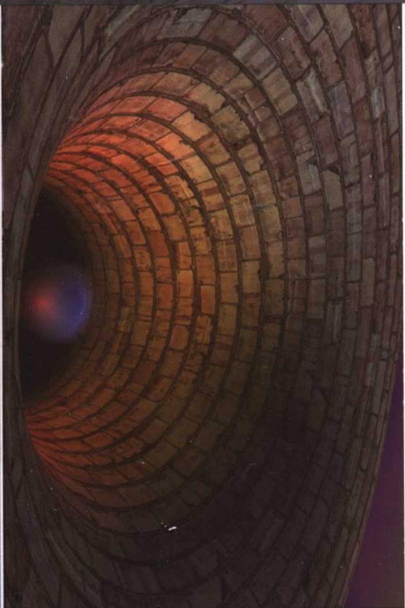
高等工科数学系列课程教材

工科数学分析例题与习题

下册



孙振绮 总主编

孙振绮
丁效华 主 编

机械工业出版社
CHINA MACHINE PRESS

高等工科数学系列课程教材

工科数学分析例题与习题

下册

总主编　孙振绮
主　编　孙振绮　丁效华
副主编　金承日　伊晓东　邹巾英

机 械 工 业 出 版 社

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《工科数学分析教程》（上、下册）（第2版）的配套学习指导书，分上、下两册．上册共9章：实数，数列的极限，函数的极限与连续性，导数及其应用，多元函数微分学，不定积分，定积分，广义积分，定积分的应用．下册共8章：数项级数，函数项级数，常微分方程，重积分，曲线积分与曲面积分，场论，多元函数的极值，傅里叶级数，含参变量的积分．

本书广泛吸取国内外知名大学的教学经验，举有足够数量的例题与练习题，帮助读者对高等数学的基本概念与理论知识深入理解，系统掌握，灵活运用．所有例题与习题均具有典型性、综合性且有一定难度．

本书可作为工科大学本科生的教学参考书或大学生的学习指导书，也可供准备报考工科研究生的人员与工程技术人员参考．

图书在版编目（CIP）数据

工科数学分析例题与习题．下册/孙振绮，丁效华主编
—北京：机械工业出版社，2008.5
（高等工科数学系列课程教材）
ISBN 978-7-111-23794-5

Ⅰ．工…　Ⅱ．①孙…②丁…　Ⅲ．数学分析-高等学校-教学参考资料　Ⅳ．O17

中国版本图书馆CIP数据核字（2008）第040581号

机械工业出版社（北京市百万庄大街22号　邮政编码100037）
策划编辑：郑　玫
责任编辑：韩效杰　版式设计：霍永明　责任校对：程俊巧
封面设计：鞠　杨　责任印制：邓　博
北京京丰印刷厂印刷
2008年5月第1版·第1次印刷
169mm×239mm·11.375印张·441千字
标准书号：ISBN 978-7-111-23794-5
定价：29.00元

前　言

本书是普通高等教育“十一五”国家级规划教材《工科数学分析教程》（上、下册）（第2版）的配套学习指导书．为了适应培养高素质、创新型人才的需要，我们在传统的工科数学分析的内容框架下，增加了现代数学的观点与内容，提高了理论知识平台，加强了分析与代数、几何的相互渗透．

本书编者在多年讲授工科数学分析教程与习题课经验的基础上，吸收国内外知名大学的先进教学经验来编写这套学习指导书，为了巩固所叙述的理论知识，举有足够数量的例题与习题，帮助读者掌握《工科数学分析教程》的基本思想与深入研究解决应用问题的方法，特别重视那些学生学习较困难的概念的阐述，使学生对高等数学的基本概念能深入理解，准确把握；对重点知识能系统掌握，灵活运用．

为了便于学生自学，本书是按照《工科数学分析教程》（第2版）目录顺序编写，所选例题与习题均具有典型性、综合性，并具有一定难度．原则上对《工科数学分析教程》（上、下册）（第2版）中的典型计算题与习题不作收录．

为了帮助考研的学生复习，在每章中都编写了综合题选解与练习．

这里，对哈尔滨工业大学多年来一直支持这项教学改革的领导、专家、教授深表感谢．特别要感谢机械工业出版社的领导及同志们为该书的早日出版所作出的贡献．

本书由孙振绮、丁效华任主编，金承日、伊晓东、邹巾英任副主编，参加本书编写的还有哈尔滨工业大学（威海）数学系孙建邵、李福梅、杨毅、范德军、吴开宁、王雪臣、王黎明、曲荣宁、史磊、宁静、李晓芳、于战华、吕敬亮等．崔明根、刘铁夫、王克、文松龙四位教授分别审阅了本书的各章内容，提出了许多宝贵意见．

由于编者水平有限，缺点、疏漏在所难免，恳请读者批评指正！

编　者

记号与逻辑符号

符　号	表示的意义
$\vee$	或
$\wedge$	和
$\exists$	“存在”或“找到”
$\forall$	“对任何”或“对每一个”
:	使得
$\Leftrightarrow$	等价，充分且必要，当且仅当
$A \to B$	由 A 得到 B
$f:A \to B$	f 是从集合 A 到集合 B 的映射
$\mathbf{N}$	自然数集合
$\mathbf{Z}$	整数集合
$\mathbf{Q}$	有理数集合
$\mathbf{J}$	无理数集合
$\mathbf{R}$	实数集合
$\mathbf{C}$	复数集合
$x \in A$	x 是集合 A 的元素
$A \subset B$	集合 A 是集合 B 的子集
$\sup\limits_{x \in X}\{x\}$	集合 X 的上确界
$\inf\limits_{x \in X}\{x\}$	集合 X 的下确界
$C = A \cup B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的并集
$C = A \cap B$	集合 C 是集合 A 与集合 B 的交集
$x \in A \cup B$	或 $x \in A$ 或 $x \in B$
$x \in A \cap B$	$x \in A$ 且 $x \in B$
$C = A \backslash B$	C 是集合 A 与集合 B 的差集
$x \in A \backslash B$	$x \in A$，但 $x \notin B$（x 不属于 B）
$f \in C([a, b])$	f 属于在 $[a, b]$ 上连续的函数类
$f \in C^1([a, b])$	f 属于在 $[a, b]$ 上具有连续导数的函数类
$f \in R([a, b])$	f 属于在 $[a, b]$ 上黎曼可积的函数类

目　　录

第 10 章　数 项 级 数

10.1　一般概念，正项级数的收敛性判定准则

10.1.1　内容提要

1. 无穷级数的基本概念与性质

设有数列 $u_1, u_2, u_3, \cdots, u_n, \cdots$，其中 $u_n(n=1,2,3,\cdots)$ 是任意常数，我们把表达式

$$u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n \tag{1}$$

叫做**无穷级数**，简称为**级数**，并称 u_n 为级数的**一般项**或**通项**.

但对于任意指定的正整数 n，级数（1）的前 n 项和

$$S_n = u_n + u_n + u_2 + \cdots + u_n \qquad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

都是确定的. 我们把 S_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）叫做级数（1）的前 n 项**部分和**.

定义　如果级数（1）的各部分和所构成的数列

$$S_1, S_2, S_3, \cdots, S_n, \cdots \tag{2}$$

的极限存在，即有

$$\lim_{n\to\infty} S_n = S \tag{3}$$

则称级数（1）是**收敛的**，S 叫级数（1）之和，或说级数（1）收敛于 S，记为 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = S$. 反之，若数列（2）之极限不存在，则称级数（1）是**发散的**.

对于一个无穷级数来说，只有当它收敛时，才能谈到这级数的和. 这时，级数的部分和 S_n 是 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 和 S 的近似值，其误差

$$r_n = S - S_n = u_{n+1} + u_{n+2} + \cdots = \sum_{n+1}^{\infty} u_n \tag{4}$$

称为收敛级数的**余和**或**余项**.

无穷级数有以下诸性质：

性质Ⅰ　若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 收敛，其和为 S，则将它的各项均乘常数 k 所得的级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} ku_n = ku_1 + ku_2 + ku_3 + \cdots + ku_n + \cdots$$

也必是收敛的，且其和为 kS.

性质Ⅱ 设 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots$ 收敛，其和为 S，

$\sum\limits_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots$ 收敛，其和为 T，

则级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(u_n \pm v_n) = (u_1 \pm v_1) + (u_2 \pm v_2) + (u_3 \pm v_3) + \cdots + (u_n \pm v_n) + \cdots$$

也收敛,其和为 $S + T$.

性质Ⅲ 在一个级数的前面增加或减少有限项，并不影响级数的敛散性.

性质Ⅳ 若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，其和为 S，则可以在表达式 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 中，任意将几项合并（加上括号，算做一项），这样得到的新级数仍收敛，其和亦为 S.

性质Ⅴ （收敛级数的必要条件）若 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛，则必有 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.

推论：若 $\lim\limits_{n\to\infty} u_n \neq 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 一定是发散的.

2. 正项级数的审敛法

定义 若 $u_n > 0$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）时，则称 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 为正项级数. 对正项级数，显然有

$$S_1 < S_2 < S_3 < \cdots < S_n \cdots$$

且有如下诸定理（正项级数审敛法）.

定理 1 正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛的必要且充分条件是它的部分和 S_n 有上界.

定理 2 （比较原理）设有两个正项级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_n + \cdots \tag{a}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n = v_1 + v_2 + v_3 + \cdots + v_n + \cdots \tag{b}$$

且有 $u_n \leqslant v_n \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$

当级数（b）收敛时，则必有级数（a）收敛；

当级数（a）发散时，则必有级数（b）发散.

定理 3 （达朗贝尔比值判别法）设有正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 且极限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \rho$$

存在，则当 $\rho < 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；$\rho > 1$ 时 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

定理 4 （柯西根值判别法）设正项级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$，有

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}=\rho$$

存在，则当$\rho<1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$收敛；当$\rho>1$时，级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$发散．

定理5 （积分判别法）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$为正项级数，$f(x)$为定义在$(1,\ +\infty)$上的单调递减连续函数，满足

$$u_n=f(n)\qquad(n=1,2,3,\cdots)$$

则$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\int_1^{+\infty}f(x)\,dx$具有相同的敛散性．

定理6 （比较判别法的极限形式）设$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$是两个正项级数，如果有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=c$$

则当$0<c<+\infty$时，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$敛散性一致；当$c=0$时，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$收敛，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也收敛；当$c=+\infty$时，若$\sum\limits_{n=1}^{\infty}v_n$发散，那么$\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$也发散．

定理7 对于级数（1），若满足$u_n>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$且

$$u_n=O\left(\frac{1}{n^p}\right),n\to\infty$$

则当$p>1$时，级数（1）收敛；当$p\leqslant1$时，级数（1）发散．

定理8 （拉阿伯准则）对于级数（1），若满足$u_n>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$且

$$\lim_{n\to+\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)=p$$

则当$p>1$时收敛，而当$p<1$时发散．当$p=+\infty$时级数（1）收敛．当$p=1$时级数（1）可能收敛，也可能发散，需用其他更细致的判定准则来判别．

定理9 （高斯准则）对于级数（1），若满足$u_n>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$且

$$\frac{u_n}{u_{n+1}}=\lambda+\frac{\mu}{n}+\frac{\theta_n}{n^{1+\varepsilon}},\lambda,\mu\text{ 均为常数}$$

其中$\varepsilon>0$，$|\theta_n|<\varepsilon$，则当$\lambda>1$时级数（1）收敛，而当$\lambda<1$时级数（1）发散．若当$\lambda=1$时，则当$\mu>1$时级数（1）收敛，而当$\mu\leqslant1$时级数（1）发散．

10.1.2 例题选解

例10.1 试证：$\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}+\cdots$收敛，并求和$S$.

证 取 $S_n=\dfrac{1}{1\cdot4}+\dfrac{1}{4\cdot7}+\cdots+\dfrac{1}{(3n-2)(3n+1)}$，并把$S_n$的各项分解为两项之差，得

$$S_n=\frac{1}{3}\left(\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{3n-2}-\frac{1}{3n+1}\right)\right)=\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right).$$

取极限得

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{3n+1}\right)=\frac{1}{3}.$$

例 10.2 求 a) $q\sin\alpha+q^2\sin2\alpha+\cdots+q^n\sin n\alpha+\cdots$;

b) $q\cos\alpha+q^2\cos2\alpha+\cdots+q^n\cos n\alpha+\cdots$; $|q|<1$.

的和.

解 设 $\{u_n\}$ 与 $\{v_n\}$ 分别为级数 a) 与 b) 的部分和序列，利用欧拉公式 $e^{i\varphi}=\cos\varphi+i\sin\varphi$，得

$$u_n+iv_n=qe^{i\alpha}+q^2e^{2i\alpha}+\cdots+q^ne^{in\alpha}=\frac{qe^{i\alpha}-q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}.$$

注意到$|q|<1$，有$|qe^{i\alpha}|<1$，从而由已知公式得

$$\lim_{n\to\infty}(q^{n+1}e^{i(n+1)\alpha})=0.$$

$$u+iv=\lim_{n\to\infty}(u_n+iv_n)=\frac{qe^{i\alpha}}{1-qe^{i\alpha}}$$

$$=q\left(\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2}+i\frac{\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}\right).$$

$$u=q\frac{\cos\alpha-q}{1-2q\cos\alpha+q^2},\ v=\frac{q\sin\alpha}{1-2q\cos\alpha+q^2}.$$

例 10.3 证明：若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 也收敛，且和不变，其中 $A_n=\sum_{i=p_n}^{p_{n+1}-1}a_i$，$p_1=1$，$p_2<p_3<\cdots$，$p_n\in\mathbf{N}$

证 由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛知，它的部分和数列 $\{S_n\}$ 的任意子数列的极限都存在，取

$$a_1=S_{p_1},a_1+a_2+\cdots+a_{p_2-1}=S_{p_2},a_1+a_2+\cdots+a_{p_2-1}+a_{p_2}+\cdots+a_{p_3-1}=S_{p_3},\cdots,a_1+a_2+\cdots+a_{p_{n+1}-1}=S_{p_{n+1}}.$$

则$\lim_{n\to\infty}S_{p_n}=S$. 又因 $A_1+A_2+\cdots+A_n=S_{p_{n+1}}$，故有

$$\lim_{n\to\infty}(A_1+A_2+\cdots+A_n)=S$$ 证毕.

例 10.4 证明：若 $a_n>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$，由级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 的任意项结合得到的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}A_n$ 是收敛的，则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛.

证 设 $\{p_k\}$ 是自然数列的任意子数列，$\{S_n\}$ 与 $\{S_{p_k}\}$ 分别是级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 与

$\sum_{n=1}^{\infty} A_n$ 的部分和数列，则因 $a_n>0$，$\forall n\in\mathbf{N}$ 故有

$$\begin{array}{ll} S_1\leqslant S_n\leqslant S_{p_1} & n,1\leqslant n\leqslant p_1, \\ S_{p_1}\leqslant S_n\leqslant S_{p_2} & n,p_1\leqslant n\leqslant p_2, \\ \vdots & \vdots \\ S_{p_k}\leqslant S_n\leqslant S_{p_{k+1}} & n,p_k\leqslant n\leqslant p_{k+1}. \end{array}$$

取极限，$k\to\infty$，由夹逼定理得

$$\lim_{k\to\infty}S_{p_k}=\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{k\to\infty}S_{p_{k+1}}=S.$$

试研究下列级数的收敛性：

例 10.5　$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\cdots+\frac{1}{2n-1}+\cdots.$

解　显然，这个级数的部分和数列是单调递增的，下面证明 S_{2^n} 无界：由

$$S_{2^1}=S_2=1+\frac{1}{3},S_{2^2}=S_4=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{7},\cdots,$$

$$S_{2^n}=1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}$$

得到估计式

$$1+\frac{1}{3}>1,\frac{1}{5}+\frac{1}{7}>\frac{2}{8}=\frac{1}{4},\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}>\frac{4}{16}=\frac{1}{4},\cdots,$$

$$\frac{1}{2^n+1}+\frac{1}{2^n+3}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}>\frac{2^{n-1}}{2^{n+1}}=\frac{1}{4},$$

因而有

$$S_{2^n}=\left(1+\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{11}+\frac{1}{13}+\frac{1}{15}\right)+\cdots+$$
$$\left(\frac{1}{2^n+1}+\cdots+\frac{1}{2^{n+1}-1}\right)>1+\frac{n-1}{4}.$$

由此知 $\{S_{2^n}\}$ 无界，从而 $\{S_n\}$ 无界，所以已知级数发散.

例 10.6　$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{n\sqrt{n+1}}+\cdots.$

解　考虑级数

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\left(\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}\right)+\left(\frac{1}{4\sqrt{5}}+\frac{1}{5\sqrt{6}}+\frac{1}{6\sqrt{7}}+\frac{1}{7\sqrt{8}}\right)+$$
$$\left(\frac{1}{8\sqrt{9}}+\cdots+\frac{1}{15\sqrt{16}}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}\right)+\cdots,\quad(1)$$

有下列估计式

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}+\frac{1}{3\sqrt{4}}<\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{1}{3\sqrt{3}}<\frac{2}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\frac{1}{4\sqrt{5}}+\cdots+\frac{1}{7\sqrt{8}}<\frac{1}{4\sqrt{4}}+\cdots+\frac{1}{7\sqrt{7}}<\frac{4}{(2\sqrt{2})^2}=\frac{1}{(\sqrt{2})^2},$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{2^n\sqrt{2^n+1}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{(2^n)^{\frac{3}{2}}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^{\frac{3}{2}}}<\frac{1}{(\sqrt{2})^n}.$$

从而得

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{2}}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)\sqrt{2^{n+1}}}<\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{(\sqrt{2})^2}+\cdots+$$
$$\frac{1}{(\sqrt{2})^n}\leqslant\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}-1}.$$

显然 $\{S_n\}$ 单调递增．利用例 10.4 的结论知，已知级数收敛．

例 10.7 $\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}+\cdots$.

解 因

$$S_n=\frac{1}{\sqrt{1\cdot 3}}+\frac{1}{\sqrt{3\cdot 5}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}>\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2n}$$
$$>\frac{1}{2}\left(\ln 2+\ln\frac{3}{2}+\cdots+\ln\frac{n+1}{n}\right)=\frac{1}{2}\ln(n+1),$$

故已知级数发散．

例 10.8 证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}na_n=\alpha\neq 0$，则级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散．

证 由已知条件，$\forall\varepsilon>0$，$0<\varepsilon<|\alpha|$，$\exists n_0\in\mathbf{N}$：$\forall n>n_0$ 与 $\forall p\in\mathbf{N}\to\alpha-\varepsilon<(m+n)a_{m+n}<\alpha+\varepsilon$，$m=1,2,\cdots,p$，或

$$\frac{\alpha-\varepsilon}{m+n}<a_{m+n}<\frac{\alpha+\varepsilon}{m+n}.$$

求得

$$(\alpha-\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}<\sum_{m=1}^{p}a_{m+n}<(\alpha+\varepsilon)\sum_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}.$$

因 $\lim\limits_{p\to+\infty}\sum\limits_{m=1}^{p}\frac{1}{m+n}=+\infty$，故已知级数发散．

利用柯西准则研究下列级数的敛散性．

例 10.9 $\frac{\cos x-\cos 2x}{1}+\frac{\cos 2x-\cos 3x}{2}+\cdots+\frac{\cos nx-\cos(n+1)x}{n}+\cdots$.

解 设 S_n 是已知级数的部分和数列，$\forall\varepsilon>0$，由于对任何 $p>0$ 有

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\cos(n+1)x-\cos(n+2)x}{n+1}+\frac{\cos(n+2)x-\cos(n+3)x}{n+2}+\cdots+\frac{\cos(n+p)x-\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|$$

$$=\left|\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n+2)x}{(n+1)(n+2)}-\frac{\cos(n+3)x}{(n+2)(n+3)}-\cdots-\frac{\cos(n+p)x}{(n+p-1)(n+p)}-\frac{\cos(n+p+1)x}{n+p}\right|\leqslant\frac{1}{n+1}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}+\frac{1}{n+p}<\frac{2}{n}.$$

故可取 $n_0=\left[\frac{2}{\varepsilon}\right]$，使得 $|S_{n+p}-S_n|<\varepsilon$，对任何 $p>0$ 及所有 $n>n_0$ 都成立．由柯西准则知已知级数收敛．

例 10.10 $\frac{\cos x}{1^2}+\frac{\cos x^2}{2^2}+\cdots+\frac{\cos x^n}{n^2}+\cdots$.

解 $\forall\varepsilon>0$，因对任何 $p>0$ 有

$$|S_{n+p}-S_n|=\left|\frac{\cos x^{n+1}}{(n+1)^2}+\frac{\cos x^{n+2}}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{\cos x^{n+p}}{(n+p)^2}\right|\leqslant\frac{1}{(n+1)^2}+\frac{1}{(n+2)^2}+\cdots+\frac{1}{(n+p)^2}<\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}+\cdots+\frac{1}{(n+p-1)(n+p)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+p}<\frac{1}{n}.$$

故可取 $n_0=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]$，由柯西准则知所给级数收敛．

例 10.11 $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}+\cdots$.

解 取 $\varepsilon=\frac{1}{4}$，令 $p=n$，则

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{2n}>n\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}>\varepsilon.$$

从而由柯西准则知已知级数发散．

例 10.12 $1+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\cdots$.

解 考虑已知级数的部分和数列的子数列 $\{S_{6n}\}$，$\{S_{3n}\}$ 作差：

$$S_{6n}-S_{3n}=\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+3}+\cdots+\frac{1}{6n-2}+\frac{1}{6n-1}-\frac{1}{6n},$$

$$S_{6n}-S_{3n}>\frac{1}{3n+1}+\frac{1}{3n+4}+\cdots+\frac{1}{6n-2}>\frac{n}{6n-2}>\frac{1}{6}.$$

故由柯西准则知级数发散．

例 10.13 $\dfrac{1}{\sqrt{1\cdot 2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2\cdot 3}}+\cdots+\dfrac{1}{\sqrt{n\ (n+1)}}+\cdots.$

解 设 $\varepsilon=\dfrac{1}{4}$，估计差式得

$$|S_{2n}-S_n|=\frac{1}{\sqrt{(n+1)(n+2)}}+\frac{1}{\sqrt{(n+2)(n+3)}}+\cdots+\frac{1}{\sqrt{2n(2n+1)}}>\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}+\cdots+\frac{1}{2n+1}>\frac{1}{4}.$$

故由柯西准则知级数发散.

利用各种判定准则研究级数的敛散性

例 10.14 $\dfrac{(1!)^2}{2}+\dfrac{(2!)^2}{2^4}+\dfrac{(3!)^2}{2^9}+\cdots+\dfrac{(n!)^2}{2^{n^2}}+\cdots.$

解 因

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{((n+1)!)^2 2^{n^2}}{(n!)^2 2^{(n+1)^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}=0,$$

故由达朗贝尔准则知级数收敛.

例 10.15 $\dfrac{4}{2}+\dfrac{4\cdot 7}{2\cdot 6}+\dfrac{4\cdot 7\cdot 10}{2\cdot 6\cdot 10}+\cdots.$

解 首先有

$$a_n=\frac{4\cdot 7\cdot 10\cdot\cdots\cdot(3n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot\cdots\cdot(4n-2)}.$$

由此得

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{3n+4}{4n+2}=\frac{3}{4}.$$

故由达朗贝尔准则知级数收敛.

例 10.16 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$，其中

$$a_n=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & n=m^2\\[2mm] \dfrac{1}{n^2}, & n\neq m^2\end{cases}\quad(m\in\mathbf{N}).$$

解 因级数

$$\left(1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}\right)+\left(\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{((n+1)^2-1)^2}\right)+\cdots$$

的各项有估计式

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}<1+2\cdot\frac{1}{2^2}<2\cdot 1,$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{5^2}+\cdots+\frac{1}{8^2}<\frac{1}{4}+\frac{4}{5^2}<2\cdot\frac{1}{4},$$

$$\frac{1}{n^2}+\frac{1}{(n^2+1)^2}+\cdots+\frac{1}{((n+1)^2-1)^2}<\frac{1}{n^2}+\frac{2n}{(n^2+1)^2}<2\cdot\frac{1}{n^2};\cdots$$

而级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 收敛，从而级数（1）收敛，所以原级数收敛.

例 10.17　$\sum\limits_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n(n-1)}$.

解　因 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1-\frac{2}{n+1}\right)^{n-1}=\lim\limits_{n\to\infty}e^{-2\frac{n-1}{n+1}}=\frac{1}{e^2}<1.$

故由柯西判定准则知所给级数收敛.

例 10.18　$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\cdots.$

解　级数通项为

$$a_n=\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2}}}},n\in\mathbf{N},$$

由

$$\sqrt{2}=2\cos\frac{\pi}{4}$$

可求得 $a_n=\sqrt{2-2\cos\frac{\pi}{2^n}}=2\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}<\frac{\pi}{2^n}$.

由于 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{\pi}{2^n}$ 是收敛的，故由比较方法知所给级数收敛.

例 10.19　证明：若 $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=q$，$a_n>0$，则 $a_n=o(q_1^n)$，其中 $q_1>q$.

证　设 $\varepsilon>0$ 足够小，便有 $\varepsilon<q_1-q$. 根据极限定义：对于给定的 $\varepsilon>0$，$\exists N\in\mathbf{N}$:

$$q-\varepsilon<\frac{a_{N+1}}{a_N}<q+\varepsilon,q-\varepsilon<\frac{a_{N+2}}{a_{N+1}}<q+\varepsilon,\cdots,q-\varepsilon<\frac{a_n}{a_{n-1}}<q+\varepsilon.$$

由这些不等式各部分对应相乘得

$$a_N(q-\varepsilon)^{n-N}<a_n<(q+\varepsilon)^{n-N}a_N,$$

由此得

$$0<\frac{a_n}{q_1^n}<a_N\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n(q+\varepsilon)^{-N},\ \frac{q+\varepsilon}{q_1}<1.$$

显然，当 n 足够大时，有

$$\frac{a_n}{q_1^n}<a_N(q+\varepsilon)^{-N}\left(\frac{q+\varepsilon}{q_1}\right)^n<\varepsilon,$$

这表明 $$a_n = o(q_1^n)\ .$$

例 10.20 证明：若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = q < 1$，$a_n > 0$，则 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，

证 取$0 < \varepsilon < 1 - q$. 根据存在上极限知存在 $N \in \mathbf{N}$，使有

$$0 < \frac{a_{i+1}}{a_i} < q + \varepsilon, i = N, \cdots, n-1.$$

由各不等式对应部分相乘，得

$$0 < a_n < \frac{a_N}{(q+\varepsilon)^N}(q+\varepsilon)^n$$

由于级数 $\sum(q+\varepsilon)^n$ 收敛，故 $\sum a_n$ 也收敛.

例 10.21 证明：若 $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{a_n} = q$，则当 $q < 1$ 时级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛，当 $q > 1$ 时，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ 发散.

证 取 $q < 1$，对于固定的 ε：$0 < \varepsilon < 1 - q$. 由存在上极限知存在 $N \in \mathbf{N}$ 使有

$$0 \leqslant a_{N+1} < (q+\varepsilon)^{N+1}, \cdots, 0 \leqslant a_n < (q+\varepsilon)^n, q+\varepsilon < 1.$$

由级数 $\sum(q+\varepsilon)^n$ 收敛知级数 $\sum a_n$ 收敛.

设 $q > 1$，则对于所取 ε：$0 < \varepsilon < q - 1$，存在 $M \in \mathbf{N}$ 使当 $k > M$ 时，有

$$a_{n_{M+1}} > (q-\varepsilon)^{n_{M+1}}, a_{n_{M+2}} > (q-\varepsilon)^{n_{M+2}}, \cdots, a_{n_k} > (q-\varepsilon)^{n_k}, q-\varepsilon > 1.$$

由此知，级数一般项不趋于零，从而级数发散.

试研究下列级数的敛散性：

例 10.22 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}$.

解 因

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\sqrt[n]{\frac{n^3(\sqrt{2}+(-1)^n)^n}{3^n}} = \lim_{k\to\infty}\frac{\sqrt[2k]{8k^3}(\sqrt{2}+1)}{3} = \frac{\sqrt{2}+1}{3} < 1,$$

故级数收敛

例 10.23 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2n-\ln n}$.

解 因

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\left(\frac{1+\cos n}{2+\cos n}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} \leqslant \lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{2-\frac{\ln n}{n}} - \frac{4}{9} < 1,$$

根据广义柯西判定准则知所给级数收敛.

例 10.24 $\left(\dfrac{1}{2}\right)^p + \left(\dfrac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^p + \left(\dfrac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\right)^p + \cdots$.

解 考虑关系式