普通高等教育"十一五"国家级规划教材

高等数学模块化系列教材

总主编　俞瑞钊

应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

◆单一峰　周　念　阳　军　编写

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

总主编　俞瑞钊

应用数学基础

YINGYONG SHUXUE JICHU

◆单一峰 周 念 阳 军 编写

ZHEJIANG UNIVERSITY PRESS
浙江大学出版社

图书在版编目（CIP）数据

应用数学基础 / 单一峰，周念，阳军编. —杭州：浙江大学出版社，2007.12
（高等数学模块化系列教材/俞瑞钊主编）
普通高等教育“十一五”国家级规划教材
ISBN 978-7-308-05624-3

Ⅰ.应… Ⅱ.①单…②周…③阳… Ⅲ.应用数学—高等学校—教材 Ⅳ.029

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 167089 号

应用数学基础

单一峰　周　念　阳　军　编写

责任编辑　李玲如
封面设计　刘依群
出版发行　浙江大学出版社
（杭州天目山路 148 号　邮政编码 310028）
（E-mail：zupress@mail.hz.zj.cn）
（网址：http://www.zjupress.com
http://www.press.zju.edu.cn）
排　　版　浙江大学出版社电脑排版中心
印　　刷　浙江中恒世纪印务有限公司
开　　本　787mm×960mm　1/16
印　　张　11.25
字　　数　196 千
版 印 次　2007 年 12 月第 1 版　2007 年 12 月第 1 次印刷
书　　号　ISBN 978-7-308-05624-3
定　　价　17.00 元

内容简介

本书是“高等数学模块化系列教材”之一，适合于高职类本科经济管理、理工类各专业的公共课教材，也可以作为专升本的复习资料。

本书共分为六章：第 1 章　向量与空间解析几何；第 2 章　二元函数微分学；第 3 章　二元函数积分学；第 4 章　微分方程；第 5 章　无穷级数；第 6 章　矩阵的特征值和特征向量。书中小字部分为补充内容，供学生自学之用；每节后面都有练习题，每章后面附有复习题，帮助学生复习巩固所学知识。此外，本书最后附有数学试验（介绍 MATLAB 的一些基本应用）和习题参考答案。

本书第 1 章、第 6 章由周念编写，第 2 章、第 3 章、第 4 章由单一峰编写，第 5 章由阳军编写。

高等数学模块化系列教材编委会

前　言

中国高等教育在“十一五”期间的一个主题是走向内涵发展的道路。对每个高等职业技术学院来讲，最重要的任务除了要建设一支具有相当水平的师资队伍，要构建一个对人才培养必须具备的高效的产学研结合体系之外，就是要有一个与高职定位相吻合的高等职业技术课程体系。这其中，基础课，特别是数学课是我们不可能回避、又是极为重要的课程。

由高等教育的精英阶段发展起来的高等专科学校，数学课遵循的是“必需、够用”的原则。当时，数学基本上就是“微积分”、“线性代数”、“概率论与数理统计”三门课，学时也都在150～200学时之间，内容基础上是本科生内容的简化。当高等教育进入大众化阶段后，高等职业技术学院的定位发生了很大变化，学生生源发生了很大变化。我们培养的人才是社会上各类岗位的技能型、应用型人才，而学生的数学基础明显薄弱，单凭主观想象和判断来对数学内容进行取舍就会遇到许多矛盾。因此，数学课的改革便成为高职教育的重要课题。

“必需、够用”在这种新形势下如何赋予新的内涵，并在此方针下进行数学课的改革是非常重要的。我们以为“必需、够用”不能以数学自身的学科系统来衡量，不能由数学教师的爱好来决定，也不能由学校统一规定课程的学时和内容。“必需、够用”要由每个专业的职业岗位需求来决定，要由每个专业的专业要求来决定，要由学生的实际基础来决定。为此，近几年来，我们进行了数学课的实用化、小型化、模块化的改革探索。这套系列教材便是这种改革的阶段性成果。

本系列教材将高等数学分为5个小型化模块，分别为：《微积分》、《矩阵方法》、《概率与统计方法》、《集合初步》和《图的方法》。除了《微积分》为36学时外，其他课程均为18学时。前三门课程提供给任一专业选择，后两门课主要是

为大量的信息类专业选择。为了满足有兴趣并需要提高的学生的要求，我们又组织编写了《应用数学基础》，内容包括多元微积分、微分方程、矩阵特征值与特征向量、矢量代数和空间解析几何、无穷级数等。

本系列教材具有以下鲜明特点：

1. 注重实用性

系列教材力求从实际问题出发，从学生容易理解的角度自然地、直观地引入数学概念和定义，淡化数学严密的理论体系，突出培养学生的知识应用能力；并借助于常用数学软件训练学生的实际动手操作能力，注重数学作为工具的实用性。

2. 小型化、模块化，兼顾包容性和可选择性

我们根据高职院校对数学知识的要求，对数学课内容进行重组，总共设立了5个模块。各专业可根据自己的专业特点和相应职业岗位的需求选择不同的模块进行教学，把“必需、够用”的尺度掌握在各专业自己手中，更好的发挥数学知识为专业服务的功能。同时，每本教材都精选了大量例题，涵盖几何学、经济学、力学、工程学和电学等方面，任课教师可根据专业需要和学生基础选讲其中的合适例题，真正做到因材施教。

3. 注重学生逻辑思维能力的培养

通过数学课如何培养学生的逻辑思维能力仍是一项重要任务。根据高职教育的特点，我们着重直观地讲解推理过程，尽量少用抽象的严格的逻辑，同时通过对学生学习过程中常见错误的纠正，培养学生正确的逻辑思维方法。

如何选择数学课的内容，如何让学生对数学产生兴趣，并让学生掌握今后工作和学习需要的数学知识和抽象思维能力，都需要我们通过实践不断改进和提高。由于改革和探索的时间较短，加上水平的限制，书中定有许多不足甚至错误之处，敬请老师和同学们不吝赐教。

编　者

2007年5月

目　录

第1章　向量与空间解析几何

学习多元函数微积分的知识，必须以空间解析几何的基本知识为基础. 空间解析几何是平面解析几何的直接推广，同样也是用代数的方法来研究的几何学.

在自然科学和工程技术中，我们经常遇到既有大小又有方向的量，即向量. 向量也是解决许多数学、物理问题的有力工具，也极大地简化了空间解析几何的推理和运算. 本章将介绍如何在空间直角坐标系中，建立向量的坐标表示式，用代数方法讨论向量的运算以及空间解析几何的有关内容.

1.1　空间直角坐标系与向量的概念

1.1.1　空间直角坐标系

在空间取三条相互垂直且相交于一公共交点的数轴（单位一般相同），公共交点 O 称为坐标原点，三条数轴分别叫做数轴 x 轴（横轴）、y 轴（纵轴）和 z 轴（竖轴），统称为坐标轴. 各轴的方向按右手系确定：右手握住 z 轴，当右手的四个手指从 x 轴的正向转向 y 轴正向时，大拇指指向 z 轴的正向，如图 1-1 所示，这样就构成了一个空间直角坐标系.

每两条坐标轴确定一个平面，称为坐标面，分别叫做 xOy 平面，yOz 平面和 zOx 平面. 这三个平面把空间分成八个部分，每一部分称为一个卦限. 以 x 轴、y 轴、z 轴的正半轴为棱的卦限称为第Ⅰ卦限，在 xOy 平面上方的其他三个卦限按逆时针方向依次为第Ⅱ、Ⅲ、Ⅳ卦限，在 xOy 平面下方与第Ⅰ卦限相对的为第Ⅴ卦限，其他按逆时针方向依次为第Ⅵ、Ⅶ、Ⅷ卦限，如图 1-2 所示.

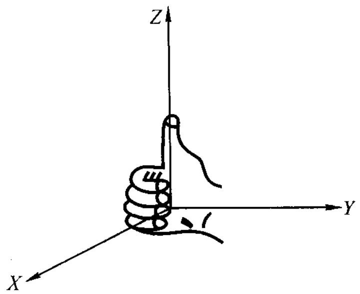

图 1-1

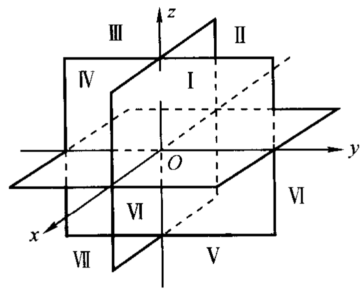

图 1-2

设点 M 是空间的一点，过点 M 分别作与三条坐标轴垂直的平面，分别交 x 轴、y 轴和 z 轴于点 P,Q,R. 点 P,Q,R 叫做点 M 在坐标轴上的投影，如图 1-3 所示. 设 P,Q,R 点在三条坐标轴上的坐标依次为 x,y,z，于是点 M 唯一地确定有序数组 (x,y,z).

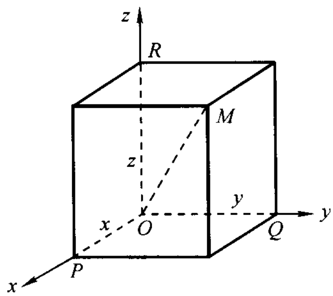

图 1-3

反之，给定有序数组 (x,y,z)，总能在三条坐标轴上找到以 x,y,z 为坐标的点 P,Q,R. 过这三点分别作垂直于三条坐标轴的平面，三个平面必然交于点 M.

于是，空间任意一点 M 和一个三元有序数组 (x,y,z) 之间存在着一一对应的关系. 有序数组 (x,y,z) 称为点 M 的坐标，可记作 $M(x,y,z)$.

特别地，坐标原点 O 的坐标为 $(0,0,0)$. x 轴上点的坐标形式为 $(x,0,0)$，y 轴上点的坐标形式为 $(0,y,0)$，z 轴上点的坐标形式为 $(0,0,z)$.

如果点 M 的坐标为 (x,y,z)，见图 1-3，则 M 点到原点 O 的距离 $|OM|$ 可用勾股定理求出.

$$|OM|=\sqrt{|OR|^2+|RM|^2}=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

想一想：若已知空间两点 A,B 的坐标，怎样计算 A,B 间的距离 $|AB|$？

1.1.2　向量与向量的线性运算

1.1.2.1　向量的概念

在生活中，常会遇见两种不同类型的量：一类是只有大小的量，如长度、面积、体积、质量等，它们叫做数量或标量；另一类量，不仅有大小，而且有方向，如速度、力、位移、加速度等，我们称之为向量或矢量.

几何上，常用有向线段来表示向量. 有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向，有向线段的起点和终点又可分别叫做向量的起点和终点. 以点 A 为起点、B 为终点的向量记作$\overrightarrow{AB}$，见图(1-4). 向量也常用黑体小写字母表示，如 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$，$\boldsymbol{c}$ 等. 书写时，常在字母上方标上箭头来表示，如$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$等.

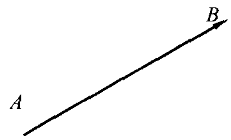

图 1-4

向量的大小(长度)又称为向量的模，记作$|\boldsymbol{a}|$，$|\overrightarrow{AB}|$等. 模为 1 的向量叫做单位向量. 模为零的向量叫做零向量，记作 0，规定零向量的方向可以是任意的. 若两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的方向相同或相反，则称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记作 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$. 由于零向量的方向可以是任意的，因此可以认为零向量与任何向量都平行. 由于平行的向量经平移后，能放置在同一条直线上，所以平行向量又称为共线向量.

由于向量是由大小与方向所确定的. 因此，只要两个向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 的大小相同，方向一致，就称向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 相等，记作 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$. 向量相等的概念，是在不考虑向量的起点在何处的前提下给出的，即一个向量可以在空间任意地平行移动，这种向量称为自由向量. 本书除了另有说明外，讨论的都是自由向量.

1.1.2.2　向量的线性运算

向量的加法，数与向量的乘法统称为向量的线性运算.

1. 向量的加、减法

将向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移到同一点，并以 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 为邻边作平行四边形，则从起点到平行四边形对角顶点的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和向量，记为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OC}$，如图 1-5. 这种求和的方法称为向量加法的平行四边形法则.

也可以把 $\boldsymbol{b}$ 的起点平移到 $\boldsymbol{a}$ 的终点，则从 $\boldsymbol{a}$ 的起点到 $\boldsymbol{b}$ 的终点的向量亦为 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$ 的向量，如图 1-6. 这种求和的方法称为向量加法的三角形法则.

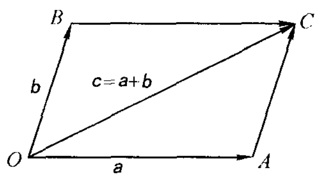

图 1-5

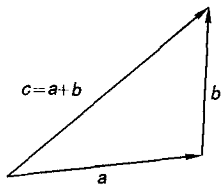

图 1-6

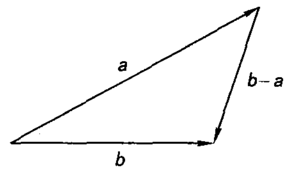

图 1-7

若一个向量的模与向量 $\boldsymbol{b}$ 的模相等，而方向相反，则称此向量为 $\boldsymbol{b}$ 的负向量，记作 $-\boldsymbol{b}$. $\boldsymbol{a}$ 与 $-\boldsymbol{b}$ 的和称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差，记作 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$. 计算可按图 1-7 的方法得到.

2. 向量与数的乘法

数 λ 与向量 $\boldsymbol{a}$ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 是一个平行于 $\boldsymbol{a}$ 的向量，它的模是向量 $\boldsymbol{a}$ 的模的 $|\lambda|$ 倍，即

$$|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$$

规定，当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同；当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反；当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 为零向量.

向量的线性运算有以下运算性质：

(1)交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$

(2)结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$

$\lambda(\mu\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$ （λ,μ 是数）

(3)分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$ （λ,μ 是数）

$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$ （λ 是数）

例 1 已知平行四边形 $ABCD$ 的对角线向量为$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}$，$\overrightarrow{BD}=\boldsymbol{b}$，试用向量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 表示向$\overrightarrow{AB}$和$\overrightarrow{DA}$.

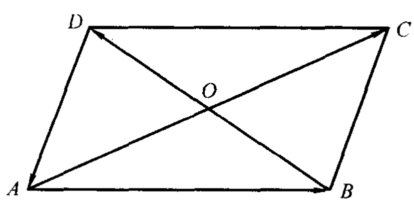

图 1-8

解 设$\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{BD}$的交点 O(图 1-8)，由于平行四边形对角线互相平分，故

$$\overrightarrow{AO}=\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}=\frac{1}{2}\boldsymbol{a} \qquad \overrightarrow{BO}=\overrightarrow{OD}=\frac{1}{2}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{2}\boldsymbol{b}$$

根据三角形法则，有

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AO}-\overrightarrow{BO}=\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}),$$

$$\overrightarrow{DA}=-\overrightarrow{AD}=-(\overrightarrow{AO}+\overrightarrow{OD})=-\frac{1}{2}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})$$

1.1.3 空间向量的坐标表示及运算

1.1.3.1 向量的坐标表示

在空间直角坐标系中，与 x,y,z 轴正向同方向的单位向量分别记为 $\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}$ 称为三条坐标轴的基本单位向量. 设向量 $\mathbf{a}$ 的起点是坐标原点 O，终点为 $M(x,y,z)$，点 M 在 xOy 平面上的投影为 M'. 点 M 在 x,y,z 轴上的投影分别为 P,Q,R，如图 1-9 所示，则点 P 的坐标为 $(x,0,0)$，故 $\overrightarrow{OP}=x\mathbf{i}$；同理 $\overrightarrow{OQ}=y\mathbf{j}$，$\overrightarrow{OR}=z\mathbf{k}$. 由向量加法的三角形法则有

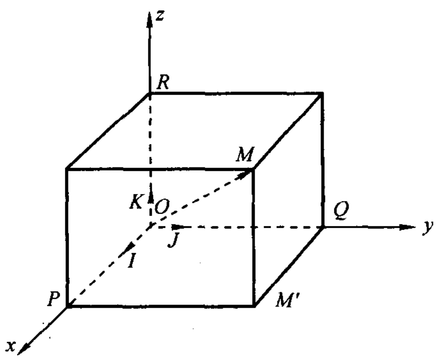

图 1-9

$$\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PM'}+\overrightarrow{M'M}$$

而 $\overrightarrow{PM'}=\overrightarrow{OP}$，　$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OR}$，所以

$$\begin{aligned}\boldsymbol{a}&=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OP}+PM'+\overrightarrow{M'M}\\&=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}\end{aligned}$$

上式叫做向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标表示式，x,y,z 称为向量 $\boldsymbol{a}$ 的坐标分量，也是点 M 的坐标，记作

$$\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

并且，向量也可以用其坐标分量简单的表示为 $\boldsymbol{a}=\{x,y,z\}$ 或 $\boldsymbol{a}=(x,y,z)$.

1.1.3.2 向量 $\boldsymbol{a}-x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ 的模

对于任一向量 $\boldsymbol{a}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$，我们可以将其看为以原点 O 为起点，点 $M(x,y,z)$ 为终点的向量，则 $|\boldsymbol{a}|$ 为点 O 与点 M 之间的距离长度 $|OM|$，如图 1-9，所以

$$|\boldsymbol{a}|=|OM|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

为向量 $\boldsymbol{a}$ 的模.

1.1.3.3 向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$ 的坐标表示

以 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 为起点，$M_2(x_2,y_2,z_2)$ 为终点的向量 $\overrightarrow{M_1M_2}$，如图 1-10 所示，则

$$\overrightarrow{M_1M_2}=\overrightarrow{OM_2}-\overrightarrow{OM_1}$$

因为

$$\overrightarrow{OM_1}=x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$$

$$\overrightarrow{OM_2}=x_2\mathbf{i}+y_2\mathbf{j}+z_2\mathbf{k}$$

于是可以有如下表示：

$$\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$$

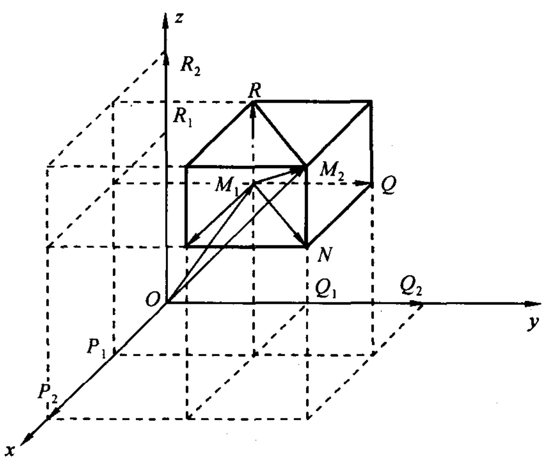

图 1-10

例 2 求表示起点为 $A(2,-4,3)$，终点为 $B(1,-1,4)$ 的向量.

解 设 $\overrightarrow{AB}$ 为向量 $\boldsymbol{a}$，则

$$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}=(1-2)\mathbf{i}+(-1+4)\mathbf{j}+(4-3)\mathbf{k}$$

$$=-\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

也可以简单的记为 $\boldsymbol{a}=(-1,3,1)$.

1.1.3.4　空间两点间的距离

空间点 $M_1(x_1,y_1,z_1)$ 与点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$ 间的距离记为 $|M_1M_2|$，如图 1-10，显然

$$|M_1M_2|=|\overrightarrow{M_1M_2}|$$

又因为 $\overrightarrow{M_1M_2}=(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}+(z_2-z_1)\mathbf{k}$，则

$$|M_1M_2|=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2+(z_2-z_1)^2}$$

例 3　在 y 轴上求与点 $A(1,-3,7)$ 和 $B(5,7,-5)$ 等距离的点.

解　因为所求的点在 y 轴上，故可设它为 $M(0,y,0)$，依题意有

$$|MA|=|MB|$$

$$\sqrt{(1-0)^2+(-3-y)^2+(7-0)^2}=\sqrt{(5-0)^2+(7-y)^2+(5-0)^2}$$

解得　$y=2$

因此，所求的点为 $M(0,2,0)$.

1.1.3.5　坐标表示下的向量运算

设有两个向量 $\boldsymbol{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$，　$\boldsymbol{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$，则有

(1) $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=(a_1+b_1)\mathbf{i}+(a_2+b_2)\mathbf{j}+(a_3+b_3)\mathbf{k}$

(2) $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=(a_1-b_1)\mathbf{i}+(a_2-b_2)\mathbf{j}+(a_3-b_3)\mathbf{k}$

(3) $\lambda\boldsymbol{a}=\lambda a_1\mathbf{i}+\lambda a_2\mathbf{j}+\lambda a_3\mathbf{k}$

(4) $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}\Leftrightarrow a_1=b_1,\quad a_2=b_2,\quad a_3=b_3$

1.1.3.6　向量平行的条件

因为向量 $\boldsymbol{a}$ 与非零向量 $\boldsymbol{b}$ 平行的充要条件为存在数 λ，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

若 $\boldsymbol{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$，　$\boldsymbol{b}=b_1\mathbf{i}+b_2\mathbf{j}+b_3\mathbf{k}$ 相互平行，则存在某个数使得 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$，即

$$a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}=\lambda b_1\mathbf{i}+\lambda b_2\mathbf{j}+\lambda b_3\mathbf{k}$$

所以　$a_1=\lambda b_1,\quad a_2=\lambda b_2,\quad a_3=\lambda b_3$

从而得出　$\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}\Leftrightarrow\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}=\dfrac{a_3}{b_3}$.

(若 b_1,b_2,b_3 中某一个或两个为零，则上式应理解为相应的分子也为零.