谈谈自己是如何“自学”这些辅助教材的，使每个学生听起来亲切体会到，如同运动员用心看教练员示范动作理解到如何使用体力一样，自己用心听课也能理解到如何使用脑力——达到真懂。

这样，教师可以通过交流自学经验开发学生的脑力，不仅懂得新学知识，还逐渐熟悉这门学科的思维方式，从而建立师生之间的共同语言，它象征着你的教学初步达到教师开门、学生入门。于是你可以在课堂上交待一个问题，之后施展你的教学功夫，如像被这个问题催眠了似地，使用语言、姿势、文字、符号，尽情展现你的思维活动，使得你的学生下意识地跟着你使用脑力向这个问题进攻，你的分析问题解决问题的观点方法都历历在目，心领神会——达到真会。在每一个教学阶段之末，教师用心组织阶段复习、考试、总结，致使师生更加心心相通，学生加倍闻一知十——达到真正掌握。

随着学生能力的增长，教材需要讲授的内容日益减少，学生需要自学的时间日益增多，教师可以相应地减少课上讲授，加强

课下指导，提倡互观作业，互教互学，并在课上进行讨论总结，集中每个人的智慧，用以提高每个人的能力，犹如灌苗促长。师生在以后的学习和工作中都会不时回忆到这门课程的教学情景，在见面机会中互通心得体会，共忆当年师生之情，互学互勉：一时师生，永远师友。我们教师总是在自己的工作岗位上致力做到：能力以内，尽力而为，问心无愧。

冷生明

一九九三年九月十二日于北京大学

前　言

本书是在1981年编写的高等数学讲义的基础上，经修改和配备习题而成的，讲义是根据作者在北京大学高等数学教研室二十年的数学实践与改革经验写成的，曾在北京大学、北京计算机学院等校试用多遍，现在结合使用经验作了修改。

本书分两册，上册讲一元微积分与空间解析几何，内容包括函数、极限、函数的连续性、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分、空间解析几何等八章；下册内容包括多元微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、矢量分析、无穷级数、广义积分与含参变量的积分、富里埃级数、微分方程等八章。章次的安排考虑了与物理等课程的配合。空间解析几何放在上册，是为了便于第一学期上线性代数课的需要。

高等数学是理工科的一门重要基础课，它不仅要使学生掌握高等数学的内容和方法，而且要根据不同专业的要求，培养学生的抽象思维与逻辑推理的能力。为了提高教学的效果，作者根据多年的教学实践和改革经验，并吸取其它教材的优点，对高等数学的内容与教学方法进行了一些改革与试验。在编写本教材时力求突出基本，突出重点，注意删去一些不重要的甚至无多大用处的内容。教材与教学一样，要注意实行启发式，努力培养学生的自学能力和分析问题、解决问题的能力。为便于自学，本书力求写得通俗易懂、简明扼要，更便于课前自学；对于难懂的内容，如极限概念等，则特别注意利用几何直观，由线入深地加以阐述；对于类似的问题和需要学生进一步理解的概念，则列为思考题或习题，让读者自己思考、解决，以培养学生的自学能力和分析问题、

解决问题的能力，为补充本教材之不足和针对部分学生深入学习的需要，可选定一本较深且较好的教材（一般选数学专业的数学分析）作为学生课后自学的参考书。

本书写作过程中，一直得到了我的老师与老同事——北京大学冷生明教授的全力支持与热情帮助，他认真仔细地审阅了本书的初稿——讲义，并提出了详细而宝贵的修改意见。另外，在北京大学的老同事邵士敏、戴中维、文丽、蒋定华、邵玉芳、范培华、庄大蔚、叶抗生、李树芳和清华大学范景媛等同事们以及北京计算机学院的同事们都为本书提供了宝贵的修改意见与支持。本书还分别吸取了同济大学数学教研室、叶抗生所编的《高等数学习题集》中的许多习题，作者在此一并致谢。

由于作者水平有很，书中不当和错误难免，诚恳希望读者批评指出

吴德佺

一九九三年十月于北京

目　　录

第一章 函　　数

数学是研究现实世界的空间形式与数量关系的一门科学，它是研究自然科学与许多技术科学的基础. 初等数学研究的量主要是常量；而高等数学则主要研究变量，是变量的数学.

微积分或数学分析是研究变量变化的一门科学，它所研究的对象是反映事物运动、变化过程中变量间相互依赖关系的函数. 由于函数是微积分研究的对象，所以在学习微积分时，首先要复习函数这个概念，并结合函数图形了解各种初等函数的一些基本性质，并进一步掌握简单初等函数的作图法，这对今后学习与加强数形结合都是很有益的.

§1　绝　对　值

在本课程中，如无特别声明，数都是指的实数. 大家知道，实数分有理数和无理数两大类. 有理数包括所有的正、负分数和零. 除有理数外其余实数都是无理数，如 $\sqrt{2}$，$1+\sqrt{2}$，圆周率 π 等. 另外，有理数可以用有限小数或循环小数表示，如 $\frac{1}{2}=0.5$，$\frac{1}{3}=0.\dot{3}$，反之也对；但无理数只能用非循环的无限小数表示，如 $\pi=3.14159\cdots$，$\sqrt{2}=1.414\cdots$.

我们知道实数可以用数轴上的点来表示. 满足不等式 $a\leqslant x\leqslant b$ 的所有实数 x，称为以 a、b 为端点的闭区间，记为 $[a,b]$ 或 $x\in[a,b]$，"$\in$"读作"属于"，它们在数轴上表示一段直线. 满足不等式 $a<x<b$ 的所有实数 x，称为以 a、b 为端点的开区间，记为

(a,b). 左闭右开区间$[a,b)$表示满足不等式 $a\leqslant x<b$ 的所有实数 x. $(a,b]$作类似定义. $(-\infty,a]$、$(-\infty,a)$分别表示满足不等式

$$-\infty<x\leqslant a$$

与

$$-\infty<x<a$$

的所有实数 x, $[a,+\infty)$等类似定义. $(-\infty,+\infty)$表示全体实数.

练习题

用不等式表示下列区间(口答):

$$(-1,2),(-5,6],[3,5),[1,+\infty),(-\infty,0).$$

一个实数 a 的绝对值,记为$|a|$. 根据绝对值的定义,

$$|a|=\begin{cases}a & \text{当 } a\geqslant 0 \text{ 时}\\ -a & \text{当 } a<0 \text{ 时}\end{cases}$$

可知$|a|\geqslant 0$. 绝对值还有如下性质:

(1) $|ab|=|a||b|$.

(2) $\left|\dfrac{a}{b}\right|=\dfrac{|a|}{|b|}$.

(3) $|a|\geqslant\pm a$,即$-|a|\leqslant a\leqslant|a|$.

(4) 若$|a|<r$,则$-r<a<r$. 反过来也对.

若$|a|>r(r\geqslant 0)$,则 $a>r$ 或 $a<-r$. 反过来也对.

(5) 若$|x-a|<r$,则 x 满足不等式

$a-r<x<a+r$. 反过来也对.

若$|x-a|>r(r\geqslant 0)$,则 x 满足不等式

$x>a+r$ 或 $x<a-r$. 反过来也对.

(6) $|a\pm b|\leqslant|a|+|b|$ (三角不等式).

性质 1)—3) 是中学代数中已经学过的. 性质 4)由定义易证,性质 5)可由 4)推出,请读者自己证明,在这里,我们只讲从几何上怎样来理解 4)与 5). 我们知道,$|a|$在数轴上表示坐标为 a 的点 A 到原点的距离(如图 1.1),$|a-b|$则表示坐标分别为 a、b 的点 A、B 间的距离(图 1.2). 由此,从几何上来看性质 4)5)是很

容易理解的，如$|a|<r$表示坐标为a的点A到原点的距离小于r，那末在数轴上，点A必落在坐标为$-r$与r的两点之间，由此，显然有$-r<a<r$，反过来也对. 性质 6)从几何上看也是可以的(请读者自己看). 我们用推理证明之：

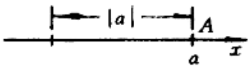


图 1.1

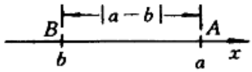


图 1.2

证明 由性质(3)知

$$-|a|\leqslant a\leqslant |a|,$$
$$-|b|\leqslant b\leqslant |b|.$$

两不等式相加得

$$-(|a|+|b|)\leqslant a+b\leqslant |a|+|b|,$$

再由性质(4)得

$$|a+b|\leqslant |a|+|b|.$$

又

$$|a-b|=|a+(-b)|\leqslant |a|+|-b|=|a|+|b|.$$

故

$$|a\pm b|\leqslant |a|+|b|.$$

思考题

1. 证明 $|a\pm b|\geqslant |a|-|b|$.
2. $-a$一定是负数吗？$\sqrt{a^2}=a$对吗？为什么？

§2 函 数

一、常量与变量

在生产或科学实验过程中，总会涉及各种不同的量，如长度、面积、体积、重量、压力、温度、电压、电流等等. 这些量在所

考虑的问题或过程中，有一些量大小不变，这种量称为常量；有一些量大小变化，这种可取不同值的变化的量，称为变量. 常量与变量的概念或例子大家是熟知的，这里不多说了. 但是，需要强调和提请大家注意的是：一个量是常量还是变量，必须根据具体问题与具体条件来分析，而且要辩证地看，即变是绝对的，不变是相对的、有条件的、暂时的. 例如火车行驶时的速度，在开始阶段或刹车阶段，是变化的，因而在该过程中是变量；在正常行驶阶段，变化很小，其速度相对地可看作为不变，因而是常量. 又如重力加速度 g，严格说来，在离地心距离不同的地点是不同的，因而 g 应该是变量；但当精确度要求不高时，或离地心的距离变化甚小时，在地面附近的重力加速度可看作一样大（9.8 米/秒^2），即相对地可看成常量；又如直流电压 $V=2$ 伏，它不随时间变化，因而是常量，但是，实际中直流电压也是随时间变化的，只是变化相对很小，可以忽略不计. 由此看出，一个量是常量不是变量，总是与所考虑的具体问题、具体条件有关，它们不是绝对的. 总之，变是绝对的，不变是相对的，常量是变量的特殊情形.

在数学上，常抽去量的物理意义，只考虑其数值，常量、变量在数学上的反映就是常数、变数。在给定的问题中，取不同数值的数，叫变数，否则叫常数。在数学中，一般用拉丁字母表前面的字母 a、b、c 等表示常数，用末尾的字母 s、t、u、v、w、x、y、z 等表示变数。

初等数学主要研究常量，高等数学主要研究变量，因此，恩格斯把高等数学称之为变量数学。

二、 函数的概念

“每一事物的运动都和它的周围其它事物互相联系着和互相影响着.”这个客观规律反映在数量关系上，就是同一过程中各个变量之间的互相联系和互相依赖，函数关系就是这种关系中最常见的、最基本的一种. 函数概念在中学里虽然学过. 但还需要进

一步加深与提高．为此，我们先看一些例子：

例1 半径为 r 的圆，其面积 s 与半径 r 的关系为

$$s = \pi r^2 \tag{1}$$

按照此公式可以计算出各种半径的圆的面积．

例2 在重力作用下，某自由落体从离地面高 H 米处落下，其下落距离（即落程）s 与时间 t 满足下面的公式：

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \tag{2}$$

其中 $g=9.8$ 米/秒^2 是重力加速度．

例3 圆内接正 n 边形的面积

$$s_n = \frac{1}{2}nr^2\sin\frac{2\pi}{n} \tag{3}$$

其中 r 是圆的半径，n 是内接正多边形的边数．

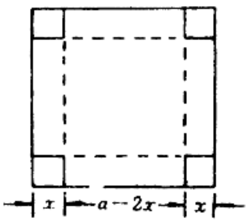


图 1.3

例4 有一块边长为 a 的正方形铁板，把四个角都截去一个正方形，可做成一个无盖的盒子．设截去的小正方形边长为 x，那么盒子的高为 x，底面的边长为 $a-2x$，盒子的体积就是

$$V = x(a-2x)^2 \tag{4}$$

截去的小正方形的边长 x 不同，盒子的体积也不同．

这样的例子是很多的，在这些例子中尽管实际内容很不一样，但有两点是共同的：

（1） 这些问题中都有两个变数，如公式（1）中的 s、r，（2）中的 s、t，（3）中的 s_n、n，（4）中的 V、x．

（2） 这两个变数间存在依赖关系：一个变数随另一个变数按一定的规律变化，而且当一个变数取定一个值时，另一个变数就

按一定规律随之取一个对应的值.

把这种变数之间的关系抽象化，就得到了函数的概念. 变数的取值的范围叫变域.

定义 设在一个过程中有两个量 x 与 y，其中 y 的值随 x 的值而变化，而且对于 x 的变域 D 中的每一个值，都按照一定的规律对应着 y 的一个确定的值，则称变量 y 是变量 x 的一个（单值）函数. 若以 f 表示这个对应规律，则记为

$$y=f(x)$$

并称 x 为自变量，y 为因变量. 称自变量的变域 D 为函数的定义域，称因变量的变域为函数的值域.

为了深刻理解函数概念与符号 $f(x)$，我们强调几点：

1）$f(x)$是函数的一个记号，不能误解为 $f\cdot x$，这正如 $\sin x$ 不能理解为 sin 乘以 x 一样. $f(a)$或 $y|_{x=a}$表示函数 $y=f(x)$在 $x=a$ 时对应的函数值. 如例 2 中，$f(t)=\frac{1}{2}gt^2$，$f(1)=\frac{1}{2}g$，$f(2)=2$.

2）函数概念中有二要素：函数关系与定义域. $f(x)$中的 f 代表 x 到 y 的对应关系，称为函数关系. 两个函数中函数关系与定义域二者有一不同，就表示函数不同，如 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}$ 与 $\varphi(x)=x+1$，前者在 $x\neq1$ 时有定义，且 $f(x)=\frac{x^2-1}{x-1}=x+1$，但后者定义域为$(-\infty,+\infty)$，因此，定义域不同，函数也不同. 又如 $y=\sin x\left(-\frac{\pi}{2}\leqslant x\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ 与 $y=\sin x$ 也一样. 在同时出现几个函数时，不同的函数应该用不同的记号，如 $y=f(x)$，$y=g(x)$，….

确定函数的定义域的原则一般是：

（1）根据问题的实际意义具体确定. 如例 1，定义域 $D=(0,+\infty)$；例 2 中，定义域 $D=\left[0,\sqrt{\frac{2H}{g}}\right]$；例 3 中，$D$ 为大于等于 3