全国高等农林院校“十一五”规划教材

高等数学 下册

GAODENG SHUXUE

工科类

张玉峰◎主编

中国农业出版社

全国高等农林院校“十一五”规划教材

高 等 数 学

下 册

工 科 类

张玉峰 主编

中 国 农 业 出 版 社

图书在版编目（CIP）数据

高等数学：工科类．下册/张玉峰主编．—北京：中国农业出版社，2007.8

全国高等农林院校“十一五”规划教材

ISBN 978-7-109-11864-5

Ⅰ．高…　Ⅱ．张…　Ⅲ．高等数学-高等学校-教材

Ⅳ．013

中国版本图书馆 CIP 数据核字（2007）第 117244 号

中国农业出版社出版

（北京市朝阳区农展馆北路 2 号）

（邮政编码 100026）

责任编辑　朱雷　刘新团

北京通州皇家印刷厂印刷　　新华书店北京发行所发行

2007 年 8 月第 1 版　　2007 年 8 月北京第 1 次印刷

开本：720mm×960mm　1/16　　印张：18.5

字数：323 千字

定价：25.00 元

编 写 人 员

主　　编　张玉峰

副 主 编　郝新生　罗胡英

参编人员　赵喜梅　杨俊仙　韩忠海

前　　言

高等数学课程是农林类高等院校工科学生的重要基础课程，是工科学生后续学习和从事科研工作的基础．目前国内通行的工科类高等数学教材比较多，但与农林类院校相匹配的，符合农林类院校学生特点和学习方式的教材尚不多见．

本教材的编写是按照高等数学课程教学基本要求来进行的．编者均为全日制农林类普通高等学校长期从事高等数学和应用数学教学工作的一线教师，具有丰富的教学经验，并对农林类院校高等数学教学内容、教学要求和工科学生的学习特点非常了解．编写时都尽力做到内容选择适当，符合教学要求；章节编排重点突出，难点分散；文字叙述深入浅出，便于阅读；理论分析注意几何和物理的解析，进行必要的抽象概括和严密的逻辑推理．

本教材注意将数学素质的培养融合在教学内容中，突出微积分的基本思想和基本方法．在内容上力求适用、简明、易懂；在例题的选择上力求具有层次性、全面、典型；为了提高学生的科学计算能力，书中的每章之后配备了数学实验；同时，为了便于学习，在书后还配备了所有习题和总复习题的答案．

本教材分为上、下两册，全书内容覆盖了现行农林类院校工科高等数学教学的全部内容．本书适用的教学时数在160～180之间，教师可根据自己学校的不同情况，对书中的内容进行适当的删减．书中的数学实验是为了配合高等数学教学而设置，所以课后的演示与实验还是比较简单的，只是要求能用Mathematica进行有关高等

数学的运算，更深层次的数学实验本书并未涉及，有兴趣的读者也可自己阅读有关书籍．

本教材上册包括第一章至第六章和 Mathematica 简介，分工如下：东北农业大学尹海东负责提出全书编写的总体思路，并编写第四章、第五章；王淑艳编写第一章和所有的演示与实验；柏继云编写第二章、第三章；郭亮编写第六章；大兴安岭职业学院田晓筠演算了上册习题并给出习题解答；河北农业大学海洋学院王丽君编写了 Mathematica 简介．下册包括第七章至第十一章，分工如下：山西农业大学的张玉峰编写了第十章的前六节，并对下册全部内容进行了修改、校对和统稿；郝新生编写了第十一章，同时参与了下册书稿的校对和统稿工作；河北农业大学的罗胡英编写了第七章；赵喜梅编写了第九章，并为第七章和第八章作图；韩忠海编写了第八章的前四节；杨俊仙编写了第八章的其余部分和第十章的第七节．

在本教材编写过程中得到东北农业大学和山西农业大学数学系全体教师的热心帮助，任课教师对本教材提出了很多中肯而又宝贵的意见；本教材在出版的过程中得到了东北农业大学教材科臧宏科长的大力支持，在此表示感谢．由于编者水平有限，本教材在编写过程中难免有一些缺点和不足，请各位读者批评指正．

编　者

2007 年于哈尔滨

内 容 提 要

本书是根据高等数学课程教学基本要求编写的工科高等数学教材．全书共分上下两册．上册的主要内容包括：极限与连续、导数与微分、中值定理与导数的应用、不定积分、定积分及其应用、常微分方程和 Mathematica 软件的介绍；下册的主要内容包括空间解析几何与向量代数、多元函数微分法及其应用、重积分、曲线积分与曲面积分、无穷级数．为便于读者学习，各章最后都编写了演示与实验和总复习题，全书编写了习题解答．

本书适合作为普通高等院校工科专业本专科学生的学习教材，也可作为远程高等教育、成人教育、高等职业教育的教材，或研究生、教师和科技人员的学习参考书．

目 录

第七章　空间解析几何与向量代数

同平面解析几何一样，空间解析几何是通过建立空间直角坐标系，使空间的点与三元有序数组之间建立起一一对应关系，并将空间图形与三元方程联系在一起，从而达到用代数方法研究空间几何问题的目的．因此，空间解析几何是多元函数微积分的基础.

第一节　向量加法　向量与数的乘法

一、空间直角坐标系

在空间取一定点 O，过点 O 作三条相互垂直且具有相同单位长度的数轴，分别叫做 x 轴（**横轴**）、y 轴（**纵轴**）、z 轴（**竖轴**），并按右手规则确定它们的正方向：即伸出右手，拇指与其余并拢的四指垂直，当右手的四个手指从 x 轴的正向以逆时针方向旋转 90°转向 y 轴正向时，大拇指的指向就是 z 轴的正向，这样的三条坐标轴就构成了一个**空间直角坐标系**，点 O 称为**坐标原点**．

三条数轴中任意两条确定一个平面，分别为 xOy 面、yOz 面和 zOx 面，统称为**坐标面**．三个坐标面将空间分成八个部分，称为八个**卦限**．以 x 轴、y 轴、z 轴正半轴为棱的卦限为第一卦限，在 xOy 平面上方按逆时针方向依次为第二、三、四卦限．在 xOy 平面下方与第一卦限相对的为第五卦限，然后按逆时针方向依次为第六、七、八卦限，如图 7－1 所示．

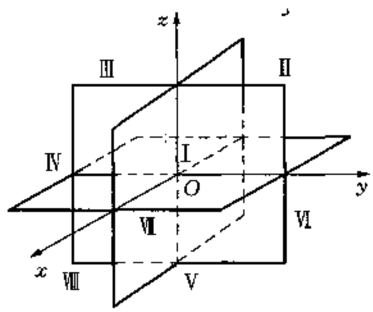

图 7－1

空间一点 M 的直角坐标是这样规定的：过点 M 作三个平面分别垂直于 x 轴、y 轴、z 轴，它们与各轴的交点依次为 P、Q、R，这三点在 x 轴、y 轴、z 轴上的坐标依次为 x、y、z，于是空间一点 M 就唯一地确定了一个有序数组 (x, y, z)；反之，若已知一个有序数组 (x, y, z)，依次在 x 轴、y 轴、z 轴上找出坐标是 x、y、z 的三点 P、Q、

R，分别过这三点作垂直于三个坐标轴的平面，必然相交于空间一点 M，则有序数组 (x, y, z) 唯一对应空间一点 M. 由此可见，空间任意一点与有序数组 (x, y, z) 之间存在着一一对应关系，这组有序数 (x, y, z) 称为点 M 的**坐标**，x、y、z 分别称为点 M 的**横坐标**、**纵坐标**、**竖坐标**，坐标为 x、y、z 的点通常记为 $M(x, y, z)$，如图 7－2 所示．

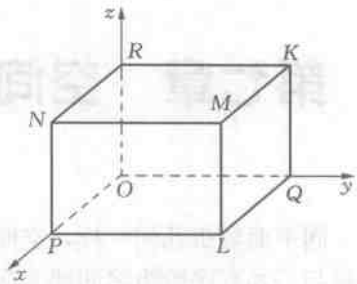

图 7－2

由上述规定可得出图 7－2 中长方体的各顶点坐标分别为 $O(0, 0, 0)$、$P(x, 0, 0)$、$L(x, y, 0)$、$Q(0, y, 0)$、$M(x, y, z)$、$N(x, 0, z)$、$K(0, y, z)$ 和 $R(0, 0, z)$．

二、向　量

我们经常遇到的量有两类：一类是只有大小没有方向的量，如长度、面积、体积、温度等等，这类量称为**数量**（或**标量**）；另一类是既有大小又有方向的量，如力、速度、位移等等，这类量称为**向量**（或**矢量**）．

在几何上，用有向线段来表示向量，有向线段的长度表示向量的大小，有向线段的方向表示向量的方向．如以 A 为起点 B 为终点的向量，记为 $\overrightarrow{AB}$（图 7－3）．为了方便，也常用粗体字 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$、$\boldsymbol{c}$ 等表示向量．以坐标原点 O 为起点，坐标系中另外一点 M 为终点的向量 $\overrightarrow{OM}$ 称为点 M 对于点 O 的**向径**，常用粗体字母 $\boldsymbol{r}$ 表示．与起点无关的向量称为**自由向量**．对于自由向量，我们只考虑它的大小和方向，而不关心它的起点在什么地方．如果不作特别的说明，下面所讨论的向量都是自由向量（简称向量）．

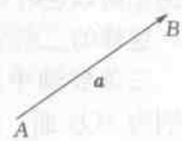

图 7－3

向量的大小称为**向量的模或长度**，向量 $\boldsymbol{a}$ 的长度记为 $|\boldsymbol{a}|$，模等于 1 的向量称为**单位向量**，与向量 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量记为 $\boldsymbol{a}^0$. 模等于 0 的向量称为**零向量**，记为 $\boldsymbol{0}$，零向量没有确定的方向．与向量 $\boldsymbol{a}$ 的模相等而方向相反的向量称为 $\boldsymbol{a}$ 的**负向量**，记作 $-\boldsymbol{a}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 大小相等方向相同，就称 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 相等（即经过平行移动后能完全重合的向量是相等的），记为 $\boldsymbol{a}=\boldsymbol{b}$.

如果向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 为两个非零向量，将它们的起点平移在一起时，两者正向

之间的夹角定义为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的夹角，记为 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})$，显然有 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})\in[0,\pi]$.

当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=0$ 或者 π（即向量 $\boldsymbol{a}$，$\boldsymbol{b}$ 的方向相同或者相反）时，称向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行，记为 $\boldsymbol{a}/\!/\boldsymbol{b}$；当 $(\widehat{\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}})=\frac{\pi}{2}$时，称它们垂直，记为 $\boldsymbol{a}\perp\boldsymbol{b}$.

三、向量线性运算的几何表示

向量的线性运算是指两个向量的加法、减法和向量与数的乘法三种运算.

1. 向量的加法

设有两个向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$，以空间某一定点 A 为始点作向量$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$、$\overrightarrow{AD}=\boldsymbol{b}$，再以这两个向量为邻边作平行四边形 $ABCD$，则从定点 A 到这个平行四边形对角顶点 C 所构成的向量$\overrightarrow{AC}$称为 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和，记作 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$（图 7－4）．这种用平行四边形的对角线向量来定义两向量的和的方法，叫做向量加法的平行四边形法则.

若将 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$ 平移成首尾相接状态，即作$\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}$，再以 B 为起点作$\overrightarrow{BC}=\boldsymbol{b}$，则相连的有向折线段起点 A 到终点 C 的向量$\overrightarrow{AC}$显然也是 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的和 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，即$\overrightarrow{AC}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$. 此时三个向量构成一个三角形，按这种几何相加法求向量和的方法称为向量相加的三角形法则（图 7－4）.

图 7－4

如果两向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 在同一直线上，那么规定它们的和为：当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相同时，和向量的方向与原来两向量的方向相同，其模等于两向量的模之和；当 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 方向相反时，和向量的方向与较长的向量方向相同，而模等于两向量的模之差的绝对值.

利用向量相加的三角形法则，可将两个向量相加的定义推广到 n 个向量相加：使前一向量的终点作为次一向量的起点，相继作向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$，再以第一向量的起点为起点，最后一向量的终点为终点作一向量 $\boldsymbol{a}$，则这个向量就是 n 个向量 $\boldsymbol{a}_1$，$\boldsymbol{a}_2$，…，$\boldsymbol{a}_n$ 的和，即

$$\boldsymbol{a}=\boldsymbol{a}_1+\boldsymbol{a}_2+\cdots+\boldsymbol{a}_n.$$

容易验证，向量加法满足以下运算规律：

(1) 交换律 $\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}=\boldsymbol{b}+\boldsymbol{a}$；

(2) 结合律 $(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})+\boldsymbol{c}=\boldsymbol{a}+(\boldsymbol{b}+\boldsymbol{c})$.

2. 向量的减法

$\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 的差 $\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}$ 定义为 $\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b})$，即

$$\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}=\boldsymbol{a}+(-\boldsymbol{b}).$$

它可由三角形法则得到（图 7－5）.

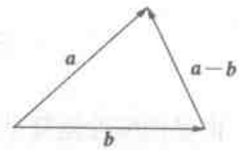

图 7－5

由三角形两边之和大于第三边的原理，有

$|\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$，$|\boldsymbol{a}-\boldsymbol{b}|\leqslant|\boldsymbol{a}|+|\boldsymbol{b}|$.

3. 向量与数的乘法

设 λ 是一个数，向量 $\boldsymbol{a}$ 与 λ 的乘积 $\lambda\boldsymbol{a}$ 定义为：

当 $\lambda>0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=\lambda|\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda<0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相反，模 $|\lambda\boldsymbol{a}|=|\lambda||\boldsymbol{a}|$；

当 $\lambda=0$ 时，$\lambda\boldsymbol{a}$ 是零向量.

向量与数的乘积满足以下运算规律：

(1) 结合律 $\lambda(\mu\boldsymbol{a})=\mu(\lambda\boldsymbol{a})=(\lambda\mu)\boldsymbol{a}$；

(2) 分配律 $(\lambda+\mu)\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{a}+\mu\boldsymbol{a}$，$\lambda(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=\lambda\boldsymbol{a}+\lambda\boldsymbol{b}$，其中 λ、μ 都是常数.

根据向量与数的乘法定义，对任意非零向量 $\boldsymbol{a}$，有 $\boldsymbol{a}^0=\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$. 由于 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 的方向与 $\boldsymbol{a}$ 的方向相同，且 $\left|\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}\right|=\dfrac{|\boldsymbol{a}|}{|\boldsymbol{a}|}=1$，因此 $\dfrac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}$ 是与 $\boldsymbol{a}$ 同方向的单位向量，即

$$\boldsymbol{a}^0=\frac{\boldsymbol{a}}{|\boldsymbol{a}|}.$$

此外，不难证明两个非零向量 $\boldsymbol{a}$ 与 $\boldsymbol{b}$ 平行（也称共线）的充要条件是存在唯一的实数 $\lambda(\lambda\neq0)$，使 $\boldsymbol{a}=\lambda\boldsymbol{b}$.

例 1 设非零向量 $\boldsymbol{a}$、$\boldsymbol{b}$，且向量 $\overrightarrow{AB}=\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{BC}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}$，$\overrightarrow{CD}=3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}$，证明 A、B、D 三点共线.

证 要证 A、B、D 三点共线，只需证明 $\overrightarrow{AB}=\lambda\overrightarrow{BD}$.

因为 $\overrightarrow{BD}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}=2\boldsymbol{a}+8\boldsymbol{b}+3\boldsymbol{a}-3\boldsymbol{b}=5(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{b})=5\overrightarrow{AB}$，即 $\overrightarrow{AB}=\dfrac{1}{5}\overrightarrow{BD}$，且有公共点 B，所以 A、B、D 三点共线.

习 题 7－1

1. 点 $M(x, y, z)$ 的三个坐标 x，y，z 中若有一个为 0，这个点在何处？若有两个为